Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 236–242

УДК 517.54

А. Л. Таргонський [1], ***І. І. Таргонська*** [2]

(Житомирський державний університет імені Івана Франка, Житомир)

[1] **targonsk@zu.edu.ua**

Одна екстремальна задача для функціоналу другого типу у випадку частинно-неперетинних областей

У даній роботі ми розглядаємо одну екстремальну задачу на знаходження максимуму функціоналу (так званого "другого типу") на системах частково-неперетинних областей.

In this paper we consider one extremal problem on finding a maximum of a functional (so-called "second type" functional) in the case of partially non-overlapping domains.

Вступ. Представлена робота належить відомій тематиці геометричної теорії функцій комплексного змінного – екстремальним задачам на класах областей, що попарно не перетинаються. Початок цієї тематики пов'язують з добре відомою роботою 1934 року М. А. Лаврентьєва [1]. У якій він знайшов максимум і визначив розміщення екстремальних областей функціоналу, що складається з добутку внутрішніх радіусів двох однозв'язних областей відносно фіксованих точок комплексної площини. Відмітимо, що цей результат знадобився йому для деякої аеродинамічної задачі. В 1947 році Г. М. Голузин розв'язав аналогічну задачу для трьох фіксованих точок комплексної площини [2]. Після цього ця тематика почала стрімко розвиватися. В зв'язку з цим можна пригадати роботи багатьох авторів, зокрема Ю. Є. Аленіцина, М. А. Лебедева, Дж. Дженкінса, П. М. Тамразова, П. П. Куфарева, А. Е. Фалеса і багатьох інших. Також зазначимо, що у 1975 році Г. П. Бахтіна, використовуючи ідею П. М. Тамразова, вперше розв'язала екстремальну задачу з так званими "вільними полюсами" на одиничному колі. Це означає, що функціонал залежить не тільки від областей, а й від розміщення точок, відносно яких розглядається внутрішній радіус (див., напр., [3]).

Важливий крок для розвитку цієї тематики зробив В. Н. Дубинін. У своїх роботах він розробив новий метод дослідження – метод кусково-поділяючого перетворення. З його допомогою він вперше розв'язав ряд екстремальних задач для довільної, але фіксованої, кількості багатозв'язних областей, які попарно не перетинаються (див., напр., [4–6]). Зараз подібного роду екстремальні задачі використовуються під час досліджень у голоморфній динаміці.

В останнє десятиріччя з'явився новий метод дослідження – метод "керуючих функціоналів розроблений О. К. Бахтіним. З цого допомогою вдалося розв'язати ряд екстремальних задач вже не зв'язаних з колом, у яких точки вільно рухаються по так званих "променевих системах точок причому, як для попарно-неперетинних областей, так і для відкритих множин (див., напр., [7–11]).

Окремо можна виділити екстремальні задачі на класах частинно-неперетинних областях. Цей термін означає, що області можуть перетинатися, але при цьому на їх можливий перетин накладається певна додаткова умова. Напевно, одні з перших подібних результатів можна знайти в роботах [12–15]. Якраз розгляду цього типу екстремальної задачі і присвячена дана робота. Однак, слід зауважити, що результати, які розглянуті у даній роботі, у випадках попарно-неперетинних областей та відкритої множини отримані О. К. Бахтіним і їх можна знайти, наприклад, у роботі [7].

Основна частина. Нехай $\mathbb{R}^+$ — множина додатних дійсних чисел, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація.

Крім того, нехай $r(B, a)$ позначає внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див., напр., [5, 7, 16]).

У роботі, також, використовується поняття квадратичного диференціалу. Означення його та зв'язані з ним результати детально викладені у монографії [17].

Нехай надалі n — ціле число, $n \geq 3$.

Означення 1. Скінчене число точок

$$A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

для яких виконуються співвідношення

$$\arg a_k = \frac{2\pi}{n}(k-1), \qquad k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

ми будемо називати *променевою рівнокутовою системою точок.*

Для кожної такої системи позначимо

$$P_k(A_n) := \{w :\ \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}, \quad k = \overline{1,n},$$

$$R = \left(\left(\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)\right)^{1-\frac{2\alpha}{n^2}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{1+\frac{\alpha}{n}}\right)^{\frac{1}{n+\alpha}},$$

де $\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$, $a_{n+1} = a_1$, $\arg a_{n+1} := 2\pi$.

Нехай D — відкрита множина в $\overline{\mathbb{C}}$, яка містить рівномірну променеву систему точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$. Введемо наступні позначення: якщо $a \in D$, то $D(a)$ — зв'язна компонента D, яка містить точку a; $D_k(a_p)$ — зв'язна компонента множини $D(a_p) \bigcap \overline{P_k(A_n)}$, яка містить точку a_p, $p = k, k+1$ $(k = \overline{1,n})$; $D_k(0)$ — зв'язна компонента множини $D(0) \bigcap \overline{P_k(A_n)}$, яка містить точку $w = 0$.

Означення 2. Будемо вважати, що відкрита множина D, $\{0\} \cup A_n \subset D$, задовольняє *умову неналягання* відносно променевої рівнокутової системи точок A_n, якщо виконується умова

$$\left[D_k(a_k) \bigcap D_k(a_{k+1})\right] \bigcup \left[D_k(0) \bigcap D_k(a_k)\right] \bigcup \left[D_k(0) \bigcap D_k(a_{k+1})\right] = \emptyset, \tag{2}$$

$k = \overline{1,n}$ по всіх кутах $\overline{P_k}$.

Означення 3. Систему областей $\{B_p\}_{p=0}^{n}$ будемо називати системою частинно-неперетинних областей для променевої рівнокутової системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, якщо

$$D = \bigcup_{p=0}^{n} B_p, \tag{3}$$

де D – відкрита множина, яка задовольняє умові неналягання (2), відносно променевої рівнокутової системи точок A_n.

Розглянемо наступну задачу.

Задача. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$. Визначити максимум величини

$$r^{\alpha}\left(B_0, 0\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де A_n — довільна променевої рівнокутової системи точок виду (1), а $\{B_p\}_{p=0}^{n}$ — довільний набір частинно-неперетинних областей, що задовольняє умову (3), $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $B_0, B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, та описати екстремалі $(k = \overline{1,n})$.

У прийнятих позначеннях сформулюємо основні результати роботи.

Теорема 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$, $\alpha \leq n^2$. Тоді для довільної променевої рівнокутової системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ та довільної системи частинно-неперетинних областей $\{B_p\}_{p=0}^{n}$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $B_0, B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$ справедлива нерівність*

$$r^{\alpha}\left(B_0, 0\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq r^{\alpha}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

де $\left\{a_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ та $\left\{B_p^{(0)}\right\}_{p=0}^{n}$ — полюси та відповідно кругові області квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\left(n^2 - \alpha\right) w^n + R^n \alpha}{w^2 \left(w^n - R^n\right)^2} dw^2. \tag{4}$$

Із теореми 1 та теореми 4 роботи [4] випливає наступний результат.

Наслідок 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$, $\alpha < n^2$. Тоді для довільної променевої рівнокутової системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ та довільної системи частинно-неперетинних областей $\{B_p\}_{p=0}^{n}$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $B_0, B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$ справедлива нерівність*

$$r^{\alpha}\left(B_0, 0\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \cdot \frac{\left(\frac{4\alpha}{n^2}\right)^{\frac{\alpha}{n}}}{\left(1 - \frac{\alpha}{n^2}\right)^{n + \frac{\alpha}{n}}} \cdot \left(\frac{n - \sqrt{\alpha}}{n + \sqrt{\alpha}}\right)^{2\sqrt{\alpha}} \cdot R^{n+\alpha}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ та області $\{B_p\}_{p=0}^{n}$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу (4).

При $\alpha = n^2$ з теореми 1 випливає такий результат.

Наслідок 2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Тоді для довільної променевої рівнокутової системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ та довільної системи частинно-неперетинних областей $\{B_p\}_{p=0}^n$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $B_0, B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$ справедлива нерівність*

$$r^{n^2}\left(B_0,0\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leq n^{-n} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^{n+1}}{\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, коли точки $\{a_k\}_{k=1}^n$ та області $\{B_p\}_{p=0}^n$ є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{dw^2}{w^2\left(w^n - R^n\right)^2}.$$

Доведення теореми 1. Згідно з визначенням системи частинно-неперетинних областей, співвідношенням (3) введено відкриту множину D, яка задовольняє (2). Звідси маємо,

$$B_p \subset D, \quad k = \overline{0,n}. \tag{5}$$

Користуючись результатами робіт [4, 5, 7, 16], з (5) отримаємо

$$r\left(B_0,0\right) \leq r\left(D,0\right),$$

$$r\left(B_k,a_k\right) \leq r\left(D,a_k\right), \quad k = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Перемножуючи нерівності (6) робимо висновок, що

$$r^{\alpha}\left(B_0,0\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leq r^{\alpha}\left(D,0\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} r\left(D,a_k\right).$$

Далі, використовуючи теорему 5.2.2 [7], отримаємо остаточний результат. *Теорема* 1 *доведена.*

Насамкінець хочу виразити ***подяку Бахтіну Олександру Костянтиновичу*** за постановку задачі та ряд цінних вказівок під час її розв'язання.

Література

[1] *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — 5. — С. 159 – 245.

[2] *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 628 с.

[3] *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1975. — 11 с.

[4] *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — 168. — С. 48 – 66.

[5] *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — 49, № 1(295). — С. 3 – 76.

[6] *Дубинин. В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 1997. — **237**. — С. 56 – 73.

[7] *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе /Праці Ін-ту мат-ки НАН України. Т. 73/. — К.: Ін-т математики НАН України, 2008. — 308 с.

[8] *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. — 2009. — 61, № 5. — С. 596 – 610.

[9] *Бахтин А. К., Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. — 2005, **8**, № 3. — С. 298 – 303.

[10] *А.К. Бахтин.* Приведенные модули открытых множеств и экстремальные задачи со свободными полюсами // Доп. НАН Украины. — 2006, № 5. — С. 7 – 13.

[11] *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Укр. мат. журн. — 2009, **58**, № 7. — С. 867 – 886.

[12] *Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи о частично неналегающих областях на римановой сфере // Доп. НАН Украини. — 2008, № 9. — С. 31 – 36.

[13] *Подвысоцкий Р. В.* Оценка произведения внутренних радиусов частично неналегающих областей // Укр. мат. журн. — 2008, **60**, № 7. — С. 1004 – 1008.

[14] *Бахтин А. К., Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи для частично неналегающих областей со свободными полюсами // Доп. НАН України. — 2013, № 11. — С. 13 – 19.

[15] *Targonskii A. L.* Extremal problems for partially non-overlapping domains on equiangular systems of points // Bulletin de la Societe des Sciences et des Lettres de Lodz. Recherches sur les Deformations. — 2013, LXIII, № 1. — P. 57 – 63.

[16] *Хейман В. К.* Многолистные функции. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 180 с.

[17] *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

[18] *Дубинин В. Н.* О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена // Мат. сборник. — 2009, **200**, № 10. — С. 25 – 38.

[19] *Кузъмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2001, **276**. — С. 253 – 275.

[20] *Емельянов Е. Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2002, **286**. — С. 103 – 114.