Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 31–37

УДК 517.54

Г.П. Бахтина[1]***, В.Е. Вьюн***[2]***, И.В. Денега***[3]

[1] *(Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", Киев)*

[2, 3] *(Институт математики НАН Украины, Киев)*

[1] **bakhtina@ntu-kpi.kiev.ua,** [2] **vvikev@mail.ru**
[3] **iradenega@yandex.ru**

Задачи об экстремальном разбиении для частично налегающих областей

Работа посвящена исследованию экстремальних проблем геометрической теории функций комплексного переменного, связанных с оценками функционалов, заданных на системах частично налегающих областей. В частности, основное внимание уделяется обобщению некоторых известных результатов.

Paper is devoted to extremal problems in Geometric Function Theory of complex variables associated with estimates of functionals defined on systems of partially overlapping domains. In particular, we focus on a generalization of some known results.

1. Введение. Экстремальные задачи о неналегающих областях составляют известное классическое направление геометрической теории функций комплексного переменного [1–14]. Многие задачи такого типа сводятся к определению максимума произведения внутренних радиусов на системах попарно неналегающих областей, удовлетворяющих определенным условиям. Следует отметить, что большое значение при решении таких задач имеет теория квадратичных дифференциалов, в частности, результаты, описывающие локальную и глобальную структуру их траекторий [3]. Подробнее с историей данного вопроса можно ознакомиться в работах [1–14]. В нашей работе обобщены некоторые результаты этой теории.

2. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация и $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Пусть $r(B,a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ [5, 9, 10]. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Систему точек $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : \, k = \overline{1,n}\right\}$, назовем *$n$-лучевой*, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$. Обозначим при этом $P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 2$.

Пусть D — открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащее лучевую систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$. Если $a \in D$, то будем говорить, что $D(a)$ есть связная компонента D, содержащая точку a; $D_k(a_p)$ – связная компонента множества $D(a_p) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку a_p, $p \in \{k, k-1\}$, $k = \overline{1,n}$; $D_k(0)$ – связная компонента множества $D(0) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку $w = 0$.

Внутренним радиусом $r\,(D, a_k)$ открытого множества D относительно точки a называется внутренний радиус связной компоненты множества D, содержащей точку a.

Пусть открытое множество D содержит точку $w = 0$ и произвольную n-лучевую систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, тогда будем говорить, что такое множество удовлетворяет *условию неналегания* относительно системы точек A_n, если множества $D_k(a_k)$, $D_k(a_{k+1})$, $D_k(0)$ попарно не пересекаются для каждого $k = \overline{1,n}$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^n$, B_0 – произвольный набор областей таких, что $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$. Будем говорить, что система B_0, $\{B_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяет *условию частичного налегания* относительно некоторой системы A_n, если открытое множество $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k \cup B_0$ удовлетворяет условию неналегания относительно этой же n-лучевой системы точек A_n. Из определения совершенно очевидно, что произвольная система взаимно неналегающих областей (то есть $B_p \cap B_j = \emptyset$ при $p \neq j$) удовлетворяет условию частичного налегания.

3. Основные результаты. Цель данной работы состоит в получение точных оценок сверху для функционала следующего вида:

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{1}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ — n-лучевая система точек, B_0, $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ — совокупность областей, удовлетворяющих условию частичного налегания, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0$.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = n$ при $n \geqslant 4$. Пусть $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$, такой, что $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$, и любого набора областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего условию частичного налегания относительно лучевой системы A_n, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{2}$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Доказательство. Метод доказательства этой теоремы основан на применении разделяющего преобразования [4, 6] и использовании идей работ [8, 9, 10, 13, 14]. Рассмотрим открытое множество $\widetilde{D} = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$. Очевидно, что $r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r\left(\widetilde{D}, a_k\right) = r\left(\widetilde{D}(a_k), a_k\right)$. Отсюда

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(\widetilde{D}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(\widetilde{D}, a_k\right).$$

С учетом развитой методике в [4, 5, 9], получаем неравенство

$$J_n(\gamma) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma} \left(G_0^{(k)}, 0\right) \cdot r \left(G_1^{(k)}, -i\right) \cdot r \left(G_2^{(k)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $G_0^{(k)}$, $G_1^{(k)}$, $G_2^{(k)}$ — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\alpha_k^2\gamma)w^2 - \alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2$$

($0 \in G_0^{(k)}$, $-i \in G_1^{(k)}$, $i \in G_2^{(k)}$). Следуя работам [4, 8], переходим к функции

$$P(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in [0,2],$$

и, в результате, имеем неравенство

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\alpha_k \sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Далее применяем метод, предложенный в [4, 8]. Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\prod_{k=1}^{n} P(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}, \quad 0 < x_k \leqslant 2.$$

Пусть $F(x) = \ln(P(x))$ и $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ — произвольная экстремальная точка выше указанной задачи. Повторяя рассуждения работы [8], получаем утверждение: если $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$, тогда имеют место следующие соотношения

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}), \tag{3}$$

и если некоторое $x_j^{(0)} = 2$, тогда для произвольного $x_k^{(0)} < 2$,

$$F'(x_k^{(0)}) \leqslant F'(x_j^{(0)}) = F'(2) = 1, \tag{4}$$

где $F'(x) = 2x\ln 2x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x}$. Убедимся, что на основании соотношений (3) и (4) при условиях теоремы 1 выполняется равенство $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Пусть для простоты $x_1^{(0)} \leqslant x_2^{(0)} \leqslant \ldots \leqslant x_n^{(0)}$. Функция

$$F''(x) = \ln\left(\frac{4x^2}{4-x^2}\right) - \frac{2}{x^2}$$

строго возрастает на $(0,2)$ и существует x_0, $x_0 \approx 1,324661$, такое, что $signF''(x) \equiv sign(x-x_0)$.

Рассмотрим случай $n = 4$. Если $x_4^{(0)} \leqslant x_0$, тогда в силу строгой монотонности $F'(x)$ на $[0,\, x_0]$ из условия задачи получаем, что $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)}$.

Пусть $x_0 \leqslant x_4^{(0)} < 1,75$. Тогда

$$x_1^{(0)} \leqslant \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{3} x_k^{(0)} = (2\sqrt{\gamma_4} - x_4^{(0)})/3 \leqslant (2\sqrt{4} - x_0)/3 < 0,891780.$$

В силу убывания $F'(x)$ на $(0,\, x_0)$, получаем

$$F'(x_1^{(0)}) > F'(0,891780) = 0,317868 > 0,224369 = F'(1,75),$$

что противоречит соотношению (3). Таким образом, приходим к противоречию с предположением о экстремальности набора $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\}$, если $x_4^{(0)} \in [x_0;\, 1,75)$.

Пусть $1,75 \leqslant x_4^{(0)} < 1,95$. Тогда в силу возрастания $F'(x)$ на $[x_0, 2]$, имеем $F'(x_4^{(0)}) \leqslant F'(1,95) = 0,757486$. Следовательно,

$$x_1^{(0)} \leqslant \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{3} x_k^{(0)} = (2\sqrt{\gamma_4} - x_4^{(0)})/3 \leqslant (2\sqrt{4} - 1,75)/3 < 0,75.$$

Таким образом,

$$F'(x_1^{(0)}) > F'(0,75) = 0,771891 > 0,757486 = F'(1,95).$$

Аналогично предыдущему, получаем противоречие с экстремальностью набора $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\}$, если $x_4^{(0)} \in [x_0;\, 1,95)$.

Пусть $1,95 \leqslant x_4^{(0)} \leqslant 2$, тогда в силу возрастания $F'(x)$ на $[x_0, 2]$, имеем $F'(x_4^{(0)}) \leqslant F'(2) = 1$. Аналогично предыдущему,

$$x_1^{(0)} \leqslant \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{3} x_k^{(0)} = (2\sqrt{\gamma_4} - x_4^{(0)})/3 \leqslant (2\sqrt{4} - 1,95)/3 < 0,683333.$$

То есть, получаем соотношение

$$F'(x_1^{(0)}) > F'(0,683333) = 1,067351 > 1 = F'(2),$$

противоречащее условиям (3) и (4). Таким образом, для экстремального набора $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\}$ возможен только случай, когда $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)} \in (0, x_0]$ и $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)}$. Для всех $\gamma < \gamma_4 = 4$ все предыдущие рассуждения сохраняются. Отсюда следует, что теорема 1 в случае $n = 4$ доказана. Метод доказательства теоремы 1 для $n \geqslant 5$ почти дословно повторяет рассуждения работы [8]. Окончательно, используя теорему 2 [13] (см. также теорему 1 [14]), имеем соотношение

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{n/2}.$$

Используя конкретное выражение для функции $P(x)$ и несложные преобразования, получаем неравенство (2). Реализация знака равенства проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — 5. — С. 159 – 245.

[2] *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М: Наука, 1966. — 628 с.

[3] *Дженкинс Дж.А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

[4] *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — 168. — С. 48 – 66.

[5] *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — 49, № 1(295). — С. 3 – 76.

[6] *Дубинин В.Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 1997. — 237. — С. 56 – 73.

[7] *Колбина Л.И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестник Ленинград. ун-та. — 1955. — **5**. — С. 37 – 43.

[8] *Ковалев Л.В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. — 1996. — **2**. — С. 96 – 98.

[9] *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН України. — 2008. — Т.73. — 308 с.

[10] *Дубинин В.Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. — Владивосток: Дальнаука, ДВО РАН, 2009. — 390 с.

[11] *Денега И.В.* Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях // Доп. НАН України. — 2012. — №4. — С. 15 – 19.

[12] *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Денега И.В.* Оценки произведения внутренних радиусов взаимно неналегающих областей в многомерных комплексных пространствах // arXiv preprint / arXiv:1207.4893 [math. CV] /. — 2012.

[13] *Bakhtin A.K., Denega I.V.* Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations. — 2012. — V. LXII, no.2. — P. 83 – 92.

[14] *Бахтин А.К., Денега И.В.* Метод разделяющего преобразования в задачах о максимуме произведения степеней внутренних радиусов неналегающих областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 2012. — Т.9, №2. — С. 32 – 44.