Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 38–46

УДК 517.54

***А. К. Бахтин*[1], *В. Е. Вьюн*[2], *А. Л. Таргонский*[3]**

[1], [2] *(Институт математики НАН Украины, Киев)*

[3] *(Житомирский государственный университет имени Ивана Франко, Житомир)*

[1] **alexander.bahtin@yandex.ru**, [2] **vvikev@mail.ru**,
[3] **targonsk@zu.edu.ua**

Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей

В работе исследуются экстремальные задачи геометрической теории функций комплексного переменного, связанные с оценками функционалов, заданных на системах непересекающихся областей.

Extremal Problems of Geometric Function Theory associated with estimates for functionals, defined on systems of non-overlapping domains, are investigated.

В 1994 году в работе [1] была сформулирована одна открытая экстремальная проблема о неналегающих областях со свободными полюсами. Эта задача вызвала большой интерес и изучалась во многих работах (см., например, [2 – 9]). В данный момент по этой проблеме известны лишь частичные результаты, в целом же она не решена. Данная работа посвящена изучению этой задачи.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Пусть $r(B,a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [1,4,12]). Обозначим $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 2$.

В данной работе исследуется функционал следующего вида

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \qquad (1)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – система точек, расположенная на единичной окружности, $a_0 = 0$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ – система неналегающих областей (то есть $B_p \cap B_j = \emptyset$ при $p \neq j$) таких, что $a_k \in B_k$ при $k = \overline{0,n}$.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 8$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0{,}42}$. Тогда для любой системы различных точек единичной окружности $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и любого набора взаимно неналегающих областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $(k = \overline{1,n})$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right), \qquad (2)$$

где D_k, d_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, — круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\gamma = n^{0{,}42}$. Задача об изучении функционала (1) рассматривалась в [2,3,5,8]. Следуя методу работы [4, с.255], имеем

$$J_n(\gamma) = \prod_{k=1}^{n}\left[r(B_0,0)r(B_k,a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Проводя рассуждения, как и в работах [4, с. 256], [7,8], получаем

$$J_n(\gamma) \leqslant \left[2^n\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

где $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$, причем $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. С другой стороны, известно (см. [3,4]), что

$$J_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Рассмотрим величину $O_n(\gamma) = J_n(\gamma)/J_n^0(\gamma)$ при $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$. Выполнив несложные преобразования, получаем

$$O_n(\gamma) \leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1} \cdot \left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} \cdot \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Оценку значения $O_n(\gamma)$ проводим по схеме, изложенной в [4, с. 255–259], [8]. Рассмотрим сначала величину $O_n(\gamma)$ для значения $\gamma = n^{0,42}$. В этом случае получаем

$$O_n(n^{0,42}) \leqslant \prod_{k=1}^{6} y_k(n),$$

где

$$y_1(n) = \left(\frac{n}{4}\right)^{n^{0,42}+1} \left(1-n^{-0,21}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,58}}}, \quad y_2(n) = \left(n^{0,58}\right)^{n^{-0,58}},$$

$$y_3(n) = \left(1-n^{-1,58}\right)^{n+n^{-0,58}}, \quad y_4(n) = \left(\frac{1+n^{-0,79}}{1-n^{-0,79}}\right)^{2n^{0,21}},$$

$$y_5(n) = \left(\frac{4}{n^{0,21}}\right)^{1-n^{-0,58}}, \quad y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,58}}}.$$

Оценим отдельно каждый из множителей $y_k(n)$, $k = \overline{1,6}$. Для функции $y_1(n)$ справедливо следующее соотношение

$$\ln y_1(n) = (n^{0,42}+1)\ln\left(\frac{n}{4}\right) + \left(n-1-\frac{n-1}{n^{0,58}}\right)\ln\left(1-n^{-0,21}\right).$$

Так как $\ln\left(\frac{n}{4}\right) \leqslant 1,05\sqrt[4]{n}$ при $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\ln y_1(n) \leqslant \left(n^{0,42}+1\right) 1,05\sqrt[4]{n} + \left(n - 1 - \frac{n-1}{n^{0,58}}\right) \ln\left(1 - n^{-0,21}\right).$$

При $0 < x < 1$ справедливо неравенство

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots < -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

Отсюда следует соотношение

$$\ln y_1(n) \leqslant \left(n^{0,42}+1\right) 1,05\sqrt[4]{n} + \left(n - 1 - n^{0,42} + n^{-0,58}\right) \times$$

$$\times \left(-n^{-0,21} - \frac{n^{-0,42}}{2} - \frac{n^{-0,63}}{3}\right) =$$

$$= \left(n^{0,42}+1\right) 1,05\sqrt[4]{n} - n^{0,79}(1 - n^{-1} - n^{-0,58} + n^{-1,58}) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{n^{-0,21}}{2} + \frac{n^{-0,42}}{3}\right),$$

Стандартными методами показываем, что функция

$$\varphi(x) = \left(x^{0,42}+1\right) 1,05\sqrt[4]{x} - x^{0,79}\left(1 - x^{-1} - x^{-0,58} + x^{-1,58}\right)$$

монотонно убывает на промежутке $x \in [15, \infty)$. Понятно, что функция $\ln y_1(n)$ также будет убывать на промежутке $n \in [15, \infty)$. То есть, справедливо соотношение $y_1(n) < y_1(30) \approx 0,030797$, $n \geqslant 30$.

Далее, аналогично рассматриваем функцию $y_2(x) = \left(x^{0,58}\right)^{x^{-0,58}}$. Она убывает на промежутке $x \in [8, \infty)$ (см. рис. 1). Таким образом, $y_2(x) < 1,434855$, $x \geqslant 8$. Отсюда $y_2(n) < 1,434855$, $\quad n \geqslant 8$.

Очевидно, что $y_3(n) = \left(1 - n^{-1,58}\right)^{n+n^{-0,58}} < 1, n \geqslant 2$ (см. рис. 2).

Рассмотрим функцию $y_4(n)$. Представим ее следующим образом

$$y_4(n) = \left(1 + n^{-0,79}\right)^{n^{0,79} n^{-0,79} 2n^{0,21}} \left(1 - n^{-0,79}\right)^{(-n^{0,79})(n^{-0,79}) 2n^{0,21}}.$$

Поскольку $\left(1 + n^{-0,79}\right)^{n^{0,79}} < e$ при $n \in \mathbb{N}$, а $\left(1 - n^{-0,79}\right)^{-n^{0,79}} < 3$ при $n \geqslant 10$, тогда

$$y_4(n) \leqslant (3e)^{2n^{-0,58}} \quad \forall n \geqslant 10.$$

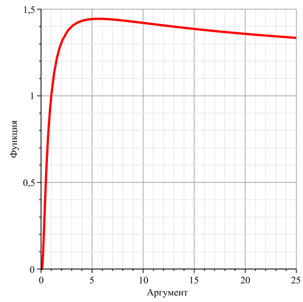

Рис. 1: График функции $y_2(x)$

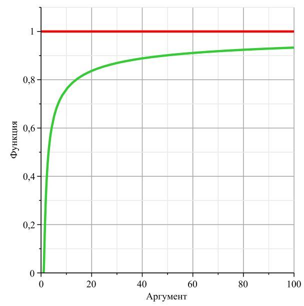

Рис. 2: График функции $y_3(x)$

Таким образом, $y_4(n)$ убывает на всей области определения и $y_4(n) < y_4(30) \approx 1,791240$, $n \geqslant 30$. (см. рис. 3).

Исследуя функцию $y_5(x) = \left(\dfrac{4}{x^{0,21}}\right)^{1-x^{-0,58}}$ по стандартной схеме получаем, что она убывает на промежутке $x \in [10, \infty)$ (см. рис. 4). Таким образом, $y_5(n) < y_5(30) \approx 1,783494$, $n \geqslant 30$.

Для функции $y_6(n)$ справедливо следующее соотношение

$$y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,58}}} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e, \quad n \geqslant 10$$

(см. рис. 5).

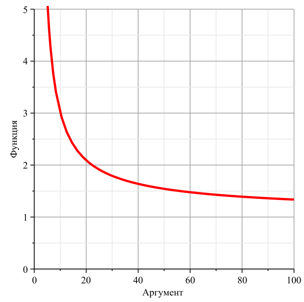

Рис. 3: График функции $y_4(x)$

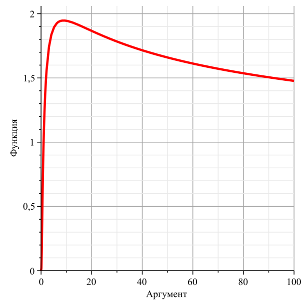

Рис. 4: График функции $y_5(x)$

Тогда, суммируя все выше сказанное, имеем

$$O_n(n^{0,42}) \leqslant \prod_{k=1}^{6} y_k(n) < 0,4 < 1 \quad \text{для } n \geqslant 30.$$

Выполняя непосредственные вычисления $O_n(\gamma)$, получаем, что $O_n\left(n^{0,42}\right) < 1$ при $n = \overline{8,29}$ (см. таблицу ниже).

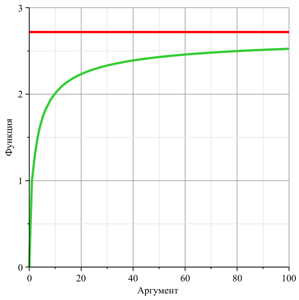

Рис. 5: График функции $y_6(x)$

n	$O_n(n^{0,42})$	n	$O_n(n^{0,42})$	n	$O_n(n^{0,42})$
7	1,013228	15	0,232953	23	0,052353
8	0,848099	16	0,193299	24	0,043455
9	0,707643	17	0,160382	25	0,036073
10	0,589268	18	0,133067	26	0,029949
11	0,490055	19	0,110406	27	0,024868
12	0,407193	20	0,091607	28	0,020652
13	0,338146	21	0,076014	29	0,017153
14	0,280698	22	0,063081	30	0,014249

Пусть теперь $\gamma \in (1; n^{0,42}]$. Аналогично работам [7, 8] показываем, что $J_n(\gamma) < J_n^0(\gamma)$ при $\gamma \in (1, n^{0,42}]$, $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$, $n \geqslant 8$. А это означает, что при данных значениях параметров нет экстремальных конфигураций. Остается исследовать случай $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$. Следуя работам [2, 3], введем функцию

$$S(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in [0, 2],$$

и, используя результаты [4, 5], имеем неравенство

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\sqrt{\gamma} \right) \left[\prod_{k=1}^{n} S\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right) \right]^{\frac{1}{2}} = \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

где

$$P(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in [0, 2].$$

Далее, применяя рассуждения работы [3], получаем утверждение теоремы 1, то есть тот факт, что для экстремального набора $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^n$ возможен только случай $x_k^{(0)} \in (0, x_0]$, $x_0 \approx 1,324661$, $k = \overline{1,n}$ и $x_1^{(0)} = \dots = x_n^{(0)}$. Окончательно имеем соотношение

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{n/2}.$$

Используя конкретное выражение для $P(x)$ и несложные преобразования, получаем неравенство (2). Реализация знака равенства проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — 49, № 1 (295). — С. 3 – 76.

[2] *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. Ин-та АН СССР. — 1988. — 168. — С. 48 – 66.

[3] *Ковалев Л.В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. — 1996. — **2**. — С. 96 – 98.

[4] *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Топологоалгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН України. — 2008. — Т.73. — 308 с.

[5] *Денега И.В.* Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях // Доп. НАН України. — 2012. — №4. — С. 15 – 19.

[6] *Кузьмина Г.В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2001. — **276**. — С. 253 – 275.

[7] *Заболотний Я.В.* Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області // Доп. НАН України. — 2011. — №9. — С. 11 – 14.

[8] *Бахтин А.К., Денега И.В.* Об одной проблеме В.Н. Дубинина // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2013. — **10**, №4-5. — С. 401 – 411.

[9] *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Подвисоцкий Р.В.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН України. — 2009. — №9. — С. 7 – 11.

[10] *Дубинин В.Н., Кириллова Д.А.* Некоторые применения экстремальных разбиений в геометрической теории функций // Дальневост. матем. журн. — 2010. — **10**. — №2. — С. 130 – 152.

[11] *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — 5. — С. 159 – 245.

[12] *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М: Наука, 1966. — 628 с.

[13] *Дженкинс Дж.А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.