Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 56–64

УДК 512.53 + 512.64

В. М. Бондаренко [1]***, О. В. Зубарук*** [2]

[1] *(Інститут математики НАН України, Київ)*

[2] *(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ)*

[1] **vit-bond@imat.kiev.ua,** [2] **Sambrinka@ukr.net**

Σ-функція числа параметрів для системи матричних зображень: початкові поняття та приклади

In this paper we introduce the notion of Σ -function for a finite system of matrix representations of an algebra and consider an examples for complete systems of algebras with finite number of indecomposable representations.

У статті вводиться поняття Σ-функції для скінченної системи матричних зображень алгебри та розглядаються приклади для повних систем алгебр зі скінченним числом нерозкладних зображень.

1. Вступ. Згідно означення матричних зображень алгебр, матричне зображення алгебри Λ над полем K — це довільний гомоморфізм $T\colon \Lambda \longrightarrow M_n(K)$, де $M_n(K)$ алгебра всіх квадратних матриць порядку n над K (n називається розмірністю зображення T).

Нехай T — матричне зображення скінченно-породженої алгебри Λ. Позначимо через $p(T)$ максимальне число незалежних параметрів матриці X, що задовольняє систему лінійних матричних рівнянь $T(\lambda)X = XT(\lambda)$, де λ пробігає алгебру Λ. Легко бачити, що ці рівняння достатньо взяти лише для твірних і тоді $p(T)$ дорівнює корангу по стовпцях матриці відповідної системи лінійних скалярних рівнянь відносно елементів матриці X. Очевидно, що $p(T)$ не залежить від вибору системи твірних і не змінюється при заміні T на еквівалентне йому зображення.

Нехай тепер $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ — система матричних зображень (скінченно-породженої) алгебри Λ. Для $s \in [1, m] =: \{1, 2, \ldots, m\}$ покладемо

$$p_s(T) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_s} p(T_{i_1} \oplus T_{i_2} \oplus \ldots \oplus T_{i_s}).$$

Введемо (для системи T) функцію $\Sigma_T(s) \colon [1, m] \longrightarrow \mathbb{N}$, яка числу $s \in [1, m]$ зіставляє натуральне число $p_s(T)$; будемо називати її Σ-функцією числа параметрів для T або просто Σ-функцією системи T. У випадку, коли Λ є алгеброю скінченного зображувального типу над полем K (тобто має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень), а T — повна система її нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень, Σ-функцію системи T називаємо Σ-функцією алгебри Λ; при цьому покладемо $p_s(\Lambda) = p_s(T)$ і $\Sigma_\Lambda(s) = \Sigma_T(s)$. У цьому випадку Σ-функція однозначно визначається відповідною алгеброю Ауслендера і, отже, є її функціональною характеристикою.

Зрозуміло, що подібні означення можна ввести для груп і напівгруп (вивчення зображень яких еквівалентне вивченню зображень групових та напівгрупових алгебр). І взагалі вони узагальнюються на довільні класифікаційні матричні задачі; роль матриць X в цих випадках (як, між іншим, і у розглянутому) відіграють ендоморфізми відповідних категорій.

2. Приклади з однією матрицею. Через $St(T)$, де T — матричне зображення алгебри Λ, будемо позначати множину всіх матриць X таких, що $T(\lambda)X = XT(\lambda)$ для довільного $\lambda \in \Lambda$.

Приклад 1: $\boldsymbol{A^2 = A}$. Розглянемо алгебру Λ_2^1, породжену одним елементом a таким, що $a^2 = a$. Її матричне зображення задається ідемпотентною матрицею A. За її повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень природно взяти таку, що складається із наступних двох зображень: 1) $T_1 : a \longrightarrow 0$; 2) $T_2 : a \longrightarrow 1$. Очевидно, $p(T_1) = p(T_2) = 1$, а оскільки матриця X належить $St(T_1 \oplus T_2)$ тоді і лише тоді, коли вона діагональна, то $p(T_1 \oplus T_2) = 2$. Таким чином, $\Sigma_{\Lambda_2^1}(s) \equiv 2$.

Приклад 2: $\boldsymbol{A^2 = 0}$. Розглянемо алгебру Λ_2^0, породжену одним елементом a таким, що $a^2 = 0$. Її матричне зображення задається матрицею A, рівною в квадраті нулю.

За її повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень природно взяти таку, що складається із наступних двох зображень:

1) $T_1 \colon a \longrightarrow 0;$

2) $T_2 \colon a \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Очевидно, що $p(T_1) = 1$, а оскільки матриця $X \in St(T_2)$ має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix},$$

то $p(T_2) = 2$. Отже, $p_1(\Lambda_2^0) = p(T_1) + p(T_2) = 3$.

Розглянемо тепер суму нерозкладних зображення

$$T = T_1 \oplus T_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матриця $X \in St(T)$, як легко обчислити, має вигляд

$$\left(\begin{array}{c|cc} x_{11} & 0 & x_{13} \\ \hline x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{22} \end{array}\right)$$

і значить $p(T) = 5$.

Таким чином,

$$\Sigma_{\Lambda_2^0}(s) = \begin{cases} 3, & \text{якщо } s = 1, \\ 5, & \text{якщо } s = 2. \end{cases}$$

3. Пари ідемпотентних матриць. Нехай Λ_{22}^{11}, — алгебра, породжена елементами a, b такими, що $a^2 = a$, $b^2 = b$. Її матричне зображення задається парою ідемпотентних матриць A, B. Після приведення матриці A до канонічного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де E позначає, як звичайно, одиничну матрицю, маємо задачу про подібність матриць

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

з розбиттям на блоки, узгодженим з розбиттям матриці A, за допомогою блоково-діагональних матриць (бо такі і лише такі матриці не змінюють вигляд матриці A при перетвореннях подібності). Остання задача є ручною (дозволяє явний опис) і має, з точністю до подібності, нескінченну кількість нерозкладних пар матриць; див. [1].

Ми розглянемо для твірних алгебри Λ_{22}^{11} додаткове співвідношення $ab = 0$. Нову алгебру (яка ізоморфна фактор-алгебрі заданої) позначимо через $\overrightarrow{\Lambda}_{22}^{11}$. Її матричне зображення задається парою матриць A, B із наступними співвідношеннями:

$$A^2 = A,\ B^2 = B,\ AB = 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Нерозкладні матричні зображення $\overrightarrow{\Lambda}_{22}^{11}$ над полем K вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 0, \quad b \to 0$;

2) $a \to 0, \quad b \to 1$;

3) $a \to 1, \quad b \to 0$;

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Доведення. Нехай маємо довільне матричне зображення алгебри $\overrightarrow{\Lambda}_{22}^{11}$, що задається матрицями (1), (2) і співвідношеннями (3). Спочатку скористаємося рівністю $AB = 0$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо $B_{11} = 0$, $B_{12} = 0$, тобто

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Далі використаємо співвідношення $B^2 = B$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{22}B_{21} & B_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Звідси $B_{22}^2 = B_{22}$ і, значить, B_{22} подібна матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а оскільки подібність матриці B_{22} піднімається до подібності пари матриць A, B, то можна вважати, що

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B'_{21} & E & 0 \\ B'_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

де

$$\begin{pmatrix} B'_{21} \\ B'_{31} \end{pmatrix} = B_{21}.$$

Із рівності $B_{22}B_{21} = B_{21}$ (див. (4)) маємо, що $B'_{31} = 0$. Що стосується (єдиної ще неприведеної) матриці B'_{21}, то існують оборотні матриці C і D такі, що

$$CB'_{21}D = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки перетворення (C, D) піднімається до подібності пари матриць A, B, то із (1) і (5) випливає, що матриці A і B, мають наступний вигляд:

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Легко бачити, що отримана нами пара матриць розкладається в пряму суму матричних зображень вигляду 1) – 4), вказаних в умові теореми.

Треба ще впевнитися в тому, що зображення 1) – 4) нерозкладні і попарно нееквівалентні.

Зображення 1) – 3) нерозкладні як зображення розмірності 1. Якби зображення 4) було розкладним, то із міркування рівності рангів подібних матриць воно було б еквівалентним прямій сумі зображень 2) і 3), а це неможливо, бо в одному випадку сума матриць, що відповідають елементам a і b, дорівнює одиничній матриці, а в другому — (нижній) клітині Жордана з власним числом одиниця. Попарна нееквівалентність зображень 1) – 4) очевидна. $\square$

Обчислимо Σ-функцію числа параметрів для системи нерозкладних зображень $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$.

Очевидно, $p(T_1) = p(T_2) = p(T_3) = 1$.

Розглянемо нерозкладне зображення $T_4 = \{A_4, B_4\}$. Тоді

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що якщо $X \in St(T_4)$, тобто $A_4X = XA_4$, $B_4X = XB_4$, то

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix}.$$

Значить $p(T_4) = 1$ і, отже, $p_1(T) = p(T_1) + p(T_2) + p(T_3) + p(T_4) = 4$.

Розглянемо зображення $T_{ij} = \{A_{ij}, B_{ij}\} = T_i \oplus T_j$, де $i < j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Тоді матриці A_{ij} і B_{ij} діагональні, причому хоча б одна із них має різні числа на головній діагоналі. Тоді матриця X належить $St(T_{ij})$ тоді і лише тоді, коли вона діагональна, а значить $p(T_{ij}) = 2$.

Отже, $p(T_1 \oplus T_2) = p(T_1 \oplus T_3) = p(T_2 \oplus T_3) = 2$.

Розглянемо зображення $T_{14} = \{A_{14}, B_{14}\} = T_1 \oplus T_4$. Тоді

$$A_{14} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad B_{14} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Легко обчислити, що якщо $X \in St(T_{14})$, то

$$X = \left(\begin{array}{c|cc} x_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & x_{22} \end{array}\right).$$

Значить $p(T_1 \oplus T_4) = 2$.

Розглянемо зображення $T_{24} = \{A_{24}, B_{24}\} = T_2 \oplus T_4$. Тоді

$$A_{24} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad B_{24} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Легко обчислити, що якщо $X \in St(T_{24})$, то

$$X = \left(\begin{array}{c|cc} x_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_{22} & 0 \\ x_{31} & 0 & x_{22} \end{array}\right).$$

Значить $p(T_2 \oplus T_4) = 3$.

Розглянемо зображення $T_{34} = \{A_{34}, B_{34}\} = T_3 \oplus T_4$. Тоді

$$A_{34} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad B_{34} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Легко обчислити, що якщо $X \in St(T_{34})$, то

$$X = \left(\begin{array}{c|cc} x_{11} & x_{12} & 0 \\ \hline 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & x_{22} \end{array}\right).$$

Значить $p(T_3 \oplus T_4) = 3$.

Отже, $p_2(T) = p(T_1 \oplus T_2) + p(T_1 \oplus T_3) + p(T_2 \oplus T_3) + p(T_1 \oplus T_4) + p(T_2 \oplus T_4) + p(T_3 \oplus T_4) = 14$.

Розглянемо зображення $T_{123} = \{A_{123}, B_{123}\} = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$. Тоді

$$A_{123} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad B_{123} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Легко обчислити, що якщо $X \in St(T_{123})$, то

$$X = \left(\begin{array}{c|c|c} x_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_{33} \end{array}\right).$$

Значить $p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3) = 3$.

Розглянемо зображення $T_{124} = \{A_{124}, B_{124}\} = T_1 \oplus T_2 \oplus T_4$. Тоді

$$A_{124} = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad B_{124} = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Легко обчислити, що якщо $X \in St(T_{124})$, то

$$X = \left(\begin{array}{c|c|cc} x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_{33} & 0 \\ 0 & x_{42} & 0 & x_{33} \end{array}\right).$$

Значить $p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_4) = 4$.

Розглянемо зображення $T_{134} = \{A_{134}, B_{134}\} = T_1 \oplus T_3 \oplus T_4$. Тоді

$$A_{134} = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad B_{134} = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Легко обчислити, що якщо $X \in St(T_{134})$, то

$$X = \left(\begin{array}{c|c|cc} x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_{22} & x_{23} & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} \end{array}\right).$$

Значить $p(T_1 \oplus T_3 \oplus T_4) = 4$.

Розглянемо зображення $T_{234} = \{A_{234}, B_{234}\} = T_2 \oplus T_3 \oplus T_4$. Тоді

$$A_{234} = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad B_{234} = \left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Легко обчислити, що якщо $X \in St(T_{234})$, то

$$X = \left(\begin{array}{c|c|cc} x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_{22} & x_{23} & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_{33} & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{33} \end{array}\right).$$

Тобто, $p(T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) = 5$.

Отже, $p_3(T) = p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3) + p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_4) + p(T_1 \oplus T_3 \oplus T_4) + p(T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) = 16$.

Розглянемо зображення $T_{1234} = \{A_{1234}, B_{1234}\} = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4$. Тоді

$$A_{1234} = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad B_{1234} = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Легко обчислити, що якщо $X \in St(T_{1234})$, то

$$X = \left(\begin{array}{c|c|c|cc} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{44} \end{array}\right).$$

Отже, $p_4(T) = p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) = 6$.

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 2.

$$\Sigma_{\overrightarrow{\Lambda}^{11}_{22}}(s) = \begin{cases} 4, & \textit{якщо} \quad s = 1, \\ 14, & \textit{якщо} \quad s = 2, \\ 16, & \textit{якщо} \quad s = 3, \\ 6, & \textit{якщо} \quad s = 4. \end{cases}$$

Література

[1] *B*ondarenko V. M. Linear operators on vector spaces graded by posets with involution: tame and wild cases // Proc. of Institute of Math. of NAS of Ukraine /Mathematics and its Applications/. — **63.** — K.: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2006.