УДК 517.5

М. В. Гаєвський (Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кіровоград)
П. В. Задерей (Київський національний університет технологій та дизайну, Київ)

ОЦІНКИ ГРУПИ φ-ВІДХИЛЕНЬ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

We obtain estimates convergence groups φ-deviations and λ-method summation Taylor series of analytic and bounded functions in the unit circle.

Отримано оцінки збіжності груп φ-відхилень та φ-середніх λ-методів підсумовування рядів Тейлора аналітичних і обмежених в крузі функцій.

Введемо такі позначення: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, z \in D \tag{1}$$

— розклад в ряд Тейлора-Маклорена аналітичної в крузі D функції,

$$S_n(f, z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, z \in D$$

— частинна сума її ряду Тейлора, де $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Розглянемо множину H_∞ аналітичних в D функцій з нормою

$$\|f\|_{H_\infty} = \|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)| \ < \infty,$$

і нехай UH — одинична куля в H_∞, тобто множина функцій, для яких

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)| \leq 1.$$

Нехай P_n — множина алгебраїчних поліномів степеня не вище n; $\rho_n(f, z) = f(z) - S_n(f, z)$; $E_n(f) := E_n(f)_\infty = \inf_{p_n \in P_n} \|f(z) - p_n(z)\|_\infty$

— найкраще наближення аналітичної в D функції f алгебраїчними поліномами степеня не вище n.

Нехай $\psi = \{\psi(k)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ — послідовність комплексних чисел таких, що $|\psi(k)| \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ і $\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0$; $f \in H_\infty$ — функція з рядом Тейлора виду (1). Позначимо через H_∞^ψ клас функцій з H_∞, для яких сума ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} a_k z^k, z \in D \tag{2}$$

є аналітичною функцією $f^\psi \in UH$.

Через Φ позначимо множину неспадних і неперервних на $(0,\infty)$ функцій $\varphi(\cdot)$ таких, що $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$, $\varphi(u) \leq e^{bu}$, $b > 0$ та для $u \in [0,1]$ $\varphi(2u) \leq a\varphi(u)$, де $a = a(\varphi)$, $a > 0$. Природними представниками множини Φ є, наприклад, функції $\varphi(u) = u^p, p > 0$, $\varphi(u) = e^u - 1$.

Нехай далі $L_\infty(T)$ — простір істотно обмежених на T функцій з нормою $\|f\|_{L_\infty(T)} = \mathrm{vraisup}_{z\in T}|f(z)| < \infty$, а $L_\infty(T)_+$ — підпростір істотно обмежених функцій на T, для яких коефіцієнти Фур'є з від'ємними індексами рівні 0, тобто $L_\infty(T)_+ = \{f \in L_\infty(T) : \widehat{f}(-k) = 0, k \in \mathbb{N}\}$.

Множину функцій $f \in L_\infty(T)_+$, для яких ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції $f^\psi \in L_\infty(T)_+$, позначимо через $L_\infty^\psi(T)_+$.

Зазначимо, що згідно з теоремою Голубєва–Привалова [1. с. 202] простір $L_\infty(T)_+$ є простором граничних значень аналітичних в D функцій f, що зображаються інтегралом Коші. Тому коефіцієнти Тейлора таких функцій співпадають з коефіцієнтами Фур'є їх граничних значень, тобто $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \widehat{f}(k), k = 0, 1, 2, \dots$.

У подальшому граничні значення функції $f \in H_\infty$ будемо позначати тим же символом $f(e^{it})$ і, крім того, зазначимо, що згідно з принципом максимуму модуля буде мати співвідношення $E_n(f)_{H_\infty} = E_n(f)_{L_\infty}$.

Покладемо

$$H_n^{\varphi}(f;z) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\varphi(|\rho_k(f;z)|) \text{ та } H_n^{\varphi}(f;\lambda;z) = \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(|\rho_k(f;z)|),$$

де $\varphi \in \Phi$, а $\lambda = \{\lambda_k\}$ — задана послідовність додатних чисел. У даній роботі в термінах найкращих наближень функції f^{ψ} вивчаються оцінки величин $H_n^{\varphi}(f;z)$ та $H_n^{\varphi}(f;\lambda;z)$ на множині аналітичних функцій H_{∞}^{ψ}.

Наведемо деякі відомі факти та результати, що передували нашим дослідженням.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину додатних, неперервних та опуклих при $v \geq 1$ функцій $\psi(v)$, що прямують до нуля на нескінченності, тобто

$$\mathfrak{M} = \Big\{\psi(v) : \psi(v) > 0, \lim_{v\to\infty}\psi(v) = 0,$$
$$\psi(v_1) - 2\psi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) + \psi(v_2) \leq 0, \forall v_1, v_2 \in [1,\infty)\Big\};$$

$\mathfrak{M}_0$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $0 < \mu(\psi,t) \leq K < \infty$, де $\mu(\psi,t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$ та $\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t)$. Зазначимо, що природними представниками множини $\mathfrak{M}$ є функції $t^{-r},\ \exp(-t^r),\ r > 0$; до множини $\mathfrak{M}_0$ належать, наприклад, такі функції: $\ln^{-r}(t+e),\ r > 0$.

У роботі [2] Р. А. Ласурія отримав оцінки величин $H_n^{\varphi}(f;z)$ і $H_n^{\varphi}(f;\lambda;z)$. А саме — справедливі наступні твердження:

Нехай $\varphi \in \Phi$, $\psi(k) \in \mathfrak{M}_0$. Тоді для довільної функції $f \in H_{\infty}^{\psi}$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедливі співвідношення

$$H_n^{\varphi}(f;z) \leq K\varphi(\psi(n)E_n(f^{\psi}))$$

та

$$H_n^{\varphi}(f;\lambda;z) \leq K\Big(n\lambda_n\varphi(\psi(n)E_n(f^{\psi})) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(\psi(k)E_k(f^{\psi}))\Big).$$

де $K = K(\varphi)$ — деяка величина рівномірно обмежена по n, z, f та $\lambda = \{\lambda_k(u)\}$ — незростаюча послідовність невід'ємних функцій, заданих на деякій множині U.

Тут та далі символом K будемо позначати деякі абсолютні сталі, можливо неоднакові в різних формулах.

Метою даної роботи є встановлення оцінок подібних до тих, що містяться у сформульованому вище твердженні, за слабших умов на послідовності $\psi(k)$.

Перед формулюванням основних результатів наведемо деякі означення та допоміжні твердження, що можливо мають і самостійний інтерес.

Нехай $\triangle\gamma_k = \gamma_k - \gamma_{k+1}$, $\triangle^2\gamma_k = \triangle\gamma_k - \triangle\gamma_{k+1}$, де $\{\gamma_k\}$ — деяка числова послідовність. Кажуть, що послідовність $\{\gamma_k\}$ є квазіопуклою, якщо

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\gamma_k| < \infty.$$

В роботі [3, c. 210] доведено таке твердження:

Лема 1. *Якщо послідовність комплексних чисел $\psi = \{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ є такою, що тригонометричний ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos kx$$

є рядом Фур'є деякої сумовної $2\pi-$періодичної функції $\Psi(x)$, то клас H_∞^ψ складається з аналітичних в D і неперервних в $\overline{D}$ функцій f, граничні значення яких на колі T зображаються у вигляді згортки

$$f(e^{i\theta}) = C + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(e^{it})\Psi(t-\theta)d\theta,$$

де $f^\psi \in L_\infty(T)_+$, $\|f^\psi\|_{L_\infty(T)} \le 1$ і C — деяка комплексна стала.

Наступна лема є поширенням на випадок квазіопуклих послідовностей $\{\psi\}$ результату Р.А. Ласурії [2, c. 700] (отриманого для опуклих послідовностей), який, в свою чергу, є узагальненням одного твердження В. Тотіка [4, теорема 4].

Лема 2. *Нехай $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, причому $\psi_i(k)$, $i = 1,2$ є квазіопуклими, спадними до нуля послідовностями, $n \le \ldots \le k_i < k_{i+1} \le \ldots \le 2n-1$, $1 \le i \le r$. Тоді для довільної функ-*

ції $f \in H^{\psi}_{\infty}$ *та будь-якого* $p > 0$ *справедлива нерівність*

$$h^p_{n,r}(f,z) := \sup_{z\in D}\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\rho_{k_j}(f;z)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le K_p R_n(\psi) E_n(f^{\psi}) \ln\frac{2n}{r}, \qquad (3)$$

де $R_n(\psi) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi(k)|$, K_p *— деяка абсолютна величина, що залежить лише від* p.

Доведення. Оскільки

$$\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\rho_{k_j}(f;z)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \nearrow$$

при $p \to \infty$ (див., наприклад, [5, с. 41]), то достатньо розглянути випадок $p \ge 2$.

Нехай $p_n(z)$ — поліном найкращого наближення порядку не вище n функції $f^{\psi}(z)$. Позначимо $\Delta_n(f,\theta,t) := \Delta_n(f^{\psi}, p_n, \theta, t) = f^{\psi}(e^{i(t+\theta)}) - p_n(e^{i(t+\theta)})$. Функція $h^p_{n,r}(f,z)$ є субгармонічною, тому за принципом максимуму модуля [6, с. 39] вона приймає максимальне значення на колі T. Отже, з леми 1 випливає співвідношення

$$h^p_{n,r}(f,z) = \sup_{z\in D}\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\rho_{k_j}(f;z)|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \mathrm{vraisup}_{\theta}\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_n(f,\theta,t)\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}\psi(\nu)\cos\nu t dt|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поклавши

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu t = \frac{\sin\,(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$F_k(t) = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k} D_\nu(t) = \frac{\sin^2 kt}{4(k+1)\sin^2\frac{t}{2}},$$

та двічі застосувавши до суми під інтегралом перетворення Абеля, отримаємо нерівність

$$h^p_{n,r}(f,z) \le$$

$$\le \operatorname{vraisup}_\theta \Bigg(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} |\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_n(f,\theta,t)\Big(\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}(\nu+1)\triangle^2\psi(\nu)F_\nu(t) -$$

$$-(k_j+1)\triangle\psi(k_j+1)F_{k_j}(t) - \psi(k_j+1)D_{k_j}(t)\Big)dt|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Враховуючи такі співвідношення

$$|a+b|^p \le 2^p(|a|^p + |b|^p), p \ge 1,$$

$$F_\nu(t) \ge 0, t \in [-\pi,\pi],$$

$$(n+1)|\triangle\psi(n+1)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi(k)|,$$

$$|\psi(n+1)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi(k)|,$$

$$D_k(t) = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = \cos\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin kt}{2\sin\frac{t}{2}} + \frac{\cos kt}{2},$$

отримаємо

$$h^p_{n,r}(f,z) \le \operatorname{vraisup}_\theta \Bigg(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} |\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+K_p R_n(\psi)E_n(f^\psi) \le$$

$$\le \operatorname{vraisup}_\theta \Bigg(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} |\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{|t|\le\frac{\pi}{k_j}} \Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\mathrm{vraisup}_\theta\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k_j}\le|t|\le\frac{\pi}{r}}\Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\mathrm{vraisup}_\theta\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{r}\le|t|\le\pi}\Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+K_pR_n(\psi)E_n(f^\psi)=$$

$$=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+K_pR_n(\psi)E_n(f^\psi).$$

Оцінимо кожен із доданків

$$\Sigma_1=\mathrm{vraisup}_\theta\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{|t|\le\frac{\pi}{k_j}}\Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le K_p\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\psi(k_j+1)|^pE_n(f^\psi)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le K_pE_n(f^\psi)\max_j|\psi(k_j+1)|\le$$

$$\le K_pR_n(\psi)E_n(f^\psi).$$

$$\Sigma_2=\mathrm{vraisup}_\theta\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k_j}\le|t|\le\frac{\pi}{r}}\Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le K_p\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\Big(\frac{|\psi(k_j+1)|E_n(f^\psi)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k_j}\le|t|\le\frac{\pi}{r}}\frac{1}{t}dt\Big)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le K_pR_n(\psi)\ln\frac{2n}{r}E_n(f^\psi).$$

Для оцінки Σ_3 розглянемо функцію

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\frac{\Delta_n(f,\theta,t)}{2\sin\frac{t}{2}} & \text{при } \frac{\pi}{r}\le|t|\le\pi,\\ 0 & \text{при інших значеннях } t,\end{cases}$$

косинус-коефіцієнти Фур'є цієї функції позначимо через $\alpha_k = \alpha_k(\varphi_n)$. Оскільки $1 < q \le 2$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то можемо використати теорему Хаусдорфа–Юнга [7, с. 153], згідно з якою

$$\Sigma_3 = \text{vraisup}_\theta \left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \Big| \frac{\psi(k_j+1)}{\pi} \int_{\frac{\pi}{r} \le |t| \le \pi} \Delta_n(f,\theta,t) \frac{\sin k_j t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \text{vraisup}_\theta \left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} |\psi(k_j+1)\alpha_{k_j}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \max_j |\psi(k_j+1)| \text{vraisup}_\theta \left(\frac{1}{r} \sum_{\nu} |\alpha_{k_j}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le K_p \max_j |\psi(k_j+1)| r^{-1/p} \|\varphi\|_q \le$$

$$\le K_p R_n(\psi) r^{-1/p} \left(\int_{\frac{\pi}{r} \le |t| \le \pi} \frac{|\Delta_n(f,\theta,t)|^q}{t^q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le K_p R_n(\psi) r^{-1/p} r^{-1/p} r^{1/q-1} E_n(f^\psi) \le K_p R_n(\psi) E_n(f^\psi).$$

Об'єднавши оцінки для Σ_1, Σ_2 та Σ_3 отримаємо нерівність (3).

Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай $\varphi \in \Phi$, $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, причому $\psi_i(k)$, $i = 1, 2$ є квазіопуклими, спадними до нуля послідовностями. Тоді для довільної функції $f \in H^\psi_\infty$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність*

$$H^\varphi_n(f; z) \le K \varphi(R_n(\psi) E_n(f^\psi)),$$

де $K = K(\varphi)$ — деяка величина, рівномірно обмежена по n, z та f.

Доведення. Діємо за схемою роботи [8]. Покладемо

$$B_{n,\alpha}(z) = \{k \in [n, 2n-1] :$$

$$(\alpha - 1) R_n(\psi) E_n(f^\psi) \le |\rho_k(f,z)| \le \alpha R_n(\psi) E_n(f^\psi), \alpha \in \mathbb{N}\},$$

$\mu_{n,\alpha}(z)$ — кількість всіх елементів множини $B_{n,\alpha}(z)$. Враховуючи, що коли $B_{n,\alpha}(z) = \emptyset$, то й $\Sigma_{B_{n,\alpha}(z)} = 0$, отримаємо

$$H_n^{\varphi}(f;z) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\varphi(|\rho_k(f;z)|) = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{k\in B_{n,\alpha}(z)}\varphi(|\rho_k(f;z)|) \le$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\varphi(\alpha R_n(\psi)E_n(f^{\psi}))\mu_{n,\alpha}(z).$$

Оцінимо величину $\mu_{n,\alpha}(z)$ в тому випадку, коли вона додатна, для цього використаємо співвідношення (3), в якому покладемо $r = \mu_{n,\alpha}(z)$, $q = 1$. Отримаємо

$$\mu_{n,\alpha}(z) \le n e^{1-\alpha/K_p},$$

де K_p — величина із співвідношення (3).

Використавши нерівність (див. [8, с.108])

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\varphi(\alpha u)e^{-\alpha/K_p} \le K\varphi(u) \text{ для довільного } u \in \left(0, \frac{1}{2aK_p}\right)$$

та враховуючи, що n є таким, для якого має місце $R_n(\psi)E_n(f^{\psi})) \in \left(0, \frac{1}{2aK_p}\right)$, отримаємо

$$H_n^{\varphi}(f;z) \le \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\varphi(\alpha R_n(\psi)E_n(f^{\psi}))\mu_{n,\alpha}(z) \le$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\varphi(\alpha R_n(\psi)E_n(f^{\psi}))ne^{1-\alpha/K_p} \le$$

$$\le K\sum_{\alpha=1}^{\infty}\varphi(\alpha R_n(\psi)E_n(f^{\psi}))e^{-\alpha/K_p} \le K\varphi(R_n(\psi)E_n(f^{\psi})).$$

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай $\varphi \in \Phi$, $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, причому $\psi_i(k)$, $i = 1, 2$ є квазіопуклими спадними до нуля послідовностями, $\lambda = \{\lambda_k\}$ — незростаюча послідовність додатних чисел. Тоді* *для довільної функції $f \in H^{\psi}_{\infty}$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність*

$$H^{\varphi}_{n}(f;\lambda;z) \le K\Big(n\lambda_n\varphi(R_n(\psi)E_n(f^{\psi})) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(R_k(\psi)E_k(f^{\psi}))\Big),$$

де $K = K(\varphi)$ — деяка величина, рівномірно обмежена по n, z та f.

Доведення. Покладемо $n_0 = n$, $n_1 = 2n_0, \ldots, n_i = 2n_{i-1}, \ldots$ Тоді

$$H^{\varphi}_{n}(f;\lambda;z) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1}\lambda_k\varphi(|\rho_k(f;z)|) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{n_i}\frac{n_i}{n_i}\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1}\varphi(|\rho_k(f;z)|).$$

Для оцінки останнього виразу застосуємо теорему 1 і отримаємо

$$H^{\varphi}_{n}(f;\lambda;z) \le K\sum_{i=0}^{\infty}n_i\lambda_{n_i}\varphi(R_{n_i}(\psi)E_{n_i}(f^{\psi})) \le$$

$$\le K\Big(n\lambda_n\varphi(R_n(\psi)E_n(f^{\psi})) + \sum_{i=1}^{\infty}n_i\lambda_{n_i}\varphi(R_{n_i}(\psi)E_{n_i}(f^{\psi}))\Big).$$

За умовами теореми справджується наступна нерівність

$$\lambda_k\varphi(R_k(\psi)E_k(f^{\psi})) \le \lambda_m\varphi(R_m(\psi)E_m(f^{\psi})) \text{ при } k \ge m,$$

тому для $n_{i-1} \le k \le 2n_{i-1} - 1 < n_i$ буде

$$\lambda_{n_i}\varphi(R_{n_i}(\psi)E_{n_i}(f^{\psi})) \le \lambda_k\varphi(R_k(\psi)E_k(f^{\psi})),$$

а значить

$$\lambda_{n_i}\varphi(R_{n_i}(\psi)E_{n_i}(f^{\psi})) \le \frac{1}{n_{i-1}}\sum_{k=n_{i-1}}^{2n_{i-1}-1}\lambda_k\varphi(R_k(\psi)E_k(f^{\psi})),$$

тоді

$$H_n^{\varphi}(f;\lambda;z) \leq K\Big(n\lambda_n\varphi(R_n(\psi)E_n(f^{\psi})) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(R_k(\psi)E_k(f^{\psi}))\Big).$$

Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай* $f \in H_{\infty}^{\psi}$ *та* $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, *причому* $\psi_i(k)$, $i = 1, 2$ *є квазіопуклими спадними до нуля послідовностями, тоді має місце співвідношення*

$$\sum_{k=0}^{n}|\rho_k(f;z)|^p \leq K_p\sum_{k=0}^{n}E_k^p(f^{\psi}).$$

Дане твердження випливає з теореми 2, якщо взяти $\varphi(u) = |u|^p$ та покласти $n = 0$ і задати послідовність λ_k так

$$\lambda_k = \lambda_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{при } k \in [0, n], \\ 0, & \text{при } k \geq n+1. \end{cases}$$

1. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. — 336 с.
2. *Ласурия Р. А.* Оценки группы φ-отклонений и сильная суммируемость рядов Тейлора функций классов $A^{\psi}H_{\infty}(D)$ // Мат. заметки. — **83**, № 5. — 2008. — С. 696 -– 704.
3. *Савчук В. В., Савчук М. В., Чайченко С. О.* Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена // Мат. студії. — **34**, № 2. — 2010. — С. 207 – 219.
4. *Totik V.* On the strong approximation of Fourier series // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — **35**, № 1-2 — 1980. — P. 151 -– 172.
5. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ, 1948. — 456 с.
6. *Привалов И. И.* Субгармонические функции. — М.: ОНТИ, 1937. — 201 с.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1965. — Т.2. — 537 с.
8. *Totik V.* Notes on Fourier series: strong approximation. // J. of Approx. Theory. — **43**, № 2. — 1985. — P. 105 – 111.