Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т. 12, № 4, 235-252

УДК 517.5

А. С. Романюк (Ін–т математики НАН України, Київ)

ЕНТРОПІЙНІ ЧИСЛА І КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ НІКОЛЬСЬКОГО–БЄСОВА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ L_∞

We establish the order estimates of entropy numbers and Kolmogorov widths of Nikol'skii–Besov classes of periodic functions of two variables in the space L_∞.

Встановлено порядкові оцінки ентропійних чисел і колмогоровських поперечників класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій двох змінних у просторі L_∞.

1. Вступ. Основна мета роботи полягає у встановленні точних за порядком оцінок ентропійних чисел і колмогоровських поперечників класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій двох змінних у просторі L_∞. Відповідні апроксимативні характеристики будуть означені нижче, а спочатку наведемо необхідні позначення і сформулюємо допоміжні твердження, які будуть використовуватися при доведенні отриманих результатів.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$; $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0, 2\pi]$ — множина функцій $f(x)$, 2π-періодичних по кожній змінній і таких, що

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \ \ 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = ess \sup_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

В подальших міркуваннях будемо розглядати тільки ті функції $f \in L_p(\pi_d)$, для яких виконана умова

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx_j = 0,\ j = \overline{1,d},$$

множину таких функцій будемо позначати $L_p^0(\pi_d)$.

Для функції $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, розглянемо різницю першого порядку по j-ій змінній з кроком $h \in \mathbb{R}$:

$$\triangle_{h,j} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1},\ x_j + h,\ x_{j+1}, \ldots, x_d) - f(x)$$

і означимо різницю l-го порядку

$$\triangle_{h,j}^l f(x) = \overbrace{\triangle_{h,j} \cdots \triangle_{h,j}}^{l} f(x)$$

в точці x_j з кроком $h \in \mathbb{R}$.

Далі, якщо $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $\quad k_j \in \mathbb{N},\ j = \overline{1,d}$, то мішана різниця порядку k з векторним кроком $h = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{R}^d$ означається наступним чином:

$$\triangle_h^k f(x) = \triangle_{h_1,1}^{k_1} \cdots \triangle_{h_d,d}^{k_d} f(x).$$

Нехай задані вектор $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $\ r_j > 0,\ j = \overline{1,d}$, і параметри $1 \le p, \theta \le \infty$. Тоді функція $f \in L_p^0(\pi_d)$ належить класу $B_{p,\theta}^r$, якщо

$$\left(\int_{\pi_d} \| \triangle_h^k f(\cdot) \|_p^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{1/\theta} \le 1,\ \ 1 \le \theta < \infty,$$

і

$$\sup_h \| \triangle_h^k f(\cdot) \|_p \prod_{j=1}^d h_j^{-r_j} \le 1,\ \ \theta = \infty.$$

При цьому вважаємо, що для векторів $k = (k_1, \ldots, k_d)$ і $r = (r_1, \ldots, r_d)$ виконана умова $k_j > r_j,\ j = \overline{1,d}$. Нагадаємо, що класи $B_{p,\theta}^r$ є аналогами класів функцій, які були введені О. В. Бєсовим [1] і при $\theta = \infty$ $\ B_{p,\infty}^r = H_p^r$, де H_p^r — аналоги класів, введених С. М. Нікольським (див., наприклад, [2, с. 189]). З більш детальною інформацією про класи $B_{p,\theta}^r$ можна ознайомитися у роботах [3, 4].

При проведенні подальших міркувань нам буде зручно користуватися означенням класів $B^r_{p,\theta}$ в дещо іншій формі.

Для векторів $s=(s_1,\dots,s_d)$, $s_j\in\mathbb{N}$, $k=(k_1,\dots,k_d)$, $k_j\in\mathbb{Z}$, $j=\overline{1,d}$, покладемо

$$\rho(s)=\{k=(k_1,\dots,k_d): 2^{s_j-1}\le|k_j|<2^{s_j},\ j=\overline{1,d}\}$$

і для $f\in L^0_p(\pi_d)$ введемо позначення

$$\delta_s(f,x)=\sum_{k\in\rho(s)}\widehat{f}(k)e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k)=\int\limits_{\pi_d}f(t)e^{-i(k,t)}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Нехай $1<p<\infty$, $r=(r_1,\dots,r_d)$, $r_j>0$, $j=\overline{1,d}$. Тоді, з точністю до абсолютних сталих, класи $B^r_{p,\theta}$ можна означити наступним чином (див., наприклад, [3,4]):

$$B^r_{p,\theta}=\{f:\ \|f\|_{B^r_{p,\theta}}=\left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d}2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\le1\},\ 1\le\theta<\infty,$$

$$B^r_{p,\infty}=\{f:\ \|f\|_{B^r_{p,\infty}}=\sup_{s\in\mathbb{N}^d}2^{(s,r)}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\le1\}.$$

Зазначимо, що при певній видозміні "блоків" $\delta_s(f,x)$, наведене означення класів $B^r_{p,\theta}$ можна поширити і на крайні значення $p=1$ і $p=\infty$ (див., наприклад, [4, зауваження 2.1]).

Нехай $V_l(t)$, $l\in\mathbb{N}$, позначає ядро Валле-Пуссена виду

$$V_l(t)=1+2\sum_{k=1}^{l}\cos kt+2\sum_{k=l+1}^{2l-1}(1-\frac{k-l}{l})\cos kt.$$

Співставимо кожному вектору $s=(s_1,\dots,s_d)$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,d}$, поліном

$$A_s(x)=\prod_{j=1}^{d}(V_{2^{s_j}}(x_j)-V_{2^{s_j-1}}(x_j))$$

і для $f \in L_p^0(\pi_d),\ 1 \le p \le \infty$, покладемо

$$A_s(f,x) = (f * A_s)(x),$$

де " $*$ " означає операцію згортки. Тоді при $1 \le p \le \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d),\ r_j > 0,\ j = \overline{1,d}$, з точністю до абсолютних сталих, класи $B^r_{p,\theta}$ можна означити наступним чином:

$$B^r_{p,\theta} = \{f:\ \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,\cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1\},\ 1 \le \theta < \infty,$$

$$B^r_{p,\infty} = \{f:\ \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{(s,r)} \|A_s(f,\cdot)\|_p \le 1\}.$$

Для зручності нагадаємо також означення класів $W^r_{p,\alpha}$, про які буде йти мова в коментарях до одержаних результатів.

Нехай $F_r(x,\alpha)$ — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_r(x,\alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}),\ r_j > 0,\ \alpha_j \in \mathbb{R},$$

і сумування відбувається по тих $k = (k_1, \dots, k_d)$, для яких $k_j > 0,\ j = \overline{1,d}$. Тоді через $W^r_{p,\alpha}$ позначимо клас функцій f, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x,\alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x-y,\alpha) dy,$$

$$\varphi \in L_p(\pi_d),\ \|\varphi\|_p \le 1.$$

Надалі будемо вважати, що координати векторів $r = (r_1, \dots, r_d)$, які містяться в означенні класів функцій, впорядковані наступним чином: $0 < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \dots \le r_d$. Вектору $r = (r_1, \dots, r_d)$ співставимо вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d),\ \gamma_j = \frac{r_j}{r_1},\ j = \overline{1,d}$, якому, в свою чергу, співставляється вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, де $\gamma_j = \gamma'_j$ при $j = \overline{1,\nu}$ і $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$.

Одержані результати будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. Для функцій $\mu_1(N)$ і $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконані порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ і $\mu_1 \gg \mu_2$. Зазначимо, що всі сталі $C_i, i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати тільки від тих параметрів, які містяться в означенні класів, метрики і розмірності простору $\mathbb{R}^d$. В деяких випадках ця залежність буде вказуватися в явному вигляді. Якщо $\mathfrak{M}$ — деяка скінченна множина, то через $|\mathfrak{M}|$ будемо позначати кількість її елементів.

Тепер означимо асимптотичні характеристики, які будемо досліджувати.

Нехай $\mathscr{X}$ банахів простір і $B_{\mathscr{X}}(y, r)$ — куля $\mathscr{X}$ радіуса r з центром у точці y, тобто

$$B_{\mathscr{X}}(y, r) = \{x \in \mathscr{X} \,:\, \|x - y\| \leq r\}.$$

Для компактної множини $\mathscr{A}$ і $\varepsilon > 0$ означимо число

$$N_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X}) = \min\{\, n : \exists y^1, \ldots, y^n \in \mathscr{X} \,:\, \mathscr{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{\mathscr{X}}(y^j, \varepsilon)\}.$$

Тоді величина (див., наприклад, [5,6])

$$H_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X}) = \log\, N_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X})$$

називається ε-ентропією множини $\mathcal{A}$ відносно банахового простору $\mathscr{X}$ (тут і далі $\log := \log_2$).

З ε-ентропією множини $\mathscr{A}$ тісно пов'язано поняття його ентропійних чисел $\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X})$ (див., наприклад, [7]):

$$\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X}) = \inf\{\, \varepsilon : \exists y^1, \ldots, y^{2^k} \in \mathscr{X} \,:\, \mathscr{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathscr{X}}(y^j, \varepsilon)\}.$$

Безпосередньо з означень величин $H_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X})$ і $\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X})$ маємо: якщо $H_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \leq k$, то $\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \leq \varepsilon$; і навпаки — з оцінки $\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \leq \varepsilon$ випливає оцінка $H_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X}) \leq k$. Ці співвідношення дають можливість із оцінок для ентропійних чисел $\varepsilon_k(\mathscr{A}, \mathscr{X})$ отримувати відповідні оцінки для ε-ентропії $H_\varepsilon(\mathscr{A}, \mathscr{X})$.

Дослідження ε-ентропії і близьких до неї асимптотичних характеристик (ε-ємність, ентропійні числа і т.п.) мають багату історію, з якою можна ознайомитися, наприклад, у роботі [8], де наведена детальна бібліографія.

Нагадаємо означення ще однієї апроксимативної характеристики, пов'язаної певним чином з ентропійними числами і яка буде досліджуватися в даній роботі.

Нехай Φ — центрально-симетрична множина нормованого простору $\mathscr{X}$ і L_M — підпростір розмірності M простору $\mathscr{X}$. Тоді величина

$$d_M(\Phi, \mathscr{X}) = \inf_{L_M} \sup_{f \in \Phi} \inf_{u \in L_M} \|f - u\|_{\mathscr{X}},$$

називається M-мірним колмогоровським поперечником множини Φ у просторі $\mathscr{X}$. Поперечник $d_M(\Phi, \mathscr{X})$ був введений в 1936 році А.М. Колмогоровим [9] і до теперішнього часу задачі, які пов'язані з оцінками колмогоровських поперечників різного роду функціональних класів знаходяться в полі зору великої кількості математиків. Зазначимо, що з результатами дослідження колмогоровських поперечників класів $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p і $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних можна ознайомитися в монографіях [10—12].

Перед тим як перейти безпосередньо до формулювання і доведення одержаних результатів введемо ще декілька позначень і сформулюємо необхідні допоміжні твердження.

Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$Q_n^\gamma = \bigcup_{(s,\gamma) \le n} \rho(s), \ Q_n^{\gamma'} = \bigcup_{(s,\gamma') \le n} \rho(s), \ \triangle Q_n^{\gamma'} = Q_n^{\gamma'} \backslash Q_{n-1}^{\gamma'}$$

і

$$\mathfrak{N}_n^{\gamma'} = \{s = (s_1, \ldots, s_d), \ n - 1 < (s, \gamma') \le n, \ n \ge d\}.$$

Зазначимо, що $|\triangle Q_n^{\gamma'}| \asymp 2^n n^{\nu - 1}$.

Через $S_{Q_n^\gamma}(f, \cdot)$ позначимо східчасту гіперболічну суму Фур'є функції $f \in L_1(\pi_d)$ виду

$$S_{Q_n^\gamma}(f, \cdot) = \sum_{(s,\gamma) \le n} \delta_s(f, \cdot).$$

Мають місце наступні твердження.

Теорема A [13]. *Нехай* $1 \le p < \infty,\ 1 \le \theta < \infty,\ r_1 > \frac{1}{p}$. *Тоді*

$$\sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \|f(\cdot) - S_{Q^\gamma_n}(f,\cdot)\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p})}\, n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Зауважимо, що такий же порядок наближення класів $B^r_{p,\theta}$ реалізують і суми Фур'є $S_{Q^{\gamma'}_n}(f,\cdot)$.

Лема A [10, с. 11]. *Справедлива оцінка*

$$\sum_{(s,\gamma')\ge l} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^{-\alpha\, l} l^{\nu-1},\ \alpha > 0.$$

Наступне твердження є наслідком однієї нерівності Б. Карла (див., наприклад, [14]).

Лема Б [15, 16]. *Нехай A — компакт в сепарабельному банаховому просторі $\mathscr{X}$. Допустимо, що для пари чисел (a,b), де* $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $b < 0$, *виконані співвідношення*

$$d_m(\mathscr{A},\mathscr{X}) \ll m^{-a}(\log m)^b,$$

$$\varepsilon_m(\mathscr{A},\mathscr{X}) \gg m^{-a}(\log m)^b.$$

Тоді

$$\varepsilon_m(\mathscr{A},\mathscr{X}) \asymp d_m(\mathscr{A},\mathscr{X}) \asymp m^{-a}(\log m)^b.$$

Нехай $\mathscr{X}$ — простір $\mathbb{R}^N$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$. Як зазвичай позначимо B^N_2 і S^{N-1} відповідно одиничну кулю в $\mathbb{R}^N$ і її межу. Нехай також $\sigma = \sigma_N$ — нормована міра Лебега на S^{N-1}. Наступна величина відіграє важливу роль в отриманні оцінок ε-ентропії і поперечників Колмогорова (див. детальніше [17]):

$$M_{\mathscr{X}} = \int\limits_{S^{N-1}} \|f\|_{\mathscr{X}}\, d\sigma.$$

Справедливе твердження (див. [15]).

Лема B. *Має місце оцінка*

$$\varepsilon_M(B^N_2,\mathscr{X}) \ll \begin{cases} (\frac{N}{m})^{\frac{1}{2}}\, M_{\mathscr{X}},\ m \le N, \\ e^{-\frac{m}{N}}\, M_{\mathscr{X}},\ m > N. \end{cases} \qquad (1)$$

Скориставшись (1), одержимо відповідні оцінки у просторі $\mathscr{X} = L_\infty$ для одиничних куль, які є тригонометричними поліномами спеціального виду. З цією метою для довільної множини $G \subset \mathbb{Z}^d$ через $T(G)$ позначимо множину тригонометричних поліномів t виду

$$t(x) = \sum_{k \in G} c_k \, e^{i(k,x)}, \ x \in \pi_d.$$

У випадку коли множина G симетрична відносно початку координат, $(G = -G)$ покладемо

$$T_R(G) = \{t \in T(G) : \ c_k = \bar{c}_{-k}, \, k \in G\}$$

і через $T(\triangle Q_n^{\gamma'})_q$ позначимо одиничну L_q-кулю у просторі $T(\triangle Q_n^{\gamma'})$, тобто

$$T(\triangle Q_n^{\gamma'})_q = \{t \in T(\triangle Q_n^{\gamma'}) : \ \|t\|_q \le 1\}.$$

Лема Г. *Справедлива оцінка*

$$\varepsilon_m(T(\triangle Q_n^{\gamma'})_2, \, L_\infty) \ll \begin{cases} (|\triangle Q_n^{\gamma'}| m^{-1})^{\frac{1}{2}} \, n^{\frac{1}{2}}, \ m \le |\triangle Q_n^{\gamma'}|, \\ 2^{-|\triangle Q_n^{\gamma'}|^{-1} m} \, n^{\frac{1}{2}}, \ m > |\triangle Q_n^{\gamma'}|. \end{cases} \tag{2}$$

Доведення. Розглянемо множину $T_R(\triangle Q_n^{\gamma'})$ поліномів з $T(\triangle Q_n^{\gamma'})$ з дійсними коефіцієнтами. Тоді $T_R(\triangle Q_n^{\gamma'})_2$ можна розглядати як евклідову кулю в $\mathbb{R}^N$, $N = |\triangle Q_n^{\gamma'})|/2$. Легко бачити, що оцінки (2) достатньо довести для $T_R(\triangle Q_n^{\gamma'})_2$.

Нехай $\mathscr{X}_q^G$ — банахів простір тригонометричних поліномів $t \in T_R(G)$ зі звичайною L_q-нормою і $deg\, t$ — степінь полінома t. (Нагадаємо, що під степенем тригонометричного полінома будемо розуміти найбільший із степенів $e^{i(k,x)}$ які містяться в ньому, а $deg\, e^{i(k,x)} = |k_1| + \ldots + |k_d|$).

Далі скористаємося оцінкою, одержаною у [18]:

$$M_{\mathscr{X}_q^G} \ll \begin{cases} \sqrt{q}, \quad\ 1 < q < \infty, \\ \sqrt{\log \, deg\, t}, \ \ q = \infty. \end{cases}$$

Таким чином, оскільки для $t \in T_R(\triangle Q_n^{\gamma'})$ має місце співвідношення $\log deg\, t \ll n$, то, приймаючи до уваги вище сказане, в силу леми В приходимо до шуканих оцінок (2).

Лема доведена.

2. Основні результати. Спочатку отримаємо оцінку зверху величини $\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$ для всіх розмірностей $d \geq 2$.

Теорема 1. *Нехай* $2 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ *і* $r_1 > \frac{1}{2}$. *Тоді при* $d \geq 2$ *має місце оцінка*

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) \ll M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} \sqrt{\log M}, \qquad (3)$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. Оскільки $B^r_{p,\theta} \subset B^r_{2,\theta}$, $2 < p < \infty$, то оцінку (3) достатньо встановити при $p = 2$.

Нехай $f \in B^r_{2,\theta}$, $1 \leq \theta \leq 2$. Тоді згідно з нерівністю

$$\left(\sum_{l=1}^{\infty} {a_l}^{\mu_2}\right)^{1/\mu_2} \leq \left(\sum_{l=1}^{\infty} {a_l}^{\mu_1}\right)^{1/\mu_1}, \ a_l \geq 0, \ 1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 < \infty,$$

(див. [19], c. 43]) можемо записати

$$\|\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \delta_s(f,\cdot)\|_2 = \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-n\,r_1}\left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-n\,r_1}\|f\|_{B^r_{2,\theta}} \leq 2^{-n\,r_1}. \qquad (4)$$

Нехай тепер $\theta \in (2,\infty)$. У такому випадку, скориставшись нерівністю Гельдера з показником $\frac{\theta}{2}$ і лемою A, будемо мати

$$\|\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \delta_s(f,\cdot)\|_2 = \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \|\delta_s(f,\cdot)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_2^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{s\in\mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{-2(s,r)\theta/(\theta-2)}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^r_{2,\theta}} \left(\sum_{s \in \mathfrak{N}_n^{\gamma'}} 2^{-2(s,r)\theta/(\theta-2)} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-n\, r_1}\, n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \qquad (5)$$

Таким чином, згідно з (4) і (5) для $f \in B^r_{2,\theta},\ 1 \le \theta < \infty$, маємо

$$\| \sum_{s \in \mathfrak{N}_n^{\gamma'}} \delta_s(f,\cdot)\|_2 \ll 2^{-n\, r_1}\, n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \qquad (6)$$

Далі виберемо $m \in \mathbb{N}$ таким, щоб виконувалися нерівності $|Q^{\gamma'}_{m-1}| < M \le |Q^{\gamma'}_m|$. Тоді, прийнявши до уваги співвідношення $|Q^{\gamma'}_m| \asymp |Q^{\gamma'}_{m-1}| \asymp 2^m\, m^{\nu-1}$, будемо мати $M \asymp 2^m\, m^{\nu-1}$.

Покладемо $\beta = \frac{1}{2}\min\{(r_1 - \frac{1}{2}),\ \frac{1}{2}\}$ і

$$\overline{M}_n = \begin{cases} C_\beta\, M\, 2^{-\frac{1}{2}(m-n)}, & n < m, \\ C_\beta\, M\, 2^{-\beta(n-m)}, & n \ge m, \end{cases}$$

де $C_\beta > 0$ підібрано так, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n \le M.$$

Зауважимо, що таке $C_\beta > 0$ існує, оскільки

$$\sum_{n=1}^{m-1} M\, 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} + \sum_{n=m}^{\infty} M\, 2^{-\beta(n-m)} \ll M.$$

Позначимо $M_n = [\,\overline{M}_n\,]$, де $[\,a\,]$ — ціла частина числа a. Тоді $M_n = 0$, якщо $C_\beta\, M\, 2^{-\beta(n-m)} < 1$, тобто при $n > m_1 = m + \beta^{-1}\log C_\beta\, M$. Покладемо

$$S_{\triangle\, Q^{\gamma'}_n}(B^r_{2,\theta}) = \{g :\ g(x) = \sum_{k \in \triangle\, Q^{\gamma'}_n} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},\ f \in B^r_{2,\theta}\}$$

і

$$\|S_{\triangle\, Q^{\gamma'}_n}(B^r_{2,\theta})\|_\infty = \sup_{g \in S_{\triangle\, Q^{\gamma'}_n}(B^r_{2,\theta})} \|g(\cdot)\|_\infty. \qquad (7)$$

У прийнятих позначеннях можемо записати

$$\varepsilon_M(B^r_{2,\theta}, L_\infty) \le \sum_{n\le m_1} \varepsilon_{M_n}(S_{\triangle\, Q^{\gamma'}_n}(B^r_{2,\theta}), L_\infty) +$$

$$+ \sum_{n>m_1} \|S_{\triangle\, Q^{\gamma'}_n}(B^r_{2,\theta})\|_\infty = I_1 + I_2. \tag{8}$$

Оцінимо спочатку доданок I_2. Для $f \in B^r_{2,\theta}$ згідно з теоремою A (див. коментар) будемо мати

$$\|S_{\triangle\, Q\gamma'_n}(f,\cdot)\|_\infty = \|S_{Q^{\gamma'}_n}(f,\cdot) - S_{Q^{\gamma'}_{n-1}}(f,\cdot) + f(\cdot) - f(\cdot)\|_\infty \le$$

$$\le \|f(\cdot) - S_{Q^{\gamma'}_n}(f,\cdot)\|_\infty + \|f(\cdot) - S_{Q^{\gamma'}_{n-1}}(f,\cdot)\|_\infty \ll$$

$$\ll 2^{-n(r_1-\frac{1}{2})}\; n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{9}$$

Як наслідок з (9) знаходимо

$$\|S_{\triangle\, Q^{\gamma'}_n}(B^r_{2,\theta})\|_\infty \ll 2^{-n(r_1-\frac{1}{2})}\; n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{10}$$

Таким чином, скориставшись оцінкою (10), одержимо

$$I_2 = \sum_{n>m_1} \|S_{\triangle\, Q^{\gamma'}_n}(B^r_{2,\theta})\|_\infty \ll \sum_{n>m_1} 2^{-n(r_1-\frac{1}{2})}\; n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})} \ll$$

$$\ll 2^{-m_1(r_1-\frac{1}{2})}\, m_1^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})} = J_1. \tag{11}$$

Для того, щоб продовжити оцінку J_1, розглянемо два випадки.

Нехай спочатку $r_1 \ge 1$. У такому випадку $\beta = \frac{1}{4}$ і відповідно $m_1 = m + \log{(C_\beta M)^4}$. Тоді для величини J_1 отримаємо оцінку

$$J_1 = 2^{-m(r_1-\frac{1}{2})}(C_\beta M)^{-4(r_1-\frac{1}{2})}(m + \log(C_\beta M)^4)^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp 2^{-m(r_1-\frac{1}{2})} 2^{-4(r_1-\frac{1}{2})m}\, m^{-4(\nu-1)(r_1-\frac{1}{2})}\, m^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})} \ll$$

$$\ll 2^{-m\, r_1}\, m^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{12}$$

Нехай тепер виконана умова $\frac{1}{2} < r_1 < 1$. Тоді $\beta = \frac{1}{2}(r_1 - \frac{1}{2})$ і відповідно $m_1 = m + \log(C_\beta M)^{\frac{4}{2r_1-1}}$. У такому випадку величина J_1 допускає оцінку

$$J_1 = 2^{-m(r_1-\frac{1}{2})}(C_\beta M)^{-2}(m + \log(C_\beta M)^{\frac{4}{2r_1-1}})^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp 2^{-m(r_1-\frac{1}{2})} 2^{-2\,m}\, m^{-2(\nu-1)}\, m^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})} \ll 2^{-m\,r_1}\, m^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \quad (13)$$

Таким чином, прийнявши до уваги (12) і (13), з (11) будемо мати

$$I_2 \ll 2^{-m\,r_1}\, m^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \quad (14)$$

Перейдемо до оцінки величини I_1. З цією метою подамо її у вигляді двох доданків

$$I_1 = \sum_{n\le m} \varepsilon_{M_n}(S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}), L_\infty) +$$

$$+ \sum_{m<n\le m_1} \varepsilon_{M_n}(S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}), L_\infty). \quad (15)$$

Для оцінки першого доданку, скориставшись лемою Г і співвідношенням (6), будемо мати

$$\sum_{n\le m} \varepsilon_{M_n}(S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}), L_\infty) \ll$$

$$\ll \sum_{n\le m} 2^{-n\,r_1}\, n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\, \varepsilon_{M_n}(T(Q_n^{\gamma'})_2,\, L_\infty) \ll$$

$$\ll \sum_{n\le m} 2^{-n\,r_1}\, n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} 2^{-C_\beta M\, 2^{-\frac{1}{2}(m-n)}|Q_n^{\gamma'}|^{-1}}\, n^{\frac{1}{2}} = J_2. \quad (16)$$

Врахувавши співвідношення $|Q_n^{\gamma'}| \asymp 2^n\, n^{\nu-1}$ і $M \asymp 2^m\, m^{\nu-1}$, легко переконатися, що величина J_2 допускає оцінку:

$$J_2 \ll 2^{-m\,r_1}\, m^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\, m^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Для того, щоб оцінити другий доданок правої частини (15), також скористаємося лемою Г і співвідношенням (6). Виконавши елементарні перетворення, будемо мати

$$\sum_{m<n\le m_1} \varepsilon_{M_n}(S_{\triangle\, Q_n^{\gamma'}}(B^r_{2,\theta}), L_\infty) \ll$$

$$\ll \sum_{m<n\le m_1} 2^{-n\,r_1}\, n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\, \varepsilon_{M_n}(T(Q_n^{\gamma'})_2,\, L_\infty) \ll$$

$$\ll \sum_{m<n\le m_1} 2^{-nr_1}\, n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\, |Q_n^{\gamma'}|^{\frac{1}{2}}\, M^{-\frac{1}{2}}\, 2^{\beta(n-m)}\, n^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-r_1\,m}\, m^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\, m^{\frac{1}{2}}. \qquad (18)$$

Таким чином, з урахуванням (15) - (18) отримуємо

$$I_1 \ll 2^{-m\,r_1}\, m^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\, m^{\frac{1}{2}}. \qquad (19)$$

Накінець, підставивши (14) і (19) в (9) і прийнявши до уваги, що $M \asymp 2^m\, m^{\nu-1}$, приходимо до шуканої оцінки величини $\varepsilon_M(B^r_{2,\theta}, L_\infty)$:

$$\varepsilon_M(B^r_{2,\theta}, L_\infty) \ll 2^{-m\,r_1}\, m^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\, m^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\sqrt{\log M}.$$

Теорема доведена.

У наступному твердженні з використанням оцінки (3) встановимо точну за порядком оцінку величини $\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$ у двовимірному випадку ($d=2$) для деяких співвідношень між параметрами p та θ. Перш ніж перейти до формулювання і доведення відповідного результату наведемо необхідні для цього позначення.

Нехай $N_\varepsilon(F, \mathscr{X})$ — максимальна кількість замкнутих куль радіуса ε простору $\mathscr{X}$, необхідних для покриття (компактного) множини F, а $M_\varepsilon(F, \mathscr{X})$ — максимальне число точок $x_i \in F$ таких, що $\|x_i - x_j\|_{\mathscr{X}} > \varepsilon,\ i \neq j$. Тоді як добре відомо (див., наприклад, [5]) справедливі нерівності

$$N_\varepsilon(F, \mathscr{X}) \le M_\varepsilon(F, \mathscr{X}) \le N_{\frac{\varepsilon}{2}}(F, \mathscr{X}). \qquad (20)$$

Нехай далі

$$Y_n = \{s = (2\,n_1, 2\,n_2),\ n_1 + n_2 = \frac{n}{2}\}$$

і

$$\mathscr{D}_n = \bigcup_{s \in Y_n} \rho(s).$$

Зауважимо, що для кількості елементів множин $\mathscr{D}_n$ справедливі співвідношення $|\mathscr{D}_n| \asymp 2^n\,n$. Також будемо вважати, що вектор r, який присутній в означенні класу $B^r_{p,\theta}$, має вигляд $r = (r_1,\, r_1),\ r_1 > 0$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $2 \le p \le \infty,\ 2 \le \theta < \infty$ *і* $r_1 > \frac{1}{2}$. *Тоді при* $d = 2$ *справедливе співвідношення*

$$\varepsilon_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) \asymp M^{-r_1}(\log\, M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{21}$$

Доведення. Оцінка зверху слідує з теореми 1 при $\nu = 2$, і тому перейдемо до встановлення в (21) оцінки знизу. При цьому зазначимо, що, оскільки має місце вкладення $B^r_{\infty,\theta} \subset B^r_{p,\theta},\ 1 \le p \le \infty$, то шукану оцінку достатньо встановити для величини $\varepsilon_M(B^r_{\infty,\theta}, L_\infty)$. З цією метою скористаємося набором функцій $\{f_i^n\}_{i=1}^{A_n},\ A_n \ge 2^{\frac{|\mathscr{D}_n|}{2}}$, які були побудовані В. Н. Темляковим [20] при встановленні ним оцінок знизу ентропійних чисел класів H^r_∞. В цей набір входять функції $f_i^n \in T(\mathscr{D}_n),\ i = \overline{1, A_n}$, які володіють наступними властивостями:

1) $\|\delta_s(f_i^n, \cdot)\|_\infty \le 1,\ i = \overline{1, A_n},\ s \in Y_n$;

2) $\|f_i^n - f_j^n\|_\infty \ge Cn,\ i \ne j,\ C > 0$ – деяка абсолютна стала;

3) $A_n \ge 2^{\frac{|\mathscr{D}_n|}{2}}$.

В [20] зазначається, що умова 1) забезпечує належність кожної функції з набору $\{C_1(r_1)\,2^{-r_1\,n} f_i^n\}_{i=1}^{A_n}$ до класу H^r_∞. Прийнявши до уваги цю обставину, неважко переконатися, що кожна функція з набору $\{C_2(r_1, \theta)\,2^{-r_1\,n} n^{-\frac{1}{\theta}} f_i^n\}_{i=1}^{A_n}$ з відповідною сталою $C_2(r_1, \theta)$ належить класу $B^r_{\infty,\theta}$.

Дійсно, нехай для $i \in [\,1,\, A_n\,],\ i \in \mathbb{N}$,

$$g_i^n(x) = C_1(r_1) 2^{-r_1\,n} f_i^n(x).$$

Оскільки $g_i^n \in H_\infty^r$, то (див. [10, с. 32]) $\forall s \in Y_n$ будемо мати:

$$\|A_s(g_i^n)\|_\infty \ll 2^{-r_1 n}. \qquad (22)$$

Тому, скориставшись (22), можемо записати:

$$\|g_i^n\|_{B_{\infty,\theta}^r} \asymp \left(\sum_{s \in Y_n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(g_i^n)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s \in Y_n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{\frac{1}{\theta}}.$$

Звідси слідує, що кожна функція з набору $\{C_2(r,\theta)\, 2^{-r_1 n} n^{-\frac{1}{\theta}} f_i^n\}_{i=1}^{A_n}$ з відповідною сталою $C_2(r,\theta)$ належить класу $B_{\infty,\theta}^r$.

Таким чином, згідно з (20) і наведеними вище для функцій f_i^n властивостями 2), 3), приходимо до шуканої оцінки знизу величини $\varepsilon_M(B_{\infty,\theta}^r, L_\infty)$:

$$\varepsilon_M(B_{\infty,\theta}^r, L_\infty) \gg 2^{-n\, r_1}\, n^{-\frac{1}{\theta}+1} \asymp M^{-r_1} (\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Оцінка знизу і разом з нею теорема доведені.

Тепер, скориставшись оцінкою (21), встановимо у двовимірному випадку порядок колмогоровського поперечника класів $B_{p,\theta}^r$ у просторі L_∞.

Теорема 3. *Нехай* $2 \le p \le \infty$, $2 \le \theta < \infty$ *і* $r_1 > \frac{1}{2}$. *Тоді при* $d = 2$ *справедлива оцінка*

$$d_M(B_{p,\theta}^r, L_\infty) \asymp M^{-r_1} (\log\, M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \qquad (23)$$

Доведення. Для доведення (23) скористаємося лемою Г. З одного боку, згідно з (21) маємо

$$\varepsilon_M(B_{p,\theta}^r, L_\infty) \gg M^{-r_1} (\log\, M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}, \qquad (24)$$

а з іншого — справедлива оцінка (див. [12, с. 247]):

$$d_M(B_{p,\theta}^r, L_\infty) \ll M^{-r_1} (\log\, M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}} \qquad (25)$$

Тому згідно з лемою Г з (24) і (25) отримуємо (23).

Теорема доведена.

***Зауваження* 1.** При $p=\infty$ порядок поперечника $d_M(B^r_{\infty,\theta}, L_\infty)$ реалізується підпростором тригонометричних поліномів з номерами гармонік зі східчастого гіперболічного хреста (див. [12], теорема 1.6.4). Для інших значень параметра $2 \le p < \infty$ питання про оптимальний підпростір для $d_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$ залишається відкритим.

На завершення роботи наведемо результат, який стосується одновимірного випадку.

Теорема 4. *Нехай* $2 \le p \le \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$ *і* $1 \le \theta \le \infty$. *Тоді при* $d=1$ *має місце оцінка*

$$\varepsilon_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp M^{-r_1}.$$

Доведення. Скориставшись оцінками

$$d_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_\infty) \ll M^{-r_1}$$

(див. [12, с. 255]), і

$$\varepsilon_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_\infty) \gg M^{-r_1}$$

(теорема 1 при $d=1$) і застосувавши лему Г, отримуємо

$$\varepsilon_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp M^{-r_1}.$$

Теорема доведена.

***Зауваження* 2.** Аналоги теорем 1-3 для класів $W^r_{p,\alpha}$ і H^r_p одержано у роботах [15, 18, 20, 21], де можна ознайомитися з детальною історією питання і відповідними коментарями.

1. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. — 1959. — **126**, № 6. — С. 1163 – 1165.

2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.

3. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j=1,\ldots,n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1965. — **77**. — С. 5 – 34.

4. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143 – 161.
5. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. — 1959. — **14**, № 2. — С. 3 – 86.
6. *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. — М.: Физматгиз, 1959. — 228 с.
7. *Höllig K.* Diameters of classes of smooth functions // Quantitative approximation. N.Y.: Acad. Press. — 1980. — P. 163 – 176.
8. *Романюк А. С.* Оценки энтропийных чисел и ε-энтропии классов Никольского-Бесова периодических функций многих переменных // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 3. — С. 196–213.
9. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annäherung von Functionen einer gegeben Functionenclasse // Ann. Math. — 1936. — **37**. — P. 107 – 111.
10. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1 – 112.
11. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 419 p.
12. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін–ту математики НАН України. — 2012. — **93**. — 352 с.
13. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. — 2004. — **195**, № 2. — С. 91 – 116.
14. *Carl B.* Entropy numbers, s-numbers, and eigenvalue problems // J. Funct. Anal. — 1981. — **41**. — P. 290 – 306.
15. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об оценке аппроксимативных характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Мат. заметки. — 1995. — **58**, № 6. — С. 922 – 925.
16. *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths // East J. Approx. — 1996. — **2**, № 1. — P. 89 – 98.
17. *Pajor A., Tomczak-Jaegermann N.* Subspaces of small codimension of finite-dimensional Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1986. — **97**, № 4. — P. 637 – 642.
18. *Belinskií E. S.* Estimates of Entropy Numbers and Gaussian Measures for Classes of Functions with Bounded Mixed Derivative // J. of Approx. Theory. — 1998. — **93**. — P. 114 – 127.

19. *Харди Г., Литтлвуд И. Е., Пойа Дж.* Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.

20. *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the entropy numbers // J. Complexity. — 1995. — **11.** — P. 293 – 307.

21. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L^1 // Матем. заметки. — 1994. — **56**, № 5. — С. 57 – 86.