Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 273-284

УДК 517.51

Р. Р. Салимов (Ин–т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КЛАССОВ ОРЛИЧА-СОБОЛЕВА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

The paper is devoted to the study of the behavior at infinity of homeomorphisms with finite distortion in the Orlicz-Sobolev classes $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ with a condition of the Calderon type on φ and, in particular, in the classes $W^{1,p}_{\rm loc}$ with $p>n-1$.

В статье исследуется асимптотическое поведение на бесконечности гомеоморфизмов с конечным искажением классов Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ при условии типа Кальдерона на функцию φ и, в частности, классов Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p>n-1$.

1. Введение. Напомним некоторые определения. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Говорят, что гомеоморфизм $f: D\to\mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n\leqslant K(x)\cdot J_f(x) \tag{1}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x)\geqslant 1$, где $f'(x)$ якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ – её операторная норма: $\|f'(x)\| = \sup\limits_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$ и $J_f(x)=\det f'(x)$ – якобиан отображения f. В дальнейшем, полагаем

$$K_I(x,f)=\begin{cases} \frac{J(x,f)}{l^n(f'(x))}, & \text{если } J(x,f)\neq 0\\ 1, & \text{если } f'(x)=0\\ \infty, & \text{в остальных точках}\,. \end{cases} \tag{2}$$

где $l(f'(x))=\min\limits_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$.

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f\in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [1], (см. также [2]).

В настоящей статье для отображений с конечным искажением получен аналог известной теоремы Мартио-Рикмана-Вяйсяля о порядке роста квазирегулярных отображений, (см. [3, теорема 3.7]). Ряд результатов в этом направлении ранее был получен для кольцевых Q-отображений в работах [4], [5].

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом L^{φ} пространство всех функций $f : D \to \mathbb{R}$, таких, что

$$\int\limits_{D} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dm(x) < \infty \tag{3}$$

при некотором $\lambda > 0$, (см., напр., [6]). Здесь m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пространство L^{φ} называется *пространством Орлича.*

Классом Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщёнными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D. Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D, мы пишем $f \in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc} \subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Как обычно, мы пишем $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geqslant 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т.е., если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D, (см., напр., [7, разд. 1.1.3.]).

Далее, если f — локально интегрируемая вектор–функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, m$, и

$$\int\limits_{D} \varphi\left(|\nabla f(x)|\right) dm(x) < \infty\,, \tag{4}$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы снова пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0) = 0$.

Отметим, что классы Орлича–Соболева сейчас, как и ранее, изучаются в самых различных аспектах многими авторами, (см., напр., [8–25]).

2. Предварительные сведения. Напомним некоторые определения. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \geqslant 1 \tag{5}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Тогда *модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\, dm(x) \tag{6}$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Следуя работе [26], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $G = A \setminus C$ – кольцо, т.е., если G – область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus G$ состоит в точности из двух компонент. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в fD. Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Функция $u : A \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на прямой*, имеющей непустое пересечение с A, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в A. Функция $u : A \to \mathbb{R}$ принадлежит классу ACL (*абсолютно непрерывна на почти всех прямых*), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем, $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2)

$u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL. Также обозначим

$$|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}. \tag{7}$$

Величину

$$\operatorname{cap} \mathcal{E} = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^n \, dm(x) \tag{8}$$

называют *ёмкостью* конденсатора $\mathcal{E}$.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. $E, F \subseteq D$ – произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F; D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

В дальнейшем мы будем использовать равенство

$$\operatorname{cap} \mathcal{E} = M(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \tag{9}$$

см. [27, теорема 1].

Известно, что

$$\operatorname{cap} \mathcal{E} \geqslant n^n \Omega_n \ln^{1-n} \left[\frac{m(A)}{m(C)}\right] \tag{10}$$

где Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, (см., напр., [28, неравенство (8.9)]).

Напомним следующие термины. Пусть $d_0 = \operatorname{dist}(\mathrm{x}_0, \partial \mathrm{D})$ и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Положим

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}, \tag{11}$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0 \in D$*, если соотношение

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2, fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|) \, dm(x) \tag{13}$$

выполнено для любого кольца $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\ dr\ \geqslant\ 1\,. \tag{14}$$

Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в области D*, если условие (13) выполнено для всех точек $x_0 \in D$.

Следующее утверждение можно найти в работе [16, теорема 2.2].

Теорема 1. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ – неубывающая функция, такая, что для некоторого $t_* \in (0, \infty)$*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty\ . \tag{15}$$

Если $K_I(x, f) \in L^1_{\rm loc}(D)$, тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом с $Q(x) = K_I(x, f)$.

3. Поведение на бесконечности. Пусть r_0 – произвольное фиксированное положительное число и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Для гомеоморфизма $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ полагаем

$$L(x_0, f, R) = \sup\limits_{|x - x_0| = R} |f(x) - f(x_0)|\,. \tag{16}$$

Лемма 2. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ — гомеоморфизм конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (15). Если $K_I(x, f) \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, тогда*

$$M\ (\Delta\,(fS_1, fS_2, f\mathbb{A}))\ \ \leqslant \Lambda(R)\,, \tag{17}$$

где $S_1 = S(x_0, r_0)$, $S_1 = S(x_0, R)$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_0, R)$ и

$$\Lambda(R) = \left(\int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\, dt\right)^{-n} \cdot \int\limits_{\mathbb{A}} K_I(x, f)\, \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{18}$$

для любой измеримой (по Лебегу) функции $\psi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *такой, что*

$$0 < \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\,dt < \infty \qquad \forall R > r_0\,. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_0, R)$ с $0 < r_0 < R$. Рассмотрим измеримую функцию

$$\eta(t) \;=\; \begin{cases} \frac{\psi(t)}{\int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\,dt}, & t \in (r_0, R) \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_0, R). \end{cases} \tag{20}$$

Отметим, что функция $\eta(t)$ удовлетворяет условию (14). Тогда из теоремы 1 вытекает оценка (17).

Лемма 3. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ *— гомеоморфизм конечного искажения класса* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ *с условием (15). Если* $K_I(x,f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *тогда*

$$\liminf_{R\to\infty} L(x_0, R, f) \exp\left[-\left(\frac{\omega_{n-1}}{\Lambda(R)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \right] > 0\,, \tag{21}$$

где ω_{n-1} *– площадь единичной сферы* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$, $S_1 = S(x_0, r_0)$, $S_1 = S(x_0, R)$ *и*

$$\Lambda(R) = \left(\int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\,dt \right)^{-n} \cdot \int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} K_I(x,f)\,\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{22}$$

для любой измеримой (по Лебегу) функции $\psi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *такой, что*

$$0 < \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\,dt < \infty \qquad \forall R > r_0\,. \tag{23}$$

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_0, R)$ с $0 < r_0 < R$. Тогда $\left(fB\,(x_0, R)\,, \overline{fB\,(x_0, r_0)} \right)$ —

кольцевой конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и, согласно (9), имеем равенство

$$\operatorname{cap}\ \left(fB(x_0,R),\overline{fB(x_0,r_0)}\right)=M(\triangle(\partial fB(x_0,R),\partial fB(x_0,r_0);f\mathbb{A}))$$

а ввиду гомеоморфности f, равенство

$$\triangle\left(\partial fB\left(x_0,R\right),\partial fB\left(x_0,r_0\right);f\mathbb{A}\right)=f\left(\triangle\left(\partial B(x_0,R),\partial B(x_0,r_0);\mathbb{A}\right)\right).$$

В силу леммы 2 имеем

$$\operatorname{cap}\ \left(fB(x_0,R),\overline{fB(x_0,r_0)}\right)\leqslant\Lambda(R)\ . \tag{24}$$

С другой стороны, в силу неравенства (10) вытекает оценка

$$\operatorname{cap}\ \left(fB(x_0,R),\overline{fB(x_0,r_0)}\right)\geqslant n^n\Omega_n\ln^{1-n}\left[\frac{m\left(fB(x_0,R)\right)}{m\left(\overline{fB(x_0,r_0)}\right)}\right]\ , \tag{25}$$

где Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Комбинируя (24) и (25), получаем, что

$$m\left(\overline{fB(x_0,r_0)}\right)\leqslant m\left(fB(x_0,R)\right)\exp\left[-n\left(\frac{\omega_{n-1}}{\Lambda(R)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]. \tag{26}$$

Заметим, что $m\left(fB(x_0,R)\right)\leqslant\Omega_nL^n(x_0,R,f)$, поэтому из неравенства (26) вытекает следующая оценка

$$\sqrt[n]{\frac{m\left(\overline{fB(x_0,r_0)}\ \right)}{\Omega_n}}\leqslant L(x_0,R,f)\exp\left(-\frac{\omega_{n-1}}{\Lambda(R)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\ . \tag{27}$$

Очевидно, $M=\sqrt[n]{\frac{m\left(\overline{fB(x_0,r_0)}\ \right)}{\Omega_n}}>0$ и не зависит от R. Переходя к нижнему пределу при $R\to\infty$, получаем (21).

Лемма 4. *Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, — гомеоморфизм конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием (15) и $K_I(x,f)\in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. Если для $p<n$*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)}K_I(x,f)\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x)\leqslant c\cdot I^p(R)\qquad\forall R>r_0\,, \tag{28}$$

где $\psi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ *– неотрицательная измеримая (по Лебегу) функция такая, что*

$$0 < I(R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\, dt < \infty \qquad \forall R > r_0\,, \tag{29}$$

то

$$\liminf_{R\to\infty} L(x_0, R, f) \exp\left[-\alpha\, I^{\frac{n-p}{n-1}}(R)\right] > 0\,, \tag{30}$$

где $\alpha = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Доказательство. Ввиду условия (28) получаем

$$\Lambda(R) = \frac{\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} K_I(x,f)\, \psi^n(|x-x_0|)\, dm(x)}{\left(\int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)\, dt\right)^n} \leqslant cI^{p-n}(R)\,. \tag{31}$$

Отсюда следует, что

$$\exp\left[-\left(\frac{\omega_{n-1}}{\Lambda(R)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right] \leqslant \exp\left[-\left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}} I^{\frac{n-p}{n-1}}(R)\right]. \tag{32}$$

Таким образом, заключение леммы 4 вытекает из леммы 3.

В дальнейшем, для целых $k \geqslant 0$ полагаем

$$e_0 = 1, \quad e_1 = e, \quad e_2 = e^e, \ \ldots, \ e_{k+1} = \exp e_k \tag{33}$$

и

$$\ln_0 t = t, \quad \ln_1 t = \ln t, \quad \ln_2 t = \ln\ln t, \ \ldots, \ \ln_{k+1} t = \ln\ln_k t\,. \tag{34}$$

Лемма 5. *При* $R > e_N$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_{e_N}^{R} \frac{dt}{\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k t} = \ln_{N+1} R\,. \tag{35}$$

Доказательство. Действительно, выполнив замену переменной $s = \ln_N t$, получим заявленное утверждение:

$$\int\limits_{e_N}^{R} \frac{dt}{\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k t} = \int\limits_{1}^{\ln_N R} \frac{ds}{s} = \ln\ln_N R = \ln_{N+1} R\,. \tag{36}$$

Выбирая в лемме 4 $\psi(t) = \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k t}$, $r_0 = e_N$ и $p = 1$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, — гомеоморфизм конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием* (15) *и $K_I(x,f) \in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. Если*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,e_N,R)} \frac{K_I(x,f)\,dm(x)}{\left(\prod\limits_{k=0}^{N} \ln_k|x-x_0|\right)^n} \leqslant c\cdot\ln_{N+1}(R) \qquad \forall R > e_N\,, \tag{37}$$

то

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0,R,f)}{\ln_N^{\gamma}(R)} > 0\,, \tag{38}$$

где $\gamma = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Выбирая в теореме 2 $N = 0$, приходим к следующему следствию.

Следствие 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, — гомеоморфизм конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием* (15) *и $K_I(x,f) \in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. Если*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,1,R)} \frac{K_I(x,f)\,dm(x)}{|x-x_0|^n} \leqslant c\cdot\ln R \qquad \forall R > 1\,, \tag{39}$$

то

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0,R,f)}{R^{\gamma}} > 0\,, \tag{40}$$

где $\gamma = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

***Следствие* 2.** *Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, — гомеоморфизм конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ с условием* (15). *Если*

$$\frac{1}{\omega_{n-1}R^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,R)}K_I(x,f)\,d\mathcal{A}\leqslant\kappa_I(x_0)\qquad\forall R>1\,,\tag{41}$$

то

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,R,f)}{R^{\alpha}}>0\,,\tag{42}$$

где $\alpha=\kappa_I^{\frac{1}{1-n}}(x_0)$ и $d\mathcal{A}$ – элемент площади поверхности.

Замечание. В частности, если $K_I(x,f)\leqslant K, K\in[1,\infty)$, из следствия 2 следует известный результат О. Мартио, С. Рикмана и Ю. Вяйсяля [3, теорема 3.7]:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}}>0\,,\tag{43}$$

где $\alpha=K^{\frac{1}{1-n}}$.

1. *Iwaniec T., Sverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – **118**. – P. 181–188.
2. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis. — Clarendon Press, Oxford, 2001.
3. *Martio O., Rickman, S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., **465**, (1970), 1–13.
4. *Салимов Р. Р., Смоловая Е. С.* О порядке роста кольцевых Q-гомеоморфизмов на бесконечности // Укр. мат. журн. - 2010. - **62**, № 6. - С. 829-836.
5. *Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Аналоги леммы Икома–Шварца и теоремы Лиувилля для отображений с неограниченной характеристикой // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 10. – С. 1368–1380.
6. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.:физматгиз, 1958.
7. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. — Л.: ЛГУ, 1985. – 416 с.
8. *Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Об отображениях в классах Орлича-–Соболева на римановых многообразиях // Укр. мат. вiсник. – 2011. – **8**, № 3. – С. 319—342.

9. *Alberico A., Cianchi A.* Differentiability properties of Orlicz-Sobolev functions // Ark. Mat. – 2005. – **43**. – P. 1–28.

10. *Calderon A. P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. Math. Univ. Parma. – 1951. – **2**. – C. 203–213.

11. *Cianchi A.* A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J. – 1996. – **45**, № 1. – P. 39–65.

12. *Donaldson T.* Nonlinear elliptic boundary-value problems in Orlicz-Sobolev spaces // J. Diff. Eq. – 1971. – **10**. – P. 507–528.

13. *Gossez J. P., Mustonen V.* Variational inequalities in Orlicz-Sobolev spaces // Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. – 1987. – **11**. – P. 379–392.

14. *Hsini M.* Existence of solutions to a semilinear elliptic system through generalized Orlicz–Sobolev spaces // J. Partial Differ. Equ. — 2010. — **23**, № 2. – P. 168–193.

15. *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Compactness // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2002. – **27**, № 2. – P. 391–417.

16. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* New modulus estimates in Orlicz-Sobolev classes // Ann. Univ. Buchar. Math. Ser., **5 (LXIII)** (2014), 131–135

17. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* К теории классов Орлича–Соболева // Алгебра и анализ. — 2013. — **25**, № 6. — С. 1–53

18. *Koronel J. D.* Continuity and k-th order differentiability in Orlicz-Sobolev spaces: $W^k L_A$" // Israel J. Math. – 1976. – **24**, № 2. – P. 119–138.

19. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* On functions with derivatives in a Lorentz space // Manuscripta Math. – 1999. – **10**. – P. 87–101.

20. *Khruslov E. Ya., Pankratov L. S.* Homogenization of the Dirichlet variational problems in Sobolev-Orlicz spaces. – Operator theory and its applications (Winuipeg, MB, 1998), 345-366, Fields Inst. Commun., 25, Amer. Math. Soc,. Providence, RI, 2000.

21. *Landes R., Mustonen V.* Pseudo-monotone mappings in Sobolev-Orlicz spaces and nonlinear boundary value problems on unbounded domains // J. Math. Anal. Appl. – 1982. – **88**. – P. 25–36.

22. *Lappalainen V., Lehtonen A.* Embedding of Orlicz-Sobolev spaces in Hölder spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1989. — **14**, № 1. — P. 41–46.

23. *Onninen J.* Differentiability of monotone Sobolev functions // Real. Anal. Exchange. – 2000/2001. – **26**, № 2. – P. 761–772.

24. *Tuominen H.* Characterization of Orlicz-Sobolev space // Ark. Mat. – 2007. – **45**, № 1. – P. 123–139.

25. *Vuillermot P. A.* Hölder-regularity for the solutions of strongly nonlinear eigenvalue problems on Orlicz-Sobolev space // Houston J. Math. – 1987. – **13**. – P. 281–287.

26. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – **448**. – P. 1–40.

27. *Шлык В. А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн. — 1993. — **34**, № 6. — С. 216–221.

28. *Maz'ya V.* Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math. – 2003. – **338**, P. 307—340.

29. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics. – Springer, New York etc., 2009. – 367 p.