

УДК 517.54

А. К. Бахтин, И. Я. Дворак, И. В. Денега (Институт математики НАН Украины, Киев)

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ВНУТРЕННИХ РАДИУСОВ ВЗАИМНО НЕПЕРЕСИКАЮЩИХСЯ ОБЛАСТЕЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Paper is devoted to extremal problems of geometric function theory of complex variable associated with estimates of functionals defined on systems of non-overlapping domains.

Работа посвящена исследованию экстремальных задач геометрической теории функций комплексного переменного, связанных с оценками функционалов, заданных на системах непересекающихся областей.

В настоящее время задачи об экстремальном разбиении занимают значительное место в геометрической теории функций комплексного переменного и имеют богатую историю (см., например, [1–14]). Многие задачи такого плана сводятся к определению максимума произведения внутренних радиусов на системах попарно неналегающих областей, удовлетворяющих определенным условиям. Подробнее с историей данного вопроса можно ознакомиться в работах [1–14].

Пусть \mathbb{N} , \mathbb{R} – множество натуральных и вещественных чисел соответственно, \mathbb{C} – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [5, 7, 8]).

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Систему точек $A_n := \{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1, n}\}$ назовем *n-лучевой*, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}$,

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Обозначим при этом $P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$. Данная работа базируется на применении кусочно-разделяющего преобразования, развитого в работах [4, 5, 8].

© А. К. Бахтин, И. Я. Дворак, И. В. Денега, 2015

Рассмотрим задачу: показать, что максимум функционала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k), \quad (1)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — n -лучевая система точек, расположенная на единичной окружности, $B_0, B_\infty, \{B_k\}_{k=1}^n$ — совокупность неналегающих областей, $a_k \in B_k, k = \overline{0, n}, a_0 = 0, \infty \in B_\infty$, достигается для некоторой конфигурации из областей B_k, B_∞ и точек $a_k, k = \overline{0, n}$, которые имеют n -кратную симметрию.

При $\gamma = \frac{1}{2}$ и $n \geq 2$ оценка для функционала (1) для систем непересекающихся областей была впервые получена в работе [4]. В работе [6] результат [4] был усилен. Задача об оценке функционала (1) при начальных значениях натурального параметра n также рассматривалась в статьях [13, 14]. В данной работе получены оценки функционала (1) при $n \in \{2, 3\}$ на более широком, нежели в работах [6, 13, 14], интервале значений параметра γ .

Теорема 1. Пусть $0 < \gamma \leq \gamma_2, \gamma_2 = 0,71$. Тогда для любой 2-лучевой системы точек $A_2 = \{a_k\}_{k=1}^2$ такой, что $|a_k| = 1, k \in \{1, 2\}$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_1, B_2, B_∞ ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}, a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}, a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$), справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leq \\ & \leq [r(\Lambda_0, 0) r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma r(\Lambda_1, \lambda_1) r(\Lambda_2, \lambda_2), \end{aligned}$$

где области $\Lambda_0, \Lambda_\infty, \Lambda_1, \Lambda_2$ и точки $0, \infty, \lambda_1, \lambda_2$ — круговые области и соответственно полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^4 + (4 - 2\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2 - 1)^2} dw^2.$$

Теорема 2. Пусть $0 < \gamma \leq \gamma_3, \gamma_3 = 1,38$. Тогда для любой 3-лучевой системы точек $A_3 = \{a_k\}_{k=1}^3$ такой, что $|a_k| = 1, k \in \{1, 2, 3\}$ и любого набора взаимно непересекающихся областей $B_0, B_1, B_2, B_3, B_\infty$ ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}, a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$k = \overline{1, 3}$), справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \\ & \leq [r(\Lambda_0, 0) r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^3 r(\Lambda_k, \lambda_k), \end{aligned}$$

где области $\Lambda_0, \Lambda_\infty, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ и точки $0, \infty, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – круговые области и соответственно полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + (9 - 2\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3 - 1)^2} dw^2.$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство основано на применении разделяющего преобразования (см., например, [4, с. 48; 5, с. 27 – 30; 8, с. 120 – 124; 7, с. 87 – 92]). Аналогично [7, с. 261], рассмотрим систему функций $\zeta = \pi_k(w) = -i(e^{-i\theta_k w})^{\frac{1}{\alpha_k}}, k \in \{1, 2\}$. Пусть $\Omega_k^{(1)}, k \in \{1, 2\}$, обозначает область плоскости ζ , полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \cap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)}, k \in \{1, 2\}$, обозначаем область плоскости \mathbb{C}_ζ , полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \cap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1} := B_1, \pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости \mathbb{C}_ζ , полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \cap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. Семейство $\{\Omega_k^{(\infty)}\}_{k=1}^2$ является результатом разделяющего преобразования произвольной области B_∞ относительно семейств $\{P_k\}_{k=1}^2$ и $\{\pi_k\}_{k=1}^2$ в точке $\zeta = \infty$. $\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}, \pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}, k \in \{1, 2\}, \pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}$. Из определения функций π_k вытекает, что

$$|\pi_k(w) + i| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_k|, \quad w \rightarrow a_k, \quad w \in \overline{P}_k,$$

$$|\pi_k(w) - i| \sim \frac{1}{\alpha_k} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \rightarrow a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \rightarrow 0, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \rightarrow \infty, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Используя соответствующие результаты работ [4, с. 54; 5, с. 29], имеем неравенства

$$r(B_k, a_k) \leq \left[(\alpha_k \cdot \alpha_{k-1}) r(\Omega_k^{(1)}, -i) r(\Omega_{k-1}^{(2)}, i) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

$$k = 1, 2, \quad \Omega_0^{(2)} := \Omega_n^{(2)}, \quad \omega_0^{(2)} := \omega_n^{(2)},$$

$$r(B_0, 0) \leq \left[\prod_{k=1}^2 r^{\alpha_k^2}(\Omega_k^{(0)}, 0) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

$$r(B_\infty, \infty) \leq \left[\prod_{k=1}^2 r^{\alpha_k^2}(\Omega_k^{(\infty)}, \infty) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

На основании соотношений (2) – (4) получаем неравенство

$$\begin{aligned} J_2(\gamma) &\leq \prod_{k=1}^2 \left(r(\Omega_k^{(0)}, 0) r(\Omega_k^{(\infty)}, \infty) \right)^{\frac{\gamma \alpha_k^2}{2}} \times \\ &\times \left(\alpha_k^2 \cdot r(\Omega_k^{(1)}, -i) \cdot r(\Omega_k^{(2)}, i) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Далее, аналогично работам [7, с. 262; 9, с. 871], из последнего соотношения имеем

$$\begin{aligned} J_2(\gamma) &\leq 4 \left(\prod_{k=1}^2 \alpha_k \right) \times \\ &\times \prod_{k=1}^2 \left\{ \left(r(\Omega_k^{(0)}, 0) r(\Omega_k^{(\infty)}, \infty) \right)^{\gamma \alpha_k^2} \cdot \frac{r(\Omega_k^{(1)}, -i) r(\Omega_k^{(2)}, i)}{4} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Каждое выражение, стоящее в фигурных скобках последнего неравенства, является значением функционала

$$K_\tau = [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^{\tau^2} \cdot \frac{r(B_1, a_1) r(B_2, a_2)}{|a_1 - a_2|^2} \quad (5)$$

на системе неналегающих областей $\{\Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, \Omega_k^{(\infty)}\}$, и соответствующей системе точек $\{0, -i, i, \infty\}$ ($k \in \{1, 2\}$). На основании теоремы 4.1.1 [7, с. 167] и инвариантности функционала (5) получаем оценку

$$K_\tau \leq \Phi(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

где $\Phi(\tau) = \tau^{2\tau^2} \cdot |1 - \tau|^{-(1-\tau)^2} \cdot (1 + \tau)^{-(1+\tau)^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} J_2(\gamma) &\leq 4 \cdot \left(\prod_{k=1}^2 \alpha_k \right) \left[\prod_{k=1}^2 \Phi(\tau_k) \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{4}{\gamma} \cdot \left[\prod_{k=1}^2 \left(\tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1 - \tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1 + \tau_k)^{-(1+\tau_k)^2} \right) \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

где $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k = \overline{1, 2}$. Рассмотрим подробнее функцию

$$\Psi(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1 - x|^{-(1-x)^2} \cdot (1 + x)^{-(1+x)^2}.$$

$\Psi(x)$ – логарифмически выпуклая на промежутке $[0, x_0]$, где $x_0 \approx 0,88441$, $\Psi(x_0) = 0,07002$. На промежутке $(0, x_1]$ ($x_1 \approx 0,58142$ – точка максимума функции $\Psi(x)$, $\Psi(x_1) \approx 0,08674$) функция возрастает от значения $\Psi(0) = 0$ до $\Psi(x_1)$, и убывает на промежутке (x_1, ∞) . Далее мы используем метод, предложенный в работе [12]. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^2 \Psi(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^2 x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}.$$

Пусть $F(x) = \ln(\Psi(x))$ и $\{x_k^{(0)}\}_{k=1}^2$ – произвольный экстремальный набор точек выше указанной задачи. Следуя работе [12] непосредственно получаем

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}), \quad k, j = \overline{1, 2}, \quad (6)$$

$$F'(x) = 4x \ln x - 2(x-1) \ln |1-x| - 2(x+1) \ln(x+1) + \frac{2}{x}.$$

Легко показать, что функция $F'(x)$ убывает на интервале $(0, x_0]$ и возрастает на (x_0, ∞) . На основании соотношения (6) проводим доказательство нашей теоремы. Положим $\Phi(x) = F'(x) = t$, $y_0 \leq t \leq 0$, $y_0 \approx -1,06$. Найдем решение уравнения $\Phi(x) = t_k$, $k = \overline{1, 11}$, где t_k пробегает множество $t_1 = -0,1; t_2 = -0,2; t_3 = -0,3; t_4 = -0,4; t_5 = -0,5; t_6 = -0,6; t_7 = -0,7; t_8 = -0,8; t_9 = -0,9; t_{10} = -1; t_{11} = y_0$. Из свойств функции $F'(x)$ следует, что уравнение $\Phi(x) = t_k$ имеет два решения, первое из которых $x_1(t_k) \in (0, x_0]$, а второе $x_2(t_k) \in [x_0, \infty)$. Непосредственные вычисления приводят нас к следующей таблице значений функции $F'(x)$.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$	$2x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$
1	-0,1	0,595614	1,588941		
2	-0,2	0,610729	1,310498	1,906112	2,501726
3	-0,3	0,626917	1,184045	1,794774	2,405503
4	-0,4	0,644375	1,110153	1,737070	2,363987
5	-0,5	0,663378	1,062338	1,706713	2,351088
6	-0,6	0,684325	1,030184	1,693562	2,356940
7	-0,7	0,707842	1,008999	1,693324	2,377640
8	-0,8	0,735017	0,997389	1,705231	2,413073
9	-0,9	0,768137	0,979982	1,714999	2,450016
10	-1	0,814378	0,947119	1,715256	2,483393
11	-1,06	0,884406	0,884406	1,698784	2,513162

Рассмотрим теперь $x_1(t) + x_2(t)$, $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $k = \overline{1, 10}$. Из свойств функции $F'(x)$ справедливо следующее неравенство

$$x_1(t) + x_2(t) > x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = \overline{1, 10}.$$

Используя выше указанную таблицу, получаем $x_1(t) + x_2(t) > 1,693324$ для всех $t \in (0, y_0]$. То есть, $x_1(t) + x_2(t) > 2\sqrt{\gamma_2} = 1,685229$, $t \in (0, y_0]$. Далее, аналогично рассуждениям работы [12] имеем, что для экстремального набора $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\}$ возможен только случай, когда $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \in (0, x_0]$ и, следовательно, $x_1^{(0)} = x_2^{(0)}$. Для всех $\gamma < \gamma_2$ все предыдущие рассуждения сохраняются. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 повторяет рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, с учетом некоторых особенностей в случае $n = 3$. А именно, на заключительном этапе доказательства теоремы 2 рассмотрев серию решений уравнения $\Phi(x) = t_k$, $k = \overline{1, 11}$ на промежутке $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $k = \overline{1, 10}$, получаем следующую цепочку неравенств

$$2x_1(t) + x_2(t) > 2x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) \geq 2,351088 > 2,349468 = 2\sqrt{\gamma_3}.$$

Далее, делаем заключение, что для экстремального набора $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\}$ возможен только случай, когда $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \in (0, x_0]$ и, следовательно, $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)}$.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений// Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159 — 245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 628 с.
3. *Джсенкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.
4. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48 — 66.
5. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного// Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1(295). — С. 3 — 76.
6. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2001. — **276**. — С. 253 — 275.
7. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе// Праці Ін-ту мат. НАН України. — 2008. — **73**. — 308 с.
8. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного// Владивосток: "Дальнаука" ДВО РАН, 2009. — 390 с.
9. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности//Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 7. — С. 867 — 886.
10. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2003. — **302**. — С. 52 — 67.

11. Емельянов Е. Г. К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2002. — **286**. — С. 103 — 114.
12. Ковалев Л. В. К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневосточный матем. сборник. — 1996. — **2**. — С. 96 — 98.
13. Бахтин А. К., Денега И. В. Некоторые оценки функционалов для N -лучевых систем точек // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, 2011. — Т.8, №1. — С. 12 — 21.
14. Бахтин А. К., В'юн В. Є. Про деякі нерівності в теорії неперетинних областей / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, 2014. — Т.11, №1. — С. 141 — 152.