Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, т. 12, № 5, 90–108

УДК 517.93;519.711

Задачі стабілізації і гасіння зовнішніх збурень у системах керування *

О. Г. Мазко, С. М. Кусій

Інститут математики НАН України, Київ;
mazko@imath.kiev.ua, sergii.kusii@gmail.com

New criteria for output stabilizability of linear control systems using static and dynamic regulators are obtained. It is shown that the arising algorithms of stabilization are available for a certain class of nonlinear control systems. Algorithms for constructing the control laws providing a specified evaluation of the weighted damping level of input signals and initial perturbations and robust stability of the equilibrium state of control system are proposed. The results are illustrated by an example for a stabilization system of a single-link robot manipulator.

Получены новые критерии стабилизируемости по выходу линейных систем управления с помощью статических и динамических регуляторов. Показано, что вытекающие из данных критериев алгоритмы стабилизации применимы для некоторого класса нелинейных систем управления. Предложены алгоритмы построения законов управления, обеспечивающих заданную оценку взвешенного уровня гашения входных сигналов и начальных возмущений, а также робастную устойчивость состояния равновесия управляемой системы. Полученные результаты продемонстрированы на примере системы стабилизации однозвенного робота-манипулятора.

1. Вступ

При математичному моделюванні руху складних динамічних об'єктів використовуються диференціальні та різницеві системи рівнянь, що

* Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0112U001015.

містять невизначені елементи (параметри, функції, зовнішні збурення тощо). Для таких систем виникає необхідність побудови статичних або динамічних регуляторів, що забезпечують робастну стійкість станів рівноваги та зниження впливу зовнішніх збурень на динаміку керованих об'єктів. Вказані якості системам керування надають методи теорії H_∞-оптимізації, а також методи інваріантних еліпсоїдів (див., наприклад, [1–9]). Задачі стабілізації навіть для класів лінійних систем за умов неповної інформації про їх стан недостатньо вивчені і розв'язані лише при додаткових обмеженнях [10, 11].

Слід зазначити, що практичне застосування багатьох методів синтезу систем керування базується на розв'язуванні лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Для цього створені достатньо ефективні засоби LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab [12].

В даній роботі пропонуються нові методи побудови статичних та динамічних регуляторів, що забезпечують асимптотичну стійкість стану рівноваги деякого класу нелінійних систем керування. Для класу лінійних систем з керованими і спостережуваними виходами розробляються алгоритми побудови динамічних регуляторів, що забезпечують верхню оцінку зваженого рівня гасіння вхідних сигналів та робастну стабілізацію відносно заданої множини невизначеностей. При цьому використовується критерій якості, що є аналогом H_∞-норми передатної матричної функції системи керування [13].

Будемо використовувати такі позначення:

- I_n — одинична матриця порядку n;
- $0_{n\times m}$ — нульова матриця розмірів $n \times m$;
- $X = X^T > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена матриця X;
- $\mathrm{i}(X) = \{\mathrm{i}_+, \mathrm{i}_-, \mathrm{i}_0\}$ — інерція симетричної матриці X, яку утворюють кількості її додатних, від'ємних і нульових власних значень, враховуючи кратності;
- $\lambda_{\max}(X)$ ($\lambda_{\min}(X)$) — максимальне (мінімальне) власне значення матриці X;
- A^+ — псевдообернена матриця;
- $\|x\|$ — евклідова норма вектора x;
- $B^\perp$ ($C^\perp$) — ортогональне доповнення матриці $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ($C \in \mathbb{R}^{l\times n}$) повного рангу m (l), що визначається співвідношеннями $B^T B^\perp = 0$, $\det\left[B, B^\perp\right] \neq 0$ ($C^\perp C^T = 0$, $\det\left[C^T, C^{\perp T}\right] \neq 0$);
- W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра матриці A;
- $\mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ — опуклий многогранник (політоп) з вершинами $A_1, \ldots, A_\nu$ у просторі матриць.

2. Стабілізація по вимірюваному виходу

Розглянемо нелінійну систему керування

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad y = C(x)x + Du, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування і вимірюваного виходу системи, а $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і D — матриці відповідних розмірів. Припускаємо, що залежності $A(x)$, $B(x)$ і $C(x)$ неперервні, причому $\operatorname{rank} B(x) \equiv m$ і $\operatorname{rank} C(x) \equiv l$ в деякому околі $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| \leq h\}$ точки $x = 0$, а D — стала матриця. Разом з (1) розглядаємо лінійну систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{2}$$

де $A = A(0)$, $B = B(0)$ і $C = C(0)$.

2.1. Статичні регулятори

Сформулюємо умови стабілізації нульового стану рівноваги систем (1) і (2) за допомогою статичних регуляторів

$$u = Ky, \quad K \in \mathcal{K}_D, \tag{3}$$

де $\mathcal{K}_D = \{K \in \mathbb{R}^{m \times l} : \det(I_m - KD) \neq 0\}$. Замкнена система (2), (3) має вигляд

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A + B\mathcal{D}(K)C, \tag{4}$$

де $\mathcal{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$ — нелінійний оператор. Якщо спектр матриці M розміщений у півплощині $\mathbb{C}_\alpha^- = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda + \alpha < 0\}$, де $\alpha \geq 0$, то систему (4) називаємо *α-стійкою.* Спектральний запас стійкості α-стійкої системи не менший, ніж α.

Теорема 2.1. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) *Існує статичний регулятор* (3)*, що забезпечує α-стійкість замкненої системи* (4)*.*

2) *Існує матриця $X = X^T > 0$, що задовольняє співвідношення*

$$B^{\perp T}(AX + XA^T + 2\alpha X)\, B^{\perp} < 0, \tag{5}$$

$$\mathrm{i}(\Delta) = \big\{l, n, 0\big\}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} AX + XA^T + 2\alpha X & XC^T \\ CX & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

3) *Існують взаємнообернені матриці* $X = X^T > 0$ *і* $Y = Y^T > 0$, *що задовольняють співвідношення* (5) *і*

$$C^{\perp}(A^TY + YA + 2\alpha Y)\, C^{\perp T} < 0. \tag{7}$$

При виконанні одного із тверджень 2) *або* 3) *регулятор*

$$u = Ky, \quad K = -\mathcal{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D, \tag{8}$$

де K_0 *— розв'язок ЛМН*

$$AX + XA^T + 2\alpha X + BK_0CX + XC^TK_0^TB^T < 0, \tag{9}$$

забезпечує α*-стійкість замкненої системи* (4).

Критерій α-стійкості у вигляді твердження 2) встановлено в [13] на основі леми 1 [14]. Еквівалентність тверджень 2) і 3) випливає із формули для індексів інерції блочної матриці (див. [15, с. 147]) $\mathrm{i}_{\pm}(\Delta_1) = \mathrm{i}_{\pm}(C^{\perp}L_1C^{\perp T}) + l = \mathrm{i}_{\pm}(\Delta)$, де

$$\Delta_1 = R^T\Delta R = \left[\begin{array}{c|cc} C^{\perp}L_1C^{\perp T} & 0 & C^{\perp}L_1C^{+} \\ \hline 0 & 0 & I_l \\ C^{+T}L_1C^{\perp T} & I_l & C^{+T}L_1C^{+} \end{array}\right],$$

$$L_1 = A^TY + YA + 2\alpha Y, \quad R = \begin{bmatrix} YC^{\perp T} & 0 & YC^{+} \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix}, \quad \det R \neq 0.$$

Стосовно еквівалентності тверджень 1) і 3) див. також [5].

Теорема 2.2. *Нехай виконується одне із тверджень* 2) *або* 3) *теореми* 2.1 *для системи* (2). *Тоді співвідношення* (8) *і* (9) *визначають статичний регулятор, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану* $x \equiv 0$ *та квадратичну функцію Ляпунова* $v(x) = x^TXx$ *замкненої нелінійної системи* (1), (8).

Доведення. Умови (5), (6) або (5), (7) забезпечують сумісність ЛМН (9) відносно K_0. При цьому в силу неперервності матричних функцій $A(x)$, $B(x)$ і $C(x)$ для деякого $h > 0$ виконуються співвідношення

$$M(x)X + XM^T(x) + 2\alpha X < 0, \quad \dot v(x) < -2\alpha\, v(x) \le 0, \quad x \in \mathcal{S}_0,$$

де $M(x) = A(x) + B(x)K_0C(x)$, $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| < h\}$, $\dot v(x)$ — похідна функції $v(x)$ в силу замкненої системи (1), (8). Тому твердження теореми 2.2 є наслідком теореми 2.1 і теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість [16].

Теорема доведена. □

2.2. Динамічні регулятори

Наведемо аналоги теорем 2.1 і 2.2, використовуючи клас динамічних регуляторів

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \tag{10}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$, $r \le n$, Z, V, U і K — невідомі матриці. Співвідношення (1) і (10) можна подати у вигляді системи керування зі статичним регулятором у розширеному фазовому просторі:

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}(\widehat{x})\widehat{x} + \widehat{B}(\widehat{x})\widehat{u}, \quad \widehat{y} = \widehat{C}(\widehat{x})\widehat{x} + \widehat{D}\widehat{u}, \quad \widehat{u} = \widehat{K}\widehat{y}, \tag{11}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{y} = \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A}(\widehat{x}) = \begin{bmatrix} A(x) & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}(\widehat{x}) = \begin{bmatrix} B(x) & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}(\widehat{x}) = \begin{bmatrix} C(x) & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{D} = \begin{bmatrix} D & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}.$$

При умові $K \in \mathcal{K}_D$ замкнена лінійна система (2), (10) має вигляд

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\,\widehat{x}, \quad \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{\mathcal{D}}(\widehat{K})\widehat{C}, \tag{12}$$

де $\widehat{A} = \widehat{A}(0)$, $\widehat{B} = \widehat{B}(0)$, $\widehat{C} = \widehat{C}(0)$, $\widehat{\mathcal{D}}(\widehat{K}) = (I_{m+r} - \widehat{K}\widehat{D})^{-1}\widehat{K}$, причому

$$\widehat{\mathcal{D}}(\widehat{K}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{D}(K) & (I_m - KD)^{-1}U \\ \hline V(I_l - DK)^{-1} & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{array}\right],$$

$$\widehat{M} = \left[\begin{array}{c|c} M & B(I_m - KD)^{-1}U \\ \hline V(I_l - DK)^{-1}C & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{array}\right].$$

Теорема 2.3. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) *Існує динамічний регулятор* (10) *порядку* $r \le n$, *що забезпечує* α-*стійкість замкненої системи* (12).

2) *Існують матриці* X *і* X_0, *що задовольняють співвідношення* (5) *і*

$$\mathrm{i}(\Delta_0) = \{l, n, 0\}, \quad X \ge X_0 > 0, \quad \mathrm{rank}(X - X_0) \le r, \tag{13}$$

де

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} AX_0 + X_0A^T + 2\alpha X_0 & X_0C^T \\ CX_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3) *Існують матриці* X *і* Y, *що задовольняють співвідношення* (5), (7) *і*

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{14}$$

Доведення. За теоремою 2.1 маємо наступний критерій існування статичного регулятора, що забезпечує α-стійкість замкненої системи:

$$\widehat{B}^{\perp T}(\widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T + 2\alpha\widehat{X})\widehat{B}^{\perp} < 0, \quad \mathrm{i}(\widehat{\Delta}) = \{l + r, n + r, 0\}, \tag{15}$$

де

$$\widehat{\Delta} = \begin{bmatrix} \widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T + 2\alpha\widehat{X} & \widehat{X}\widehat{C}^T \\ \widehat{C}\widehat{X} & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \alpha \geq 0.$$

Перше співвідношення в (15), враховуючи структуру блочних матриць, зводиться до матричної нерівності (5) відносно X. Застосуємо конгруентне перетворення матриці $\widehat{\Delta}$:

$$\widehat{L}\widehat{\Delta}\widehat{L}^T = \begin{bmatrix} \Delta_0 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

де

$$\widehat{L} = \left[\begin{array}{cc|cc} I_n & -X_1^T X_2^{-1} & 0 & -AX_1^T X_2^{-1} \\ 0 & 0 & I_l & -CX_1^T X_2^{-1} \\ \hline 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r \end{array}\right], \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} 2\alpha X_2 & X_2 \\ X_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут діагональний блок Δ_0 визначено в (13) при $X_0 = X - X_1^T X_2^{-1} X_1$. При цьому $\mathrm{i}(\Delta_1) = \{r, r, 0\}$, $\operatorname{rank}(X - X_0) = \operatorname{rank}(X_1^T X_2^{-1} X_1) \leq r$ і $X \geq X_0$.

Отже, із (15) випливають співвідношення (5) і (13) для деяких додатно визначених матриць X і X_0. Навпаки, якщо система співвідношень (5) і (13) сумісна відносно $X = X^T > 0$ і $X_0 = X_0^T > 0$, то, враховуючи (16), завжди можна знайти блочну матрицю $\widehat{X} > 0$, що задовольняє співвідношення (15). При цьому матриця X повинна бути її першим діагональним блоком, а значеннями X_1 і X_2 можуть бути, наприклад, множник розкладу $X - X_0 = X_1^T X_1 \geq 0$ і одинична матриця I_r відповідно.

Еквівалентність тверджень 1) і 3) також всановлюється із урахуванням блочної структури використаних матриць. Слід відмітити, що матриці X і X_0 задовольняють твердження 2) лише тоді, коли матриці X і $Y = X_0^{-1}$ задовольняють твердження 3). Для виконання співвідношень (14) необхідно, щоб матриці X і Y були додатно визначеними. Рангове обмеження в (14) завжди виконується у випадку динамічного регулятора повного порядку $r = n$.

Теорема доведена. $\square$

Із теореми 2.3 випливає наступний алгоритм побудови динамічного регулятора (10), що забезпечує α-стійкість системи (12), а також асимптотичну стійкість нульового стану замкненої нелінійної системи (11).

Алгоритм 2.1. 1) Знаходження матриць X і X_0, що задовольняють співвідношення (5) і (13).

2) Розклад невід'ємно визначеної матриці

$$X - X_0 = X_1^T X_1 \geq 0, \quad X_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}, \quad \mathrm{rank} X_1 \leq r.$$

3) Розв'язування ЛМН

$$\widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T + 2\alpha\widehat{X} + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{C}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{C}^T\widehat{K}_0^T\widehat{B}^T < 0$$

відносно $\widehat{K}_0$ при умовах $\det(I_m + K_0 D) \neq 0$ і $\alpha \geq 0$, де

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & I_r \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}.$$

4) Обчислення матриць регулятора (10) по формулах

$$\begin{gathered} K = (I_m + K_0 D)^{-1} K_0, \quad U = (I_m + K_0 D)^{-1} U_0, \\ V = V_0 (I_l + D K_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0 D (I_m + K_0 D)^{-1} U_0. \end{gathered} \tag{17}$$

3. Оцінка рівня гасіння збурень в рівняннях регулятора

3.1. Статичні регулятори

Розглянемо системи (1) і (2) з початковим вектором $x(0) = x_0$ і керуванням

$$u = K_* y + w, \quad K_* \in \mathcal{K}_D, \tag{18}$$

де $w \in \mathbb{R}^m$ — вектор обмежених зовнішніх збурень. Перепишемо відповідні замкнені системи у вигляді

$$\dot{x} = A_*(x)x + B_*(x)w, \quad y = C_*(x)x + D_*w, \quad x(0) = x_0, \tag{19}$$

$$\dot{x} = A_*x + B_*w, \quad y = C_*x + D_*w, \quad x(0) = x_0, \tag{20}$$

де $A_*(x) = A(x) + B(x)\mathcal{D}(K_*)C(x)$, $B_*(x) = B(x)(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_*(x) = (I_l - DK_*)^{-1}C(x)$, $A_* = A_*(0)$, $B_* = B_*(0)$, $C_* = C_*(0)$, $D_* = (I_l - DK_*)^{-1}D$, $\mathcal{D}(K_*) = (I_m - K_*D)^{-1}K_*$. Вхідна вектор-функція $w(t)$ і початковий вектор x_0 вважаються невідомими.

Введемо для систем (19) і (20) критерій якості

$$J = \sup_{0<\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0 < \infty} \frac{\|y\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}, \tag{21}$$

де

$$\|y\|_Q^2 = \int_0^T y^T Q y \, dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^T w^T P w \, dt, \quad T > 0,$$

$Q = Q^T > 0$, $P = P^T > 0$ і $X_0 = X_0^T > 0$ — додатно визначені вагові матриці. Вирази $\|y\|_Q$ і $\|w\|_Q$ при $T = \infty$ є зваженими L_2-нормами векторів вихідних і вхідних сигналів системи. Величина (21) характеризує рівень впливу зовнішніх збурень і початкового вектора на якість перехідного процесу системи. Якщо $Q = I_l$, $P = I_m$ і $T = \infty$, то значення J співпадає з H_∞-нормою передатної матричної функції $H(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B + D$ лінійної системи (3) з нульовим початковим вектором [1].

Означення 3.3. Система (19) називається *неекспансивною*, якщо її вектор виходу при довільному $T > 0$ задовольняє нерівність

$$\int_0^T y^T Q y dt \le \int_0^T w^T P w dt + x_0^T X_0 x_0. \tag{22}$$

Очевидно, що для неекспансивної системи характеристика $J \le 1$.

Лема 3.1. *Нехай для деяких матриць K_* і $X = X^T$ виконується система співвідношень*

$$0 < X \le X_0, \quad \Phi(x) \le 0, \tag{23}$$

де

$$\Phi(x) = \left[\begin{array}{cc} A_*^T X + X A_* + C_*^T Q C_* & X B_* + C_*^T Q D_* \\ B_*^T X + D_*^T Q C_* & D_*^T Q D_* - P \end{array} \right], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді нелінійна система (19) *є неекспансивною. При цьому, якщо* $\Phi(0) < 0$, *то нульовий стан* $x \equiv 0$ *даної системи з невизначеністю*

$$w = \Theta y, \quad \Theta^T P \Theta \le Q, \tag{24}$$

робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^T X x$.

Доведення. Обчислимо вираз

$$\dot{v}(x) + y^T Q y - w^T P w = z^T \Phi(x) z,$$

де $z^T = [x^T, w^T]$, $\dot{v}(x)$ — похідна квадратичної функції $v(x) = x^T X x$ в силу системи (19). Після інтегрування даного виразу, враховуючи співвідношення (23), маємо нерівність (22). Асимптотична стійкість стану $x \equiv 0$ замкненої системи (19) з невизначеністю (24) (тобто робастна стійкість) є наслідком теореми 1 із [18].

Лема доведена. □

Для лінійної системи (20) маємо критерій неекспансивності.

Лема 3.2. *Лінійна система* (20) *є неекспансивною тоді і лише тоді, коли для деякої матриці* $X = X^T$ *при* $x = 0$ *виконується система співвідношень* (23). *При цьому, якщо* $\Phi(0) < 0$, *то система* (20) *з невизначеністю* (24) *робастно стійка зі спільною функцією Ляпунова* $v(x) = x^T X x$.

Доведення. Твердження достатності є наслідком леми 3.1. Для доведення твердження необхідності використаємо розклади додатно визначених матриць $Q = \widetilde{Q}^T \widetilde{Q}$, $P = \widetilde{P}^T \widetilde{P}$, $X_0 = \widetilde{X}_0^T \widetilde{X}_0$ і перетворимо систему (20):

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{B}\widetilde{w}, \quad \widetilde{y} = \widetilde{C}\widetilde{x} + \widetilde{D}\widetilde{w}, \quad \widetilde{x}(0) = \widetilde{x}_0, \tag{25}$$

де $\widetilde{x} = \widetilde{X}_0 x$, $\widetilde{y} = \widetilde{Q} y$, $\widetilde{w} = \widetilde{P} w$, $\widetilde{A} = \widetilde{X}_0 A_* \widetilde{X}_0^{-1}$, $\widetilde{B} = \widetilde{X}_0 B_* \widetilde{P}^{-1}$, $\widetilde{C} = \widetilde{Q} C_* \widetilde{X}_0^{-1}$ і $\widetilde{D} = \widetilde{Q} D_* \widetilde{P}^{-1}$. При цьому критерій якості (21) для системи (25) набуває вигляду

$$\widetilde{J} = \sup_{0 < \|\widetilde{w}\|_{I_m}^2 + \widetilde{x}_0^T \widetilde{x}_0 < \infty} \frac{\|\widetilde{y}\|_{I_l}}{\sqrt{\|\widetilde{w}\|_{I_m}^2 + \widetilde{x}_0^T \widetilde{x}_0}}.$$

Із доведення теореми 1 [17] випливає, що $\widetilde{J} \leq \gamma$ ($\widetilde{J} < \gamma$) тоді і лише тоді, коли для деякої матриці $\widetilde{X} = \widetilde{X}^T$ виконується система ЛМН

$$0 < \widetilde{X} \leq \gamma^2 I_n, \quad \widetilde{\Omega}_\gamma = \begin{bmatrix} \widetilde{A}^T \widetilde{X} + \widetilde{X}\widetilde{A} & \widetilde{X}\widetilde{B} & \widetilde{C}^T \\ \widetilde{B}^T \widetilde{X} & -\gamma^2 I_m & \widetilde{D}^T \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} & -I_l \end{bmatrix} \leq 0\,(<0).$$

Перетворимо останні нерівності:

$$0 < X \leq \gamma^2 X_0, \quad \Omega_\gamma = S^T \widetilde{\Omega}_\gamma S = \begin{bmatrix} A_*^T X + X A_* & X B_* & C_*^T \\ B_*^T X & -\gamma^2 P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0,$$

де $X = \widetilde{X}_0^T \widetilde{X}\widetilde{X}_0$, $S = \mathrm{diag}\left\{\widetilde{X}_0, \widetilde{P}, \widetilde{Q}^{-1T}\right\}$. Застосовуючи лему Шура до блочного виразу Ω_γ, отримуємо матричну нерівність

$$\Phi_\gamma = \begin{bmatrix} A_*^T X + X A_* + C_*^T Q C_* & X B_* + C_*^T Q D_* \\ B_*^T X + D_*^T Q C_* & D_*^T Q D_* - \gamma^2 P \end{bmatrix} \leq 0.$$

У випадку $\gamma = 1$ маємо співвідношення $\Phi(0) = \Phi_1 \leq 0$. Причому, якщо виконується строга матрична нерівність, то нульовий стан $x \equiv 0$ замкненої системи (20), (24) асимптотично стійкий [18].

Лема доведена. □

Зазначимо, що характеристику J лінійної системи (20) можна обчислити як розв'язок оптимізаційної задачі:

$$J = \inf\left\{\gamma : \Phi_\gamma \leq 0,\, 0 < X \leq \gamma^2 X_0,\, K_* \in \mathcal{K}_D\right\}.$$

До множини параметрів оптимізації X і K_* можна приєднати також елементи додатно визначених матриць X_0, P і Q.

В [13] отримано необхідні і достатні умови існування матриці K_*, для якої матрична нерівність $\Phi_\gamma < 0$ виконується для деякої матриці $X = X^T > 0$ при $\gamma = 1$. При цьому характеристика $J < 1$, якщо $X \leq X_0$. Враховуючи ці умови, маємо наступне твердження.

Теорема 3.4. *Для лінійної системи* (20) *існує матриця* K_* *така, що* $J < 1$ *тоді і лише тоді, коли сумісна система співвідношень*

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^T X + X A + C^T Q C & X B + C^T Q D \\ B^T X + D^T Q C & D^T Q D - P \end{bmatrix} W_R < 0, \qquad (26)$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AY + YA^T + BP^{-1}B^T & YC^T + BP^{-1}D^T \\ CY + DP^{-1}B^T & DP^{-1}D^T - Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{27}$$

$$0 < X \le X_0, \quad XY = I_n, \tag{28}$$

де $R = [C, D]$, $L = [B^T, D^T]$. *При виконанні умов* (26) – (28) *нульовий стан систем* (19) *і* (20) *з невизначеністю* (24) *робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова* $v(x) = x^T X x$.

Зауваження 3.2. Якщо матриці X і Y задовольняють умови (26) – (28), то матрицю K_* в теоремі 3.4 можна побудувати у вигляді

$$K_* = K_0(I_l + DK_0)^{-1}, \tag{29}$$

де K_0 — довільна матриця, що задовольняє співвідношення

$$L_0^T K_0 R_0 + R_0^T K_0^T L_0 + \Omega < 0, \quad -K_0 \in \mathcal{K}_D,$$

$$R_0 = \left[R, 0_{l\times l}\right], \quad L_0 = \left[L, 0_{m\times m}\right] \widetilde{X},$$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -P & D^T \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

3.2. Динамічні регулятори

Розглянемо системи (1) і (2) з динамічним зворотним зв'язком

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky + w, \quad \xi(0) = \xi_0, \tag{30}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^r$ і $w \in \mathbb{R}^m$ — вектори відповідно стану регулятора і вхідних сигналів (зовнішніх збурень), Z, V, U і K — невідомі сталі матриці. При умові $K \in \mathcal{K}_D$ відповідні замкнені системи мають вигляд

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}(x)\widehat{x} + \widehat{N}(x)w, \quad y = \widehat{F}(x)\widehat{x} + \widehat{G}w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{31}$$

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\widehat{x} + \widehat{N}w, \quad y = \widehat{F}\widehat{x} + \widehat{G}w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{32}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{M}(x) = \begin{bmatrix} A(x) + B(x)K_0C(x) & B(x)U_0 \\ V_0C(x) & Z_0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{N}(x) = \begin{bmatrix} B(x) + B(x)K_0D \\ V_0D \end{bmatrix}, \quad \widehat{F}(x) = \left[\, C(x) + DK_0C(x), DU_0 \,\right],$$

$\widehat{G} = D + DK_0D,\ \ K_0 = \mathcal{D}(K),\ \ \widehat{M} = \widehat{M}(0),\ \ \widehat{N} = \widehat{N}(0),\ \ \widehat{F} = \widehat{F}(0),$
$U_0 = (I_m - KD)^{-1}U,\ \ V_0 = V(I_l - DK)^{-1},\ \ Z_0 = Z + VD(I_m - KD)^{-1}U.$

Нехай критерій якості $\widehat{J}$ типу (21) і умови неекспансивності даних систем визначають додатно визначені матриці P, Q і $\widehat{X}_0$. За лемою 3.1 нелінійна система (31) є неекспансивною, якщо

$$0 < \widehat{X} \le \widehat{X}_0, \quad \widehat{\Phi}(\widehat{x}) \le 0, \quad \widehat{x} \in \mathbb{R}^{n+r}, \tag{33}$$

де

$$\widehat{\Phi}(\widehat{x}) = \begin{bmatrix} \widehat{M}^T(\widehat{x})\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{M}(\widehat{x}) + \widehat{F}^T(\widehat{x})Q\widehat{F}(x) & \widehat{X}\widehat{N}(\widehat{x}) + \widehat{F}^T(\widehat{x})Q\widehat{G} \\ \widehat{N}^T(\widehat{x})\widehat{X} + \widehat{G}^TQ\widehat{F}(x) & \widehat{G}^TQ\widehat{G} - P \end{bmatrix},$$

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{X}_0 = \begin{bmatrix} X_0 & X_{01}^T \\ X_{01} & X_{02} \end{bmatrix} > 0.$$

Будемо шукати динамічний регулятор (30) з нульовим початковим вектором $\xi_0 = 0$. Тоді критерій якості $\widehat{J}$ співпадає з J.

Теорема 3.5. *Для лінійної системи* (2) *існує динамічний регулятор* (30), *що забезпечує критерій якості $J < 1$ тоді і лише тоді, коли для деяких матриць $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$ виконується система ЛМН* (14), (26), (27) *і $X \le X_0$. При цьому нульовий стан $\widehat{x} \equiv 0$ систем* (31) *і* (32) *з невизначеністю* (24) *робастно стійкий.*

Доведення. За лемою 3.2 лінійна система (32) є неекспансивною тоді і лише тоді, коли співвідношення (33) виконуються при $\widehat{x} = 0$. При цьому $J < 1$, якщо $\widehat{\Phi}(0) < 0$. Оскільки $\xi_0 = 0$, то обмеження на $\widehat{X}$ і $\widehat{X}_0$ в (33) зводяться до співвідношення для перших діагональних блоків $0 < X \le X_0$ (див. доведення леми 3.1).

Перепишемо співвідношення $\widehat{\Phi}(0) < 0$ у вигляді ЛМН відносно блочної матриці $\widehat{K}_0$:

$$\widehat{L}^T\widehat{K}_0\widehat{R} + \widehat{R}^T\widehat{K}_0^T\widehat{L} + \widehat{\Omega} < 0, \tag{34}$$

де

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} A^TX + XA & A^TX_1^T & XB & C^T \\ X_1A & 0 & X_1B & 0 \\ B^TX & B^TX_1^T & -P & D^T \\ C & 0 & D & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{L}^T = \begin{bmatrix} XB & X_1^T \\ X_1B & X_2 \\ 0 & 0 \\ D & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R} = \begin{bmatrix} C & 0 & D & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}.$$

Для існування розв'язку $\widehat{K}_0$ матричної нерівності (34) необхідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення [6]

$$W_{\widehat{R}}^T \widehat{\Omega} W_{\widehat{R}} < 0, \quad W_{\widehat{L}}^T \widehat{\Omega} W_{\widehat{L}} < 0. \tag{35}$$

Обчислимо матриці

$$W_{\widehat{R}} = E_1 \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{L}} = E_2 \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де

$$E_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_l \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} Y & 0 & 0 & Y_1^T \\ Y_1 & 0 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & I_l & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{X}^{-1} = \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_1^T \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}.$$

Блоки взаємнообернених матриць $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$ задовольняють рівності

$$XY + X_1^T Y_1 = I_n, \quad XY_1^T + X_1^T Y_2 = 0,$$

$$X_1 Y + X_2 Y_1 = 0, \quad X_1 Y_1^T + X_2 Y_2 = I_r.$$

Враховуючи ці рівності і блочну структуру наведених виразів, співвідношення (35) набувають вигляду (26) і (27), де невідомими є лише перші діагональні блоки X і Y відповідних матриць $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$. Умови (14) є необхідними і достатніми для існування блочних взаємнообернених матриць $\widehat{X} > 0$ і $\widehat{Y} > 0$ із наперед заданими першими діагональними блоками $X > 0$ і $Y > 0$ (див., наприклад, [5, лема А.7]). При цьому рангове обмеження в (14) завжди виконується у випадку динамічного регулятора повного порядку $r = n$.

При виконанні умов (14), (26), (27) і $0 < X \le X_0$ робастна стійкість стану $\widehat{x} \equiv 0$ систем (31) і (32) з невизначеністю (24) є наслідком теореми 1 із [18]. При цьому $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$ є спільною функцією Ляпунова відповідних сімей систем.

$\square$

Наведемо алгоритм побудови динамічного регулятора (30), що задовольняє теорему 3.5.

Алгоритм 3.1. 1) обчислення матриць W_R і W_L;

2) знаходження матриць $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$, що задовольняють співвідношення (14), (26), (27) і $X \le X_0$;

3) формування блочних взаємнообернених матриць $\widehat{X}$ і $\widehat{Y}$;

4) розв'язання ЛМН (34) відносно $\widehat{K}_0$ при обмеженні $\det(I_l + DK_0) \ne 0$;

5) обчислення матриць регулятора (30) по формулах (17).

В п. 3) наведеного алгоритму можна використати формулу Фробеніуса для обернення блочних матриць [19], згідно з якою

$$X = Y^{-1} + Y^{-1}Y_1^T H^{-1} Y_1 Y^{-1}, \quad X_1 = -H^{-1}Y_1Y^{-1}, \quad X_2 = H^{-1},$$

де $H = Y_2 - Y_1Y^{-1}Y_1^T$. Якщо для деяких матриць X_1 і H виконуються співвідношення

$$X - Y^{-1} = X_1^T H X_1 \ge 0, \quad H = H^T > 0, \quad \operatorname{rank} X_1 \le r,$$

то можна покласти $X_2 = H^{-1}$, $Y_1 = -HX_1Y$ і $Y_2 = H + HX_1YX_1^TH$. Зокрема, при умовах $r = n$ і $X > Y^{-1}$ можна взяти $X_1 = X_2 = X - Y^{-1}$ і $H = (X - Y^{-1})^{-1}$.

Слід відмітити, що в теоремах 3.4 і 3.5 матриці P і Q є заданими. Але в алгоритмі робастної стабілізації 3.1 їх можна вважати невідомими і обчислювати разом з додатно визначеними матрицями X і Y. Крім того, можна враховувати невизначеність $A \in \mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\alpha\}$, де $\mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i : \ \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 1, \, \alpha_i \ge 0, \, i = \overline{1, \nu} \right\}$. При цьому необхідно задовольнити систему 2α ЛМН типу (26) і (27) для кожної вершини A_i заданого політопа. В лемах 3.1 і 3.2 можна врахувати також невизначеності $B \in \mathrm{Co}\{B_1, \dots, B_\beta\}$ і $C \in \mathrm{Co}\{C_1, \dots, C_\gamma\}$, використовуючи відповідні системи ЛМН.

4. Приклад

Розглянемо систему керування одноланкового робота-маніпулятора, круговий рух ланки якого навколо одного з кінців здійснюється за допомогою гнучкого з'єднання ланки та виконавчого механізму (рис.

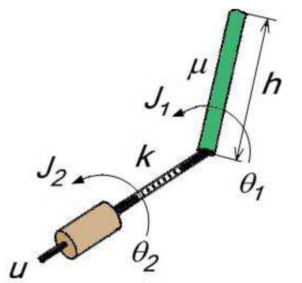

Рис. 1. Одноланковий робот-маніпулятор.

1). Між виконавчим механізмом (валом електродвигуна) і кінцем ланки знаходиться лінійна торсійна пружина. Дана система описується у вигляді двох нелінійних диференціальних рівнянь другого роду, які відповідають за механічний баланс виконавчого механізму та ланки робота-маніпулятора без урахування сил тертя і зовнішніх збурень. Рівняння руху системи представляються у векторно-матричній формі (1), де

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\mu g h\, \varphi(\theta_1) + k}{J_1} & 0 & \dfrac{k}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k}{J_2} & 0 & -\dfrac{k}{J_2} & -\dfrac{d}{J_2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{J_2} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix},$$

θ_1 і θ_2 — кутові координати відповідно ланки маніпулятора і валу двигуна, u — керуючий момент, який створює двигун, J_1 і J_2 — моменти інерції відповідно ланки маніпулятора і валу двигуна, k — жорсткість передатного механізму, d — коефіцієнт демпфування, μ — маса ланки маніпулятора, h — довжина ланки маніпулятора, g — прискорення вільного падіння, $\mu g h \sin\theta_1$ — момент сили тяжіння, що діє на ланку маніпулятора, $\varphi(\theta) = (sin\,\theta)/\theta$ — неперервна функція.

Нехай $\mu gh = 5$, $d = 0,1$, $k = 100$, $J_1 = 1$, $J_2 = 0,3$ і вимірюється вектор виходу

$$y = Cx + Du = \left[\ \dot\theta_2 + u\ \right], \quad C = \left[\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\ \right], \quad D = \left[\ 1\ \right].$$

Використовуючи алгоритм 2.1, отримано матриці динамічного регулятора (10)

$$K = \left[\ 1,03905\ \right], \quad U = \left[\ 1,78373 \quad 0,47388 \quad 3,32968 \quad -4,93660\ \right],$$

$$V = \begin{bmatrix} -1,77794 \\ 3,46321 \\ 27,22583 \\ -1,20941 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} 7,75694 & -18,47507 & -128,02370 & 5,73633 \\ 12,78966 & -22,37844 & -179,45836 & 7,37386 \\ 135,31195 & -252,41576 & -2078,56531 & 84,27264 \\ -39,63772 & 77,04892 & 614,12793 & -35,01502 \end{bmatrix},$$

який забезпечує α-стійкість замкненої лінійної системи (12) при $\alpha = 0,3$. Нульовий розв'язок замкненої нелінійної системи (11) також асимптотично стійкий.

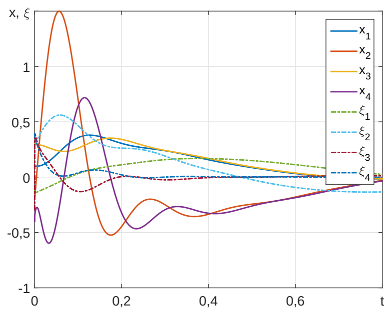

Рис. 2. Поведінка замкненої системи керування (алгоритм 2.1).

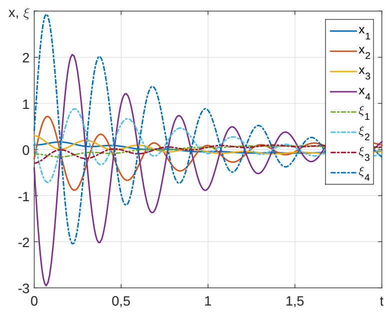

Рис. 3. Поведінка замкненої системи керування (алгоритм 3.1).

Крім того, поклавши в (21) $P = 1$, $Q = 0,01$ і $X_0 = 10I_4$, за допомогою алгоритму 3.1 побудовано динамічний регулятор (30) з матрицями

$$K = \begin{bmatrix} 1,82161 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -1,29476 & 0,01041 & 1,25865 & 0,96167 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} 1,10060 \\ -13,80181 \\ -2,03002 \\ 51,48452 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} -2,27078 & -76,73505 & 4,34814 & 220,43906 \\ 1,01722 & -0,21598 & -0,03272 & 0,85998 \\ 2,21576 & 72,41993 & -4,24540 & -223,16699 \\ -0,04464 & 0,56263 & 1,08013 & -5,89252 \end{bmatrix},$$

що забезпечує критерій якості $J < 1$. Знайдено також матриці

$$X = \begin{bmatrix} 7,67175 & -0,67223 & -0,46220 & -0,33429 \\ -0,67223 & 1,76134 & 1,98760 & 0,53081 \\ -0,46220 & 1,98760 & 5,20547 & 0,70099 \\ -0,33429 & 0,53081 & 0,70099 & 0,17849 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 374,39850 & -165,72393 & 376,51701 & -135,90249 \\ -165,72393 & 1627,17576 & -178,84153 & 151,20462 \\ 376,51701 & -178,84153 & 393,51496 & -179,48245 \\ -135,90249 & 151,20462 & -179,48245 & 4902,68005 \end{bmatrix},$$

що задовольняють систему ЛМН (14), (26), (27) і $X \le X_0$, а в якості доповнюючих блоків X_1 та X_2 вибраний вираз $X - Y^{-1}$. При цьому нульовий розв'язок систем (31) і (32) з невизначеністю (24) робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$.

На рис. 2 і 3 показана поведінка розв'язку замкненої нелінійної системи керування (31) з початковим вектором

$$\widehat{x}_0 = \left[0,1,\ -0,2,\ 0,3,\ -0,4,\ -0,1,\ 0,2,\ -0,3,\ 0,4\right]^T$$

при використанні динамічного регулятора повного порядку $r = 4$ з матрицями K, U, V і Z, які отримані за допомогою алгоритмів 2.1 і 3.1. Суцільними і штрих-пунктирними лініями позначено траєкторії відповідно системи $x_i(t)$ і регулятора $\xi_i(t)$ $(i = \overline{1,4})$.

5. Висновок

В роботі отримано нові критерії існування і алгоритми побудови статичних і динамічних регуляторів, що забезпечують асимптотичну стійкість станів рівноваги деякого класу нелінійних систем керування у векторно-матричній формі. Для цього ж класу систем розроблено алгоритми побудови законів керування, які забезпечують властивість неекспансивності та оцінку критерію якості, що характеризує зважений рівень гасіння вхідних сигналів, а також робастну стабілізацію нульового стану рівноваги відносно заданої множини невизначеностей. Чисельна реалізація запропонованих методів побудови стабілізуючих регуляторів базується на розв'язанні систем лінійних матричних нерівностей із залученням ефективних засобів комп'ютерної системи Matlab.

Основні результати роботи продемонстровано на прикладі нелінійної системи керування одноланкового робота-маніпулятора.

[1] *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.

[2] *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 264 с.

[3] *Zhou K., Doyle J. C., Glover K.* Robust and optimal control. — Englewood: Prentice-Hall, Inc., 1996. — 586 p.

[4] *Dullerud G. E., Paganini F. G.* A Course in Robust Control Theory. A Convex Approach. — Berlin: Springer-Verlag, 2000. — 419 p.

[5] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.

[6] *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421 – 448.

[7] *Kwakernaak H.* Robust control and H_∞-optimization — Tutorial paper // Automatica. — 1993. — **29**, 2. — P. 255–273.

[8] *Ларин В. Б., Туник А. А.* О компенсации внешних возмущений динамической обратной связью по выходной переменной // Прикладная механика. — 2006. — **42**, 5. — С. 132–144.

[9] *Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика.— 2007. — № 3. — С. 106–125.

[10] *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика.— 2005. — № 5. — С. 7–46.

[11] *Алиев Ф. А., Ларин В. Б.* Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор) // Прикладная механика. — 2011. — **47**, 3. — С. 3–49.

[12] *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M.* The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. — Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995. — 138 p.

[13] *Мазко А. Г., Кусий С. Н.* Стабилизация по измеряемому выходу и оценка уровня гашения возмущений в системах управления // Нелінійні коливання.— 2015. — **18**, 3. — С. 373–387.

[14] *Мазко О. Г., Богданович Л. В.* Робастна стійкість і оптимізація нелінійних систем керування // Аналітична механіка та її застосування: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, 1. — С. 213–230.

[15] *Mazko A. G.* Matrix equations, spectral problems and stability of dynamic systems // Int. book series "Stability, Oscillations and Optimization of Systems" / Eds A. A. Martynyuk, P. Borne and C. Cruz-Hernandez. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2008. — Vol. 2. — xx+270 p.

[16] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

[17] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным управлением и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика.— 2010. — № 6. — С. 20–38.

[18] *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и оценка функционала качества нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 2. — С. 73–88.

[19] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.