

Обернені похідні 2-го типу многочлена та раціональної функції

М. М. Пагіря

*Мукачівський державний університет, Мукачево;
pahiryu@gmail.com*

New properties of reciprocal derivatives of the 2nd type are studied. It is proved that the reciprocal derivative of the 2nd type of the $(2n)$ -th order of the polynomials $p_n(z)$ is equal to zero, and that the reciprocal derivative of the 2nd type of the $(2n - 1)$ -th order of the rational function $p_m(z)/q_n(z)$, $m < n$, is equal to zero as well.

Изучаются новые свойства обратных производных 2-го типа. Доказано, что обратная производная 2-го типа $(2n)$ -го порядка многочлена $p_n(z)$ равна нулю и обратная производная 2-го типа $(2n - 1)$ -го порядка рациональной функции $p_m(z)/q_n(z)$, $m < n$, также равна нулю.

Вступ

Наближення функцій однієї дійсної або комплексної змінної на деякому компактi належить до задач, які мають не тільки теоретичне, а і практичне значення, оскільки інтерполяційні агрегати та розвинення функцій широко використовуються при розв'язуванні багатьох задач обчислювальної математики. Поряд із наближеннями функцій многочленами або узагальненими многочленами [1] та апроксимаціями Паде [2] в якості апарату наближення використовують ланцюгові дроби [3–5]. Розвинення функцій у ланцюговий дріб можна отримати із диференціального рівняння Ріккати [6], із представлення відношення гіпергеометричного ряду правильним ланцюговим S -дробом, із розвинення функції в степеневий ряд через відношення визначників Ганкеля, або за допомогою формули Тіле [7], яка ґрунтується

на обернених похідних Тіле. В роботі [8] введені в розгляд обернені похідні 2-го типу та аналог формули Тіле розвинення функцій в квазі-обернений ланцюговий дріб. В даній роботі доведені два твердження, які стосуються обернених похідних 2-го типу многочлена та раціональної функції. Ці твердження аналогічні відповідним твердженням для обернених похідних Тіле [9].

1. Означення та основні відомості

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області $Z \subset \mathbb{C}$, яка містить круг $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_*| < R\}$. Тоді в довільній точці $z \in K$ існує розвинення функції $f(z)$ в степеневий ряд [10]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}. \quad (1)$$

Визначником Ганкеля $H_k^{(n)}(z_*)$ порядку k , який пов'язаний із степеневим рядом (1) (навіть коли (1) формальний степеневий ряд [11]), називається визначник вигляду

$$H_0^{(n)}(z_*) = 1, \quad H_k^{(n)}(z_*) = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{n+k} \\ c_{n+2} & c_{n+3} & c_{n+4} & \dots & c_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & c_{n+k+1} & \dots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix},$$

де $k = 1, 2, \dots$, $c_n = 0$, коли $n < 0$.

Функція $f(z)$ в області Z може бути розвинута в квазі-обернений ланцюговий дріб в околі точки z_* наступним чином [12]

$$f(z) = \left(\frac{1}{f(z_*)} + \frac{z - z_*}{\{^1\}f(z_*)} + \frac{z - z_*}{2/\{^1\}f(z_*)'} + \frac{z - z_*}{3/\{^2\}f(z_*)'} + \dots + \frac{z - z_*}{n/\{^{n-1}\}f(z_*)'} + \dots \right)^{-1},$$

де $\{^n\}f(z_*)$ — значення оберненої похідної 2-го типу функції $f(z)$ в точці z_* . Обернені похідні 2-го типу обчислюються за допомогою ре-

курентного співвідношення

$$\{^k\}f(z) = \frac{k}{(\{^{k-1}\}f(z))'} + \{^{k-2}\}f(z), \quad k = 2, 3, \dots$$

при початкових значеннях $\{^0\}f(z) = 1/f(z)$, $\{^1\}f(z) = -f^2(z)/f'(z)$.

В [12] встановлені деякі властивості обернених похідних 2-го типу.

Теорема 1.1. *Нехай $f(z_*) \neq 0$ в $z_* \in \mathcal{Z}$. Тоді $\{^1\}f(z_*) = \infty$, якщо $f'(z_*) = 0$, і $\{^1\}f(z_*) = 0$, якщо $f'(z_*) = \infty$.*

Теорема 1.2. *Нехай для кожного $z \in \mathcal{Z}$ функції $u = f(z)$ та $v = g(z)$ мають скінчені обернені похідні 2-го типу. Тоді існують обернені похідні 2-го типу суми, різниці, добутку та частки цих функцій, які визначаються за формулами*

$$\begin{aligned} \{^1\}(u \pm v) &= \frac{(u \pm v)^2 \cdot \{^1\}u \cdot \{^1\}v}{u^2 \cdot \{^1\}v \pm v^2 \cdot \{^1\}u}, & \{^1\}(u \cdot v) &= \frac{uv \cdot \{^1\}u \cdot \{^1\}v}{u \cdot \{^1\}v + v \cdot \{^1\}u}, \\ \{^1\}(u/v) &= \frac{(u/v) \cdot \{^1\}u \cdot \{^1\}v}{u \cdot \{^1\}v - v \cdot \{^1\}u}. \end{aligned}$$

Теорема 1.3. *Нехай функція $w = f(z)$ для кожного $z \in \mathcal{Z}$ має обернені похідні 2-го типу до n -го порядку включно, $C = \text{const}$, $C \neq 0$, тоді виконуються співвідношення*

$$\{^{2m}\}(Cw) = \frac{1}{C} \cdot \{^{2m}\}w, \quad \{^{2m+1}\}(Cw) = C \cdot \{^{2m+1}\}w, \quad m = 0, 1, \dots$$

Теорема 1.4. *Обернені похідні 2-го типу функції $f(z)$ в точці $z_* \in \mathcal{Z}$ визначаються через звичайні похідні функції в цій точці як відношення визначників Ганкеля наступним чином*

$$\{^{2n}\}f(z_*) = H_n^{(2)}(z_*)/H_{n+1}^{(0)}(z_*), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2a)$$

$$\{^{2n+1}\}f(z_*) = H_{n+2}^{(-1)}(z_*)/H_{n+1}^{(1)}(z_*), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2b)$$

Формули (2) є аналогом співвідношень Ньорлунда для обернених похідних Тіле [13].

В роботі [12] отримані розвинення в квазі-обернений ланцюговий дріб функцій e^z , $(c+z)^\alpha$, $\ln(c+z)$, c , $\alpha \in \mathbb{C}$. При доведенні тверджень даної роботи будемо спиратися на наступні теореми.

Теорема 1.5 ([12]). **(А)** Якщо $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{C}$, $c = \text{const}$, то функція $(c+z)^\alpha$ має обернені похідні 2-го типу довільного порядку, які обчислюються за формулами

$$\{^{2n}\}(c+z)^\alpha = \frac{\prod_{m=1}^n (m-\alpha)}{\prod_{m=1}^n (m+\alpha)} (c+z)^{-\alpha}, \quad (3)$$

$$\{^{2n+1}\}(c+z)^\alpha = \frac{(n+1) \prod_{m=2}^{n+1} (m+\alpha)}{\prod_{m=0}^n (m-\alpha)} (c+z)^{\alpha+1}, \quad n=0, 1, \dots \quad (4)$$

(В) Якщо $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$, то функція $(c+z)^n$ має обернені похідні 2-го типу до $(2n)$ -го порядку включно, які визначаються за формулами (3) та (4), крім того

$$\{^{2n}\}(c+z)^n = 0. \quad (5)$$

(С) Якщо $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, то функція $(c+z)^{-n}$ має обернені похідні 2-го типу до $(2n-1)$ -го порядку включно, які визначаються за формулами (3) та (4), крім того $\{^{2n-1}\}(c+z)^{-n} = 0$.

Теорема 1.6 ([9]). Для функції

$$g(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(z-\alpha)^i}, \quad a_i, \alpha \in \mathbb{C},$$

для довільного значення $z_* \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ ранг нескінченної матриці Ганкеля

$$H^{(0)}(z_*) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} & \dots \\ c_3 & c_2 & c_4 & \dots & c_{n+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} & \dots \\ c_n & c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad c_k = \frac{g^{(k)}(z_*)}{k!}$$

($k = 0, 1, \dots$) дорівнює n .

Наслідок 1.1 ([9]). *Довільний визначник $(n+m+1)$ -го порядку вигляду*

$$\tilde{H}_{n+1}^{(0)} = \begin{vmatrix} c_{k_0} & c_{k_1} & \dots & c_{k_n} & b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ c_{k_0+1} & c_{k_1+1} & \dots & c_{k_n+1} & b_2 & b_3 & \dots & b_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k_0+n} & c_{k_1+n} & \dots & c_{k_n+n} & b_{n+1} & b_{n+2} & \dots & b_{m+n} \end{vmatrix} = 0,$$

при довільних $k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ та $m \in \mathbb{N}$, де $b_1, b_2, \dots, b_{n+m} \in \mathbb{C}$.

2. Обернена похідна 2-го типу многочлена

Теорема 2.7. *Обернена похідна 2-го типу $2n$ -го порядку многочлена $p_n(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, n = 1, 2, \dots$, тотожно рівна нулю.*

Доведення. Коли $n = 1$, то твердження теореми випливає з (5). Якщо вибрати деяке $z_* \in \mathbb{C}$, то в загальному випадку при $n = 2, 3, \dots$, з (2а) маємо, що $\{^{2n}\}p_n(z_*) = H_n^{(2)}(z_*)/H_{n+1}^{(0)}(z_*)$. Оскільки у випадку многочлена n -го порядку $c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = c_{2n} = 0$, то останній стовпчик ганкелевого визначника $H_n^{(2)}(z_*)$ буде складатися лише із нулів, а отже $H_n^{(2)}(z_*) \equiv 0$. В той же час останній стовпчик ганкелевого визначника $H_n^{(0)}(z_*)$ буде містити один не нульовий елемент $c_n = a_n n!$, а отже цей визначник нулю не рівний. Звідси маємо, що $\{^{2n}\}p_n(z_*) \equiv 0$ для довільного значення $z_* \in \mathbb{C}$. \square

3. Обернена похідна 2-го типу раціональної функції

Теорема 3.8. *Нехай функція $R_{m,n}(z) = p_m(z)/q_n(z)$ задана на $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, де $p_m(z)$ та $q_n(z)$ — многочлени відповідно степенів m та $n, m < n$, многочлен $q_n(z)$ не має коренів в \mathcal{Z} . Обернена похідна 2-го типу $(2n-1)$ -го порядку функції $R_{m,n}(z)$ тотожно дорівнює нулеві для всіх $z_* \in \mathcal{Z}$.*

Доведення. а) У випадку, коли $R_{0,n}(z) = A/(z-\alpha)^n$, то згідно з теоремою 1.3 та теоремою 1.5 маємо, що $\{^{2n-1}\}R_{0,n}(z) \equiv 0$.

б) Якщо $R_{m,n}(z) = p_m(z)/(z - \alpha)^n$, то функція може бути подана у вигляді суми простих дробів наступним чином

$$R_{m,n}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(z - \alpha)^i}.$$

Згідно з (2b) ${}^{(2n-1)}R_{m,n}(z_*) = H_{n+1}^{(-1)}(z_*)/H_n^{(1)}(z_*)$. Елементи ганкелевих визначників $H_{n+1}^{(-1)}(z_*)$ та $H_n^{(1)}(z_*)$ складаються із елементів, які визначаються наступним чином

$$c_k = \sum_{i=1}^n \binom{k+i-1}{k} \frac{(-1)^k a_i}{(z_* - \alpha)^{k+i}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Згідно з теоремою 1.6 визначник $H_{n+1}^{(-1)}(z_*) = 0$. Водночас $H_n^{(0)}(z_*) \neq 0$. А тоді ${}^{(2n-1)}R_{m,n}(z_*) \equiv 0$ для довільного $z_* \in \mathcal{Z}$.

в) В загальному випадку довільну раціональну функцію $R_{m,n}(z)$ можна розвинути у суму простих дробів, тобто подати у вигляді

$$R_{m,n}(z) = \sum_{s=1}^r \sum_{i_s=1}^{l_s} \frac{a_{i_s}^{(s)}}{(z - \alpha_s)^{i_s}}, \quad l_1 + l_2 + \dots + l_r = n.$$

Елементи визначників $H_{n+1}^{(-1)}(z_*)$ та $H_n^{(0)}(z_*)$ в (2b) будуть рівні

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} (R_{m,n}(z)) \Big|_{z=z_*} = \sum_{s=1}^r \sum_{i_s=1}^{l_s} \binom{k+i_s-1}{k} \frac{(-1)^k a_{i_s}^{(s)}}{(z_* - \alpha_s)^{k+i_s}},$$

де $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Визначник Ганкеля $\mathcal{H} = H_{n+1}^{(-1)}(z_*)$ в цьому випадку буде мати вигляд

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & \sum_{s=1}^r \sum_{i_s=1}^{l_s} \frac{(-1)^n (i_s)_n a_{i_s}^{(s)}}{n!(z_* - \alpha_s)^{i_s+n}} \\ \sum_{s=1}^r \sum_{i_s=1}^{l_s} \frac{a_{i_s}^{(s)}}{(z_* - \alpha_s)^{i_s}} & \dots & \sum_{s=1}^r \sum_{i_s=1}^{l_s} \frac{(-1)^{n+1} (i_s)_{n+1} a_{i_s}^{(s)}}{(n+1)!(z_* - \alpha_s)^{i_s+n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{s=1}^r \sum_{i_s=1}^{l_s} \frac{(-1)^n (i_s)_n a_{i_s}^{(s)}}{n!(z_* - \alpha_s)^{i_s+n}} & \dots & \sum_{s=1}^r \sum_{i_s=1}^{l_s} \frac{(-1)^{2n+1} (i_s)_{2n+1} a_{i_s}^{(s)}}{(2n+1)!(z_* - \alpha_s)^{i_s+2n+1}} \end{vmatrix},$$

де $(i_s)_n$ — символ Похгаммера.

Оскільки кожний стовпчик визначника \mathcal{H} містить n доданків, то такий визначник буде рівний сумі n визначників, які відрізняються лише елементами першого стовпчика. Кожен із отриманих визначників можна розвинути у суму n визначників, які будуть відрізнятися лише елементами другого стовпчика. В результаті будемо мати n визначників. Продовжуючи подібні розвинення за третім, четвертим, і т.д., $(n+2)$ -м стовпчиком, врешті-решт отримаємо n^{n+2} визначників, які будуть містити лише по одному доданку із суми кожного стовпця визначника \mathcal{H} .

Виберемо один із таких визначників

$$\tilde{\mathcal{H}}_{n+1}^{(-1)} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \binom{j_0+n-1}{n} \frac{(-1)^n b_{j_0}^{(n)}}{(z-\beta_n)^{j_0+n}} \\ \frac{b_{j_0}^{(0)}}{(z-\beta_0)^{j_0}} & \cdots & \binom{j_0+n}{n+1} \frac{(-1)^{n+1} b_{j_0}^{(n)}}{(z-\beta_n)^{j_0+n+1}} \\ \binom{j_0}{1} \frac{-b_{j_0}^{(0)}}{(z-\beta_0)^{j_0+1}} & \cdots & \binom{j_0+n+1}{n+2} \frac{(-1)^{n+2} b_{j_0}^{(n)}}{(z-\beta_n)^{j_0+n+2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{j_0+n-1}{n} \frac{(-1)^n b_{j_0}^{(0)}}{(z-\beta_0)^{j_0+n}} & \cdots & \binom{j_0+2n}{2n+1} \frac{(-1)^{2n+1} b_{j_0}^{(n)}}{(z-\beta_n)^{j_0+2n+1}} \end{vmatrix},$$

де $\beta_t \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$, $t = 0, 1, 2, \dots, n$, а j_t приймає деяке із можливих своїх значень, які відповідні β_t , тобто, якщо $\beta_t = \alpha_s$, то $1 \leq j_t \leq l_s$, $b_{j_t}^{(t)} = a_{j_t}^{(s)}$.

Оскільки визначник $\tilde{\mathcal{H}}_{n+1}^{(-1)}$ містить $(n+2)$ -а стовпці, а знаменник $q_n(z)$ має r різних коренів, $1 \leq r \leq n$, то принаймні два β_t будуть приймати однакові значення.

В кожному такому визначнику містять стовпці, які відповідають одному і тому кореню α_s , і кількість таких стовпців більша за кратність кореня l_s . Ці стовпці будуть лінійно залежними, а тоді згідно із наслідком 1.1 кожен такий визначник буде рівний нулю.

Визначник $H_{n+1}^{(-1)}(z_*)$ рівний нулю як сума визначників того ж порядку, кожен з яких рівний нулю. Тоді з (2b) випливає, що для довільного $z_* \in \mathcal{Z}$ виконується $\{^{2n-1}\}R_{m,n}(z_*) \equiv 0$. \square

- [1] Гаєрилук І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень. У 2 ч. — К.: Вища шк., 1995. — Ч. 1. — 367 с.

- [2] *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.
- [3] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — М.: Мир, 1985. — 414 с.
- [4] *Суйт А., Бревик Петерсен В., Вердонк В., Вааделанд Н., Джонс В. В.* Handbooks of Continued Fractions for Special Functions. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2008. — XVI+431 p.
- [5] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continue Fraction with Applications. — Amsterdam–London–New York–Tokyo: North–Holland, 1992.— 606 p.
- [6] *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. — М: ГИТТЛ, 1956. — 203 с.
- [7] *Thiele T. N.* Interpolationsrechnung.— Leipzig: Commis. von B. G. Teubner, 1909.— XII+175 s.
- [8] *Пагіря М. М.* Обернені похідні 2-го типу та їх властивості // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2009. — **18**. — С. 99–105.
- [9] *Пагіря М. М.* Дві властивості обернених похідних Тіле // Теорія наближень функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, 4. — С. 226–234.
- [10] *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. — М.: Наука, ГИФМЛ, 1968. — 648 с.
- [11] *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 1. Power Series–Integration–Conformal Mapping–Location of Zeros. — New York–London–Sydney–Toronto: A Wiley–Interscience publication, 1974. — XV+682 p.
- [12] *Пагіря М. М.* Розвинення функцій комплексної змінної в квазі-обернений інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2014. — **25**, 2. — С. 131–144.
- [13] *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. — Berlin: Springer, 1924. — IX+551 s.