Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, т. 12, № 5, 181–190

УДК 531.36;531.011

Про деякі особливості руху в обмеженій задачі трьох тіл *

С. П. Сосницький

Інститут математики НАН України, Київ; sosn@imath.kiev.ua

For the restricted circular three-body problem, we explore qualitative nature of motion. We consider sufficient conditions of boundedness for these motions (Lagrange stability) when there exists the Jacobian integral but the Hill condition is not satisfied.

Изучается качественный характер движения в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел. Рассматриваются достаточные условия ограниченности этих движений (устойчивости по Лагранжу) в случае, когда существует интеграл Якоби, но не выполняется условие Хилла.

1. Вступ

Розглянемо обмежену задачу трьох тіл, коли, як відомо [1, 2], маса m_3 третього тіла настільки мала порівняно з масами двох інших тіл ($m_1 \geq m_2 \gg m_3$), що її впливом на них можна знехтувати. При цьому зупинимося на випадку кругової задачі, коли існує інтеграл Якобі і, як показав Хілл, може існувати область обмежених рухів малої частки. Зокрема, ситуація виглядає таким чином: якщо стала рівня h інтеграла Якобі від'ємна і $h < h^* < 0$, де h^* – деяка критична стала, то область можливих рухів малої частки можна зобразити як об'єднання двох областей: області ω_H обмежених рухів за координатами (області Хілла) і області ω_{nc} обмежених рухів за швидкостями, тобто $\omega = \omega_H \bigcup \omega_{nc}$, причому $\omega_H \bigcap \omega_{nc} = \emptyset$. У зв'язку з визначенням згаданих областей див. також [3]. Далі для зручності умову: $h < h^* < 0$ називатимемо умовою Хілла.

* Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0112U001015

Як недавно показано в роботі автора [5], при $h < h^* < 0$, тобто при виконанні умови Хілла, рухи, що належать області ω_{nc}, при додатковій умові, що кругова задача плоска, є стійкими за Лагранжем і, таким чином, є обмеженими як за швидкостями, так і за координатами.

Структура конфігураційного простору різко змінюється, якщо $h^* < h < 0$, тобто умова Хілла не виконується. Тоді вище згадані області перестають існувати і виникає питання, що можна сказати про рух малої частки у цьому випадку. Відповідь на це питання ми шукатимемо нижче.

Оскільки ми розглядаємо лише випадок кругової обмеженої задачі трьох тіл, то вектори $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$ як розв'язки задачі двох тіл відповідають круговим орбітам точок з масами m_1 і m_2. Переходячи до відносних довжин векторів [4]:

$$\boldsymbol{\rho}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_{12}|}, \tag{1}$$

де $|\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_{12}|_0 = \mathrm{const}$, запишемо рівняння руху у формі:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_1{}'' &= \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_2{}'' &= -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_3{}'' &= -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu\frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут $\boldsymbol{\rho}_{ij} = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$, штрих означає диференціювання за безрозмірним часом

$$\tau = \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{|\mathbf{r}_{12}|_0{}^{3/2}} t,$$

де $G > 0$ — гравітаційна стала, а

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad 0 < \mu \le \frac{1}{2}.$$

Системі (2) також можна надати форми

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{12}{}'' &= -\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_3{}'' &= -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu\frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Поряд з рівняннями руху у формах (2) і (3) використовуватимемо також рівняння, які ми віднесемо до системи координат, що обертається з одиничною кутовою швидкістю навколо осі, перпендикулярної до площини обертання двох масивних тіл m_1 і m_2. У цьому випадку друге векторне рівняння системи (3) набуває вигляду [1]:

$$
\begin{aligned}
&x'' - 2y' = x - (1-\mu)\frac{x-\mu}{\rho_{13}^3} - \mu\frac{x+1-\mu}{\rho_{23}^3},\\
&y'' + 2x' = y - (1-\mu)\frac{y}{\rho_{13}^3} - \mu\frac{y}{\rho_{23}^3},\\
&z'' = -(1-\mu)\frac{z}{\rho_{13}^3} - \mu\frac{z}{\rho_{23}^3}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Тут $\rho_{13} = |\boldsymbol{\rho}_{13}|,\ \rho_{23} = |\boldsymbol{\rho}_{23}|$,

$$\boldsymbol{\rho}_{13}^2 = (x-\mu)^2 + y^2 + z^2, \quad \boldsymbol{\rho}_{23}^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2, \tag{5}$$

$$(x,y,z)^T = \mathbf{r}, \quad (\tilde{x},\tilde{y},z)^T = \boldsymbol{\rho}_3, \quad \mathbf{r}^2 = \boldsymbol{\rho}_3^2, \tag{6}$$

причому (x,y,z) — координати малої частки відносно системи координат, що обертається, а $(\tilde{x},\tilde{y},z)$ — її координати відносно інерційної системи координат.

Інтеграл Якобі для системи у формі (4) має вигляд

$$2T - 2U = 2h, \quad 2T = {x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2, \qquad h = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Далі зручно переписати рівності (5) у формі

$$\boldsymbol{\rho}_{13}^2 = -2\mu x + \mu^2 + \mathbf{r}^2, \quad \boldsymbol{\rho}_{23}^2 = 2(1-\mu)x + (1-\mu)^2 + \mathbf{r}^2, \tag{8}$$

звідки отримуємо

$$\mathbf{r}^2 = \boldsymbol{\rho}_3^2 = -\mu(1-\mu) + (1-\mu)\boldsymbol{\rho}_{13}^2 + \mu\boldsymbol{\rho}_{23}^2. \tag{9}$$

У зв'язку з (9) зауважимо також, що справедлива рівність

$$\boldsymbol{\rho}_3'^2 = -\mu(1-\mu) + (1-\mu)\boldsymbol{\rho}_{13}'^2 + \mu\boldsymbol{\rho}_{23}'^2. \tag{10}$$

Поряд з рівняннями руху у формі (4) для подальших наших цілей ми також будемо використовувати отримані в роботі [4] рівняння відстаней:

$$
\begin{aligned}
&{\rho_{13}^2}'' = 2v_{13}^2 - \frac{2}{\rho_{13}} + \\
&+\mu\left[\frac{2}{\rho_{13}} + (\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2 - 1) + \frac{1}{\rho_{23}}\left(\frac{1-\rho_{13}^2}{\rho_{23}^2} - 1\right)\right], \\
&{\rho_{23}^2}'' = 2v_{23}^2 - \frac{2}{\rho_{23}} + \\
&+(1-\mu)\left[\frac{2}{\rho_{23}} + (\rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 - 1) + \frac{1}{\rho_{13}}\left(\frac{1-\rho_{23}^2}{\rho_{13}^2} - 1\right)\right], \\
&{v_{13}^2}' + \frac{(\rho_{13}^2)'}{\rho_{13}^3} = -\mu\left[(\rho_{13}^2)'\left(1 - \frac{1}{\rho_{13}^3}\right) - (\rho_{23}^2)'\left(1 - \frac{1}{\rho_{23}^3}\right) + \right. \\
&\left. +2y\left(1 - \frac{1}{\rho_{23}^3}\right)\right], \qquad (11) \\
&{v_{23}^2}' + \frac{(\rho_{23}^2)'}{\rho_{23}^3} = (1-\mu)\left[(\rho_{13}^2)'\left(1 - \frac{1}{\rho_{13}^3}\right) - (\rho_{23}^2)'\left(1 - \frac{1}{\rho_{23}^3}\right) + \right. \\
&\left. +2y\left(1 - \frac{1}{\rho_{13}^3}\right)\right], \\
&2y' = v_{23}^2 - v_{13}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2,
\end{aligned}
$$

де $v_{13} = \boldsymbol{\rho}_{13}'$, $v_{23} = \boldsymbol{\rho}_{23}'$. Тут, як і в рівняннях (2) — (4), штрих означає диференціювання за безрозмірним часом τ. Хоч система рівнянь (11) є системою з надлишковими координатами [4], проте це не створює проблем при дослідженні якісних питань руху малої частки.

Характерною ознакою системи рівнянь (11) є те, що вона, на відміну від (4), віднесена до інерційної системи відліку з початком в центрі мас двох масивних тіл.

2. Деякі якісні аспекти руху в обмеженій круговій задачі трьох тіл

Означення 1. Рух $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ системи (2) назвемо *стійким* *за Лагранжем*, якщо виконується умова

$$c_1 \le |\boldsymbol{\rho}_{ij}(\tau)| \le c_2 \quad \forall \tau \in R =]-\infty, \infty[, \quad \forall i < j, \tag{12}$$

де c_1, c_2 — додатні сталі.

Означення 2. Рух $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ системи (2) назвемо *дистальним*, якщо виконується нерівність

$$|\boldsymbol{\rho}_{ij}(\tau)| \ge c_3 \quad \forall \tau \in R, \quad \forall i < j, \quad 0 < c_3 = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Твердження 1. *В умовах обмеженої кругової задачі трьох тіл виконуються рівності*

$$x = -\boldsymbol{\rho}_3 \boldsymbol{\rho}_{12}, \tag{14}$$

$$y = -\boldsymbol{\rho}_3 \boldsymbol{\rho}'_{12}. \tag{15}$$

Доведення. На підставі (5) маємо рівність

$$x = \frac{\boldsymbol{\rho}_{23}^2 - \boldsymbol{\rho}_{13}^2 - 1 + 2\mu}{2}, \tag{16}$$

яку далі перепишемо у вигляді

$$x = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2)^2 - (\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1)^2 - 1 + 2\mu\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\boldsymbol{\rho}_3(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) + \boldsymbol{\rho}_2^2 - \boldsymbol{\rho}_1^2 - 1 + 2\mu\right]. \tag{17}$$

Зауважуючи, що

$$\boldsymbol{\rho}_1 = -\mu \boldsymbol{\rho}_{12}, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = (1-\mu)\boldsymbol{\rho}_{12}, \tag{18}$$

а $\boldsymbol{\rho}_{12}^2 = 1$, бачимо, що рівність (14) випливає з (17).

Щоб отримати рівність (15), перепишемо рівність [4]

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} - \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23} = x' - 2y$$

у вигляді

$$(\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2)(\boldsymbol{\rho}'_3 - \boldsymbol{\rho}'_1) - (\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1)(\boldsymbol{\rho}'_3 - \boldsymbol{\rho}'_2) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2)^2 - (\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1)^2\right]' + 2y = 0. \tag{19}$$

Беручи до уваги (18), а також той факт, що у випадку кругової задачі

$$\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}'_{12} = 0, \tag{20}$$

на підставі (19) отримуємо рівність (15). □

Наслідком рівностей (14), (15) є рівності

$$x' = y - \boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}_3', \tag{21}$$

$$y' = -x - \boldsymbol{\rho}_{12}'\boldsymbol{\rho}_3', \tag{22}$$

які ми отримуємо, продиференціювавши (14) і (15).

У роботі автора [5] рівності (21) і (22) отримані іншим шляхом.

Твердження 2. *Нехай в умовах плоскої обмеженої кругової задачі трьох тіл $h^* < h < 0$, тобто умова Хілла не виконується. Тоді, якщо рух малої частки відповідає визначенню дистальності, то він є стійким за Лагранжем.*

Доведення. Оскільки рух дистальний, то на підставі перших двох рівнянь системи (11), використовуючи схему доведення теореми з роботи [5], робимо висновок, що він обмежений щодо координати x. Крім того, враховуючи дистальність досліджуваного руху, можемо стверджувати, що розв'язки системи (4) є неперервними і диференційованими на будь-якому сегменті $[\tau_{k1}, \tau_{k2}]$, який належить R_τ. Отже до них можна застосувати теорему про середнє [6]. У відповідності з останньою маємо рівність

$$[x(\tau_{k2}) - x(\tau_{k1})]\, y'(\tau_k^*) = [y(\tau_{k2}) - y(\tau_{k1})]\, x'(\tau_k^*), \quad \tau_k^* \in (\tau_{k1}, \tau_{k2}), \tag{23}$$

яку, беручи до уваги (21) і (22), можемо переписати у вигляді

$$\begin{aligned} &[x(\tau_{k2}) - x(\tau_{k1})]\,[-x(\tau_k^*) - \boldsymbol{\rho}_{12}'(\tau_k^*)\boldsymbol{\rho}_3'(\tau_k^*)] = \\ &= [y(\tau_{k2}) - y(\tau_{k1})]\,[y(\tau_k^*) - \boldsymbol{\rho}_{12}(\tau_k^*)\boldsymbol{\rho}_3'(\tau_k^*)]\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Ліва частина рівності (24) є обмеженою, оскільки $\boldsymbol{\rho}_{12}'$ і $\boldsymbol{\rho}_3'$ обмежені. Таким чином, незалежно від значення τ виконується нерівність

$$|\,[x(\tau_{k2}) - x(\tau_{k1})]\,[-x(\tau_k^*) - \boldsymbol{\rho}_{12}'(\tau_k^*)\boldsymbol{\rho}_3'(\tau_k^*)]\,| < c, \;\; 0 < c = \mathrm{const}.$$

Покажемо, враховуючи обмеженість $\boldsymbol{\rho}_{12}$, що це тягне за собою обмеженість розглядуваного руху по координаті y.

Дійсно, припустимо супротивне, що координата y – необмежена. Тоді існує така послідовність $\{\tau_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, що

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty \tag{25}$$

і без порушення загальності розгляду можемо вважати, що виконується рівність

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} y(\tau_k) = \infty. \tag{26}$$

У рівності (24) сегмент $[\tau_{k1}, \tau_{k2}]$ виберемо таким чином, щоб він містив точку τ_k. Тоді за рахунок такого вибору сегмента можемо досягнути того, щоб її права частина, враховуючи рівність (26), перевищувала c. Приходимо до суперечності, що свідчить про обмеженість руху по координаті y. Таким чином, досліджуваний плоский дистальний рух задовольняє означення 1, звідки випливає справедливість твердження 2. □

Зауваження. Як видно з формулювання твердження 2, щоб забезпечити обмеженість руху малої частки, ми замість умови Хілла ввели умову дистальності руху. Однак, на відміну від умови Хілла, яку порівняно просто задовольнити за рахунок відповідного вибору початкових умов, виконання умови дистальності є проблематичним, як для обмеженої задачі, так і для загального випадку задачі трьох тіл. На жаль, вказати такі початкові умови, які виокремлюють дистальний рух, ми не можемо. В цьому сенсі твердження 2 дає нам лише деяку уяву про фактори, достатні для забезпечення потрібної якості руху малої частки.

3. Про рівняння руху малої частки на основі співвідношень (14) і (15)

Застосуємо встановлені вище рівності (14) і (15) для отримання рівнянь руху малої частки у випадку плоскої кругової обмеженої задачі трьох тіл. Для цього рівності (21) і (22), які ми одержали на підставі (14) і (15), враховуючи, що $|\boldsymbol{\rho}_{12}| = |\boldsymbol{\rho}'_{12}| = 1$, перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x' - y &= -|\boldsymbol{\rho}'_3| \cos\alpha_1, \\ y' + x &= -|\boldsymbol{\rho}'_3| \cos\alpha_2, \end{aligned} \tag{27}$$

де $\cos\alpha_1 = \cos(\widehat{\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}_3{}'})$ і $\cos\alpha_2 = \cos(\widehat{\boldsymbol{\rho}'_{12}\boldsymbol{\rho}_3{}'})$. Оскільки задача кругова, то $\boldsymbol{\rho}'_{12} \perp \boldsymbol{\rho}_{12}$, а тому $\cos\alpha_2 = \sin\alpha_1$.

Обмежимось далі локальним варіантом рівнянь (27), розглядаючи їх в околі точок лібрації L_3 і L_4 [4]. Тоді у відповідності з (27), враховуючи (10), отримуємо

$$\begin{aligned} \xi' - \eta - y^0 &= -\sqrt{1-\mu(1-\mu)+(1-\mu)v_1+\mu v_2}\cos(\alpha^0+\alpha), \\ \eta' + \xi + x^0 &= -\sqrt{1-\mu(1-\mu)+(1-\mu)v_1+\mu v_2}\sin(\alpha^0+\alpha), \end{aligned} \tag{28}$$

де $x^0, y^0, \boldsymbol{\rho}'^{2\,0}_{13} = \boldsymbol{\rho}'^{2\,0}_{23} = 1, \alpha^0$ – значення відповідних змінних у точках лібрації L_3 і L_4, а $\xi, \eta, v_1, v_2, \alpha$ – їх малі збурення в околі L_3 і L_4 (у цьому зв'язку також див. [4]). На підставі (28) маємо

$$\cos\alpha^0 = \frac{y^0}{|\boldsymbol{\rho}'_3|^0},\ \sin\alpha^0 = -\frac{x^0}{|\boldsymbol{\rho}'_3|^0},\ |\boldsymbol{\rho}'_3|^0 = \sqrt{1-\mu(1-\mu)}, \tag{29}$$

а оскільки

$$\begin{aligned} \cos(\alpha^0+\alpha) &= \cos\alpha^0\cos\alpha - \sin\alpha^0\sin\alpha, \\ \sin(\alpha^0+\alpha) &= \sin\alpha^0\cos\alpha + \cos\alpha^0\sin\alpha, \end{aligned} \tag{30}$$

то відповідно до (28) у збуреному русі отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} \xi' - \eta &= -\frac{1}{2}y^0\frac{(1-\mu)v_1+\mu v_2}{1-\mu(1-\mu)} + \frac{1}{2}(1-2\mu)\alpha + O(u^2), \\ \eta' + \xi &= \frac{1}{2}x^0\frac{(1-\mu)v_1+\mu v_2}{1-\mu(1-\mu)} - y^0\alpha + O(u^2). \end{aligned} \tag{31}$$

Тут $u^2 = v_1^2 + v_2^2 + \alpha^2$.

Перепишемо останнє рівняння системи (11) у вигляді

$$y' = \frac{1}{2}(v_{23}^2 - v_{13}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2),$$

а отже в збуреному русі справедливе рівняння

$$\eta' + \xi = \frac{1}{2}(v_2 - v_1), \tag{32}$$

що на підставі другого рівняння системи (31) дозволяє отримати рівність

$$\alpha = \frac{[(1+\mu)v_1 - (2-\mu)v_2]}{4y^0[1-\mu(1-\mu)]} + O(v_1^2+v_2^2). \tag{33}$$

З допомогою (33) перше рівняння системи (31) можемо переписати у вигляді

$$\xi' = \eta - \frac{1}{3}y^0(v_1 + v_2) + O(v_1^2 + v_2^2)$$

і отже, використовуючи третє і четверте рівняння системи (11), сформувати для плоскої обмеженої задачі трьох тіл в лінійному наближенні рівняння збуреного руху в околі точок L_3 і L_4:

$$\begin{aligned}
\xi' &= \eta - \frac{1}{3}y^0(v_1 + v_2) + O(v_1^2 + v_2^2),\\
\eta' &= -\xi + \frac{1}{2}(v_2 - v_1),\\
v_1' &= y^0(2 - 3\mu)\xi + \frac{1}{2}(2 - 9\mu)\eta + \frac{2}{3}y^0(v_1 - 2v_2) + O(w^2),\\
v_2' &= y^0(-1 + 3\mu)\xi + \frac{1}{2}(7 - 9\mu)\eta + \frac{2}{3}y^0(2v_1 - v_2) + O(w^2),
\end{aligned} \tag{34}$$

де $w^2 = \xi^2 + \eta^2 + v_1^2 + v_2^2$.

Відповідне характеристичне рівняння для лінійного наближення системи (34) набуває форми

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0 \tag{35}$$

і, таким чином, за умови $27\mu(1 - \mu) < 1$ система (34) стійка в лінійному наближенні. Одержана умова узгоджується з раніше відомим результатом. Зокрема, до такої умови приходимо і на підставі лінійного наближення для рівнянь збуреного руху, що відповідають системі (4):

$$\begin{aligned}
\xi'' - 2\eta' &= \frac{3}{4}\xi - \frac{3}{2}y^0(1 - 2\mu)\eta + O(\xi^2 + \eta^2),\\
\eta'' + 2\xi' &= -\frac{3}{2}y^0(1 - 2\mu)\xi + \frac{9}{4}\eta + O(\xi^2 + \eta^2).
\end{aligned} \tag{36}$$

Безумовно важко говорити про переваги якоїсь із систем (34) або (36), не виходячи за рамки лінійного наближення. Це питання набуває сенсу, коли розглядати вищі наближення.

4. Висновок

Твердженням 2 в рамках обмеженої кругової задачі трьох тіл ми вказали достатні умови стійкості за Лагранжем малої частки, коли умова Хілла не виконується. При цьому істотним моментом для забезпечення стійкого за Лагранжем руху малої частки була вимога його дистальності, що не менш важливо і для загального випадку задачі трьох тіл [7]. Разом з тим не можна не звернути увагу на той факт, що нам вдалося отримати достатні умови стійкості лише для випадку плоскої обмеженої задачі, коли мала частка здійснює рух у тій же площині, в якій рухаються два масивні тіла. Виникає питання, чи ця обставина зумовлена способом доведення твердження 2, чи причина цього схована глибше. На жаль, ми не можемо відповісти на це питання, що залишає його відкритим.

[1] *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. — М.: Наука, 1982. — 656 с.

[2] *Рой А. Е.* Движение по орбитам. — М.: Мир, 1981. — 544 с.

[3] *Сосницький С. П.* Про стійкість руху за Хіллом у задачі трьох тіл // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, 10. — С. 1434–1440.

[4] *Sosnitskii S. P.* On the stability of triangular Lagrangian points in the restricted three-body problem // Astron. J. — 2008. — **135**, 1. — P. 187–195.

[5] *Сосницький С. П.* Про стійкість руху за Лагранжем в обмеженій задачі трьох тіл // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, 5. — С. 221–230.

[6] *Рудин У.* Основы математического анализа. — М.: Мир, 1976. — 319 с.

[7] *Sosnitskii S. P.* On the Lagrange stability of motion and final evolutions in the three-body problem // Applied Mathematics. — 2013. — **4**, doi:10.4236/am.2013.42057. — P. 369–377.