Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, т. 12, № 5, 235–240

УДК 519.2:518.5:518.61

Виявлення рухомого об'єкту, що перебуває у зоні пошуку протягом випадкових проміжків часу

Л. М. Шлепаков

Інститут математики НАН України, Київ; lshlepak@imath.kiev.ua

We study the problem on the target detection in the case when this target is assumed to be present in the search region for a random a mount of time and moves independent of the detection system. To find the target's detection probability we develop a random process by using the Markov recovery function corresponding to the semi Markov kernel.

Исследуется проблема обнаружения объекта, находящегося в зоне (области) поиска в течение случайных промежутков времени. Задача поиска рассматривается с независимыми объектом и поисковой системой. Для нахождения вероятности обнаружения объекта в течение заданного времени построен случайный процесс при помощи функции марковского восстановления, однозначно связанный с полумарковским ядром.

Розглядається задача пошуку, коли об'єкт та пошукова система діють незалежно. Для опису функціонування системи пошуку використовується випадковий процес, який не переривається у момент першого виявлення об'єкту, навіть якщо шукана характеристика пов'язана саме з цим моментом.

Нехай об'єкт то з'являється, то зникає в деякій випадковим чином обраній точці зони пошуку — відкритій області $X \subset \mathbf{R}^n$. Задано щільність розподілу $U(x)$ точки, в якій об'єкт "пульсує", за умови, що цей об'єкт то з'являється, то зникає в точці x із ймовірністю $\beta(x)$ у моменти 0, $T(x)$, $\lambda T(x), \dots$ і перебуває в тій же точці x протягом проміжку часу $\Delta(x)$, а потім знову зникає із зони пошуку до наступної появи у даній точці, де $U(x)$, $\Delta(x)$, $\beta(x)$ — задані кусково-неперервні на X функції, $\Delta(x) \leq T(x)$.

Виявлення об'єкту здійснюється великою пошуковою системою у задані проміжки часу t_0 таким чином, що дію окремих пошукових одиниць можна описати за допомогою функції $\lambda(x,t) : X \times \mathbf{R}^1 \longmapsto \mathbf{R}^1$ — стратегії пошуку [1]. Припустимо, що процес пошуку не припинено в момент першого виявлення об'єкту, а дії пошукової системи заздалегідь запрограмовано на час t_0. З урахуванням цієї особливості стратегія пошуку буде визначатися функцією $\lambda(x,t) : X \times R \to R$ з такими властивостями:

1) $\lambda(x,t) \geq 0$ для всіх $x \in X$, $t \geq 0$;

2) $\int\limits_X \lambda(x,t)dx = L(t)$, $L(t)$ — кусково-неперервна функція, $t \geq 0$;

3) $\lambda(x,t)\Delta t + o(\Delta t)$ — ймовірність того, що протягом проміжку часу $(t,\, t+\Delta t)$ було хоча б одне виявлення об'єкту за умови, що він перебуває в точці x у момент t. Ця ймовірність не залежить від поведінки об'єкту впродовж попередніх проміжків часу та здійснених раніше пошукових дій.

Потрібно знайти ймовірність $C(t_0)$ виявлення об'єкту впродовж даного часу t_0.

Функціонування системи пошуку опишемо стрибкоподібним випадковим процесом $\xi(t)$, $t \geq 0$, з фазовим простором $(X, \mathbf{B})$, де $\mathbf{B}$ — σ-алгебра борелівських множин на X.

Процес $\xi(t)$ потрапляє у стан $x \in X$ за таких умов:

- у нульовий момент часу, якщо x — точка знаходження об'єкту у зоні пошуку;
- у момент виявлення об'єкту в точці x.

Час перебування у певному стані триває до чергового моменту виявлення об'єкту.

Початковою умовою будемо вважати

$$P\{\xi(0) \in B\} = \int\limits_B U(x)dx. \tag{1}$$

Лема 1. *Процес $\xi(t)$ є неоднорідним за часом напівмарковським із щільністю функції марковського відновлення, яка задана співвід-*

ношеннями

$$h(0,t,x,B)=\begin{cases} P(x,t)\lambda(x,t)\beta(x), & \textit{якщо} \quad x\in B,\\ 0, & \textit{якщо} \quad x\notin B, \end{cases} \tag{2}$$

$$h(\tau,t,x,B)=\begin{cases} \lambda(x,t), & \textit{якщо} \quad x\in B,\\ & \exists n:\tau,\, t\in[nT(x),\, nT(x)+\triangle(x)],\\ P(x,t)\lambda(x,t)\beta(x), & \textit{якщо} \quad x\in B,\\ & \beta(x),\tau,\, t\in[nT(x),\, nT(x)+\triangle(x)],\\ 0 & \textit{– у інших випадках,} \end{cases} \tag{3}$$

де $0<\tau<t,\ x\in X,\ B\in\mathbf{B}$,

$$P(x,t)=\begin{cases} 1, \quad \textit{якщо} \quad t\in\bigcup_{n=0}^{\infty}[nT(x),\, nT(x)+\triangle(x)],\\ 0 \quad \textit{– у іншому випадку.} \end{cases} \tag{4}$$

Доведення. Час перебування процесу $\xi(t)$ у кожному із введених станів за умовами постановки задачі залежить від моменту потрапляння у відповідний стан та не залежить від попередньої еволюції процесу. Крім того, із стану x можливий перехід тільки у той же стан x. Таким чином, відповідна послідовність $\{\xi_n,\tau_n : n\geq 0\}$ є двовимірним ланцюгом Маркова. Визначимо процес $\xi(t)$ із щільністю функції марковського відновлення, однозначно пов'язаний із напівмарковським ядром, таким чином:

$$h(\tau,t,x,B)=q(\tau,t,x,B)+\int\limits_0^t ds\int\limits_X q(\tau,t,x,dy)h(s,t,y,B),$$

$$t\geq\tau,\ x\in X,\ B\in\mathbf{B}.$$

Доведемо співвідношення (3). Якщо відомо, що в момент $\tau>0$ у точці x було виявлено об'єкт, то для моменту $t>\tau$, який належить тому ж періоду неперервного перебування об'єкту в точці x, одержимо $h(\tau,t,x,\{x\})=\lambda(x,t)$. Для решти $t>\tau$ будемо мати $h(\tau,t,x,\{x\})=P(x,t)\lambda(x,t)\beta(x)$, оскільки впродовж періоду свого перебування у зоні пошуку ціль з'являється із ймовірністю $\beta(x)$.

Нехай $P(x,t)$ — ймовірність того, що у момент t об'єкт перебуває в зоні пошуку за умови, що x — точка ймовірного перебування об'єкту в зоні пошуку. Очевидно, що співвідношення (4) справджуються.

Співвідношення (2) з початковими умовами (1) доводимо аналогічно доведенню (3).

Введемо такі позначення :

$$W(B,t) = P\{\xi_1 \in B, \tau_1 \le t\}. \tag{5}$$

Тоді $W(B,t) = \int\limits_X U(y)Q(0,t,y,B)dy$. Припустимо, що функція $W(B,t)$ має щільність $q(x,t)$, тобто

$$W(B,t) = \int\limits_0^t \int\limits_B q(x,s)dxds. \tag{6}$$

Лема 2. *Справедливим є інтегральне рівняння Вольтерра*

$$U(x)h(0,t,x,\{x\}) = q(x,t) + \int\limits_0^t q(x,s)h(s,t,x,\{x\}ds). \tag{7}$$

Доведення. Проведемо доведення для першого стрибка процесу $\xi(t)$ з такими початковими умовами: $P\{\xi_0 \in B\} = \int\limits_B U(x)dx,\ \tau_0 = 0$. Ймовірність того, що у нескінченно малому проміжку $(t,\ t{+}dt)$, $t < 0$, процес $\xi(t)$ потрапив у множину $B \in \mathbf{B}$, дорівнює

$$\int\limits_B U(x)h(0,t,x,\{x\})dxdt,$$

а це є сума ймовірності того, що у множину B відбувся перехід із початкового стану, тобто $\tau_1 \in (t,\ t{+}dt)$, та ймовірності того, що відбувся не перший перехід процесу $\xi(t)$. Перший доданок суми з урахуванням (5), (6) дорівнює $\int\limits_B q(x,t)dxdt$. За умови, що перший перехід стався у момент s в один із станів $y \in X$, тобто $\tau_1 = s,\ \xi_1 = y$, ймовірність того, що протягом нескінченно малого проміжку часу $(t,\ t+dt)$ процес потрапив у множину B, дорівнює $h(s,t,y,B)dt$. Інтегруючи отриману умовну ймовірність з допомогою відповідної міри із щільністю $q(y,s)$, отримаємо другий доданок суми.

Таким чином, справедливим є рівняння

$$\int\limits_B U(x)h(0,t,x,\{x\})dxdt = \int\limits_B q(x,t)dxdt + \int\limits_0^t \int\limits_X q(y,s)h(s,t,y,B)dydsdt.$$

Враховуючи те, що з леми 2 випливає співвідношення $h(s,t,x,\{x\}) = 0$ для $y \neq x$, отримаємо рівняння (7).

Теорема. *Справедливим є співвідношення*

$$C(t_0) = \int\limits_X V(x,t_0)dx, \tag{8}$$

де функція $V(x,t)$ обчислюється за рекурентною формулою

$$V(x,t) = V(x,nT(x)) + \beta(x)\left[1 - e^{-G(nT(x),t)}\right][U(x)) - V(x,nT(x))],$$

$$nT(x) \le t \le (n+1)T(x), \quad n = 0,1,2,..., \; V(x,0) = 0, \tag{9}$$

$$G(a,t) = \int\limits_a^t P(x,s)\lambda(x,s)ds.$$

Доведення. Підставимо в рівняння (7) значення функції h із (2), (3). Використовуючи позначення $V(x,t) = \int\limits_0^t q(x,s)ds$, отримаємо ланцюжок диференціальних рівнянь

$$U(x)P(x,t)\lambda(x,t)\beta(x) = \frac{dV(x,t)}{dt} + V(x,nT(x))P(x,t)\lambda(x,t)\beta(x)+$$

$$+[V(x,t) - V(x,nT(x))]P(x,t)\lambda(x,t),$$

$$nT(x) \le t \le (n+1)T(x), \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

Кожне з рівнянь цього ланцюжка — лінійне диференціальне рівняння першого порядку стосовно $V(x,t)$, $nT(x) \le t \le (n+1)T(x)$. Для заданого $V(x,nT(x))$ єдиний розв'язок рівняння має вигляд (9). Із співвідношень (5), (6) та того, що момент першого виявлення об'єкту в термінах процесу $\xi(t)$ є моментом виходу з початкового стану, випливає (8).

Наслідок 1. *Якщо* $\beta(x) = 1,\ x \in X,$ *то*

$$C(t_0) = 1 - \int\limits_X dx U(x) e^{-G(0,t_0)}. \tag{10}$$

Доведення проводиться безпосередньо підстановкою $\beta(x), x \in X$ у (8) та (9).

Для вибору оптимальної стратегії пошуку у випадку, розглянутому в наслідку 1, тобто для знаходження функції $\lambda(x,t)$, яка задовольняє умови 1)–3) і така, що

$$C(t_0) = 1 - \int\limits_X dx U(x) e^{-G(0,t_0)}$$

приймає максимальне значення, можна також використати відомі результати для нерухомого об'єкту.

Наслідок 2. *Якщо* $\beta(x) = 1,\ \Delta(x) = T(x),\ x \in X,$ *то об'єкт буде нерухомим і співвідношення (10) збігається з результатами, широко відомими в теорії пошуку.*

Оптимальна стратегія пошуку для цього випадку є предметом вивчення у роботах [1,2]. Побудову моделей для оптимального селективного пошуку сигналів у багатоканальних системах зв'язку з використанням методів теорії марковських та напівмарковських випадкових процесів досліджено у роботі [3].

[1] *Хеллман О.* Введение в теорию оптимального поиска. — М.: Наука, 1985. — 248 с.

[2] *De Guenin, J.* Optimum distribution of effort: an extension of the Koopman Basic Theory // Oper. Research. — 1969. — **9**. — P. 1–7.

[3] *Шлепаков Л. Н., Вовкодав Н. Г.* Оптимальный поиск движущихся объектов в дискретной области // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **79**. — 144 с.