

Про збіжність апроксимант Паде q -аналога експоненти

А. П. Голуб, Н. М. Гаврилюк

*Інститут математики НАН України, Київ;
golub@imath.kiev.ua, nataliyagavrylyuk@gmail.com*

Convergence is proved and asymptotic is found for the Padé approximant of the q -exponential function and its generalisation.

Доказана сходимість и найдена асимптотика аппроксимаций Паде q -аналога экспоненты и его обобщения.

В [1] з використанням методу узагальнених моментних зображень побудовано апроксиманти Паде q -аналога експоненти (див. [2])

$$E_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q; q)_n} z^n = (-z; q)_{\infty}, \quad |q| < 1,$$

де q -символ Похгаммера (або зсунутий q -факторіал) $(a; q)_n$ визначається формулою

$$(a; q)_n = \begin{cases} (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1}), & \text{при } n \geq 1, \\ 1, & \text{при } n = 0, \\ \prod_{m=0}^{\infty} (1-aq^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n, & \text{при } n = \infty, \end{cases}$$

а також функції

$$f_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^{k+1} q^{k(k+1)/2+k\nu}}{(q^{\nu+1}; q)_{k+1}} z^k \quad (1)$$

при $\nu > -1$. Легко бачити, що

$$f_0(z) = \frac{E_q((1-q)z) - 1}{z}.$$

Було встановлено наступний результат.

Теорема 1. [1] Апроксиманти Паде функції (1) порядків $[N - 1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N - 1/N]_{f_\nu}(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}, \quad (2)$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^N \frac{(q^{-N}; q)_{N-k} (q^{N+\nu+1}; q)_{N-k}}{(1-q)^{N-k} (q; q)_{N-k}} q^{-(N-k)(N-k+2\nu-1)/2} z^k, \quad (3)$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{z^j}{(1-q)^{N-1-j}} \sum_{m=0}^j \frac{(q^{-N}; q)_{N-m} (q^{N+\nu+1}; q)_{N-m}}{(q; q)_{N-m} (q^{\nu+1}; q)_{j-m+1}} \times \\ \times q^{(j(j+1)-N(N-1))/2+m(N-j-1)+(j-N)\nu}. \quad (4)$$

Встановимо збіжність апроксимант (2).

Теорема 2. Апроксиманти Паде функції (1) порядків $[N - 1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, рівномірно збігаються до наближуваної функції на кожному компактній комплексній площині при $N \rightarrow \infty$.

Доведення. Запишемо знаменник (3) апроксиманти (2) у вигляді

$$Q_N(z) = \frac{(q^{-N}; q)_N (q^{N+\nu+1}; q)_N}{(q; q)_N (1-q)^N} q^{-N(N+2\nu-1)/2} \times \\ \times \sum_{k=0}^n \frac{(1-k)^k (-1)^k (q^{N-k+1}; q)_k}{(q; q)_k (q^{2N-k+\nu+1}; q)_k} q^{k(N+\nu)} z^k = \\ = \frac{(q^{-N}; q)_N (q^{N+\nu+1}; q)_N}{(q; q)_N (1-q)^N} q^{-N(N+2\nu-1)/2} (1 + R_N(z)).$$

Нехай z належить компактній області $K \subset \mathbb{C}$, такому, що $K \subseteq K_R = \{z : |z| \leq R\}$, $R > 0$. Очевидно, що

$$|1 - q^k| < 1 + |q|, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$|1 - q^m| > 1 - |q|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отже, $\forall N \in \mathbb{N}$

$$|R_N(z)| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{(1-k)^k (-1)^k (q^{N-k+1}; q)_k}{(q; q)_k (q^{2N-k+\nu+1}; q)_k} q^{k(N+\nu)} z^k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^N \frac{(1+|q|)^{2k}}{(1-|q|)^{2k}} |q|^{k(N+\nu)} R^k.$$

Позначимо

$$C = \left(\frac{1+|q|}{1-|q|} \right)^2 |q|^\nu R.$$

Отримаємо

$$|R_N(z)| < \sum_{k=1}^N C^k |q|^{kN} < |q|^N \sum_{k=0}^{\infty} C^{k+1} |q|^{kN} = \frac{C|q|^N}{1-C|q|^N} \rightarrow 0.$$

Отже,

$$Q_N(z) = \frac{(q^{-N}; q)_N (q^{N+\nu+1}; q)_N}{(q; q)_N (1-q)^N} q^{-N(N+2\nu-1)/2} (1+o(1)) \quad (5)$$

при $N \rightarrow \infty$. Звідси випливає, що, починаючи з деякого номера $N_0 = N_0(R) \in \mathbb{N}$, знаменники Q_N не мають нулів на компактi K . Для похибки апроксимації має місце формула (див. [3])

$$f_\nu(z) - [N - 1/N]_{f_\nu}(z) = \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \langle \mathcal{R}_z(B)x_N, Y_N \rangle,$$

в якій використано позначення:

$$(B\varphi)(t) = qt(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(tq^{n+1}) g^n$$

для будь-якої функції φ з простору

$$\mathcal{X}_\alpha = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists M > 0, |f(x)x^\alpha| < M, \forall x \in [0, 1]\}$$

при $-\nu < \alpha < 1$, резольвентна функція оператора B має вигляд (див. [1])

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_z(B)\varphi)(t) &= \left[(I - zB)^{-1} \varphi \right](t) = \\ &= \varphi(t) + zq \int_0^t \frac{\sigma(z\tau)}{\sigma(z\tau)} \varphi(q\tau) d_q \tau, \end{aligned}$$

де

$$\sigma(t) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + q^m(1 - q)t),$$

q -інтеграл Джексона визначається співвідношенням

$$\int_0^t \varphi(\tau) d_q \tau = t(1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(tq^n) q^n,$$

білінійна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathcal{X}_\alpha \times \mathcal{X}_\alpha$ має вигляд

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(\tau) \psi(\tau) d_q \tau,$$

$$x_N(t) = (B^N x_0)(t) = \frac{(1 - q)^N}{(q^{\nu+1}; q)_N} q^{N(N+1)/2 + N\nu} t^{N+\nu}, \quad N \in \mathbb{Z}_+,$$

а Y_N , $N \in \mathbb{Z}_+$, — поліноми, ортогональні за білінійною формою $\langle \cdot, \cdot \rangle$ з вагою t^ν , тобто q -аналоги поліномів Якобі, для яких справедливе наступне зображення (див. [2])

$$Y_N(t) = \sum_{j=0}^N \frac{(q^{-N}; q)_j (q^{N+\nu+1}; q)_j}{(q; q)_j (q^{\nu+1}; q)_j} (qt)^j.$$

Отже,

$$\begin{aligned} f_\nu(z) - [N - 1/N]_{f_\nu}(z) &= \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \left\langle \sum_{k=N}^{\infty} x_k z^{k-N}, Y_N \right\rangle = \\ &= \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} (\langle x_N, Y_N \rangle + \varepsilon_N(z)). \end{aligned}$$

Неважко переконатися, що $\varepsilon_N(z) = o(\langle x_N, Y_N \rangle)$, тому

$$\begin{aligned} f_\nu(z) - [N - 1/N]_{f_\nu}(z) &= \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \langle x_N, Y_N \rangle (1 + o(1)) = \\ &= \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \frac{1}{c_N^{(N)}} \langle Y_N, Y_N \rangle (1 + o(1)) = \end{aligned}$$

$$= \frac{z^{2N}}{c_N^{(N)} Q_N(z)} \frac{(1-q)q^{N(\nu+1)}}{1-q^{2N+\nu+1}} \left[\frac{(q; q)_N}{(q^{\nu+1}; q)_N} \right]^2 (1+o(1)).$$

Враховуючи формулу (5) і те, що

$$c_N^{(N)} = \frac{(q^{-N}; q)_N (q^{N+\nu+1}; q)_N}{(q; q)_N (1-q)^N} q^{-N(N+2\nu-1)/2},$$

в результаті отримуємо

$$\begin{aligned} f_\nu(z) - [N - 1/N]_{f_\nu}(z) &= \\ &= \frac{z^{2N} (1-q)^{2N+1} ((q; q)_N)^4 q^{N(N+3\nu)} (1+o(1))}{((q^{-N}; q)_N)^2 (q^{N+\nu+1}; q)_N (q^{N+\nu+1}; q)_{N+1} ((q^{\nu+1}; q)_N)^2}, \end{aligned}$$

що, як легко бачити, прямує рівномірно до нуля на кожному компактній комплексній площині. \square

Зауваження 1. Апроксиманти Паде функції E_q вивчалися також в [4–6].

- [1] Гаврилюк Н. М., Голуб А. П. Апроксиманти Паде q -аналогів експоненти та їх узагальнень // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, 4. — С.144–153.
- [2] Гаспер Дж., Рахман М. Базисные гипергеометрические ряды. — М: Мир, 1993. — 349 с.
- [3] Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.
- [4] Walliser R. Rationale approximation des q -analogons der exponentialfunktion und irrationalitätsaussagen für diese funktion // Arch. Math. — 1985. — **44**, 1. — S. 59–64.
- [5] Голуб А. П. Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, 6. — С. 803–808.
- [6] Голуб А. П. Об одной системе биортогональных полиномов и ее приложениях // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, 7. — С. 961–965.