Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, т. 12, № 5, 51–59

УДК 531.36

Підхід до дослідження стійкості імпульсних систем з запізненням

І. Л. Іванов

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ;
center@inmech.kiev.ua

The paper examines the asymptotical stability of systems of ordinary differential equations with both a delay and impulsive perturbations by using the Razumikhin approach. The obtained result is applicable to the case of an unbounded Lyapunov function so that limitations to the maximal length of the interval between the impulsive actions are not required.

Работа посвящена исследованию асимптотической устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием и импульсным воздействием с применением подхода Разумихина. Полученный в работе результат учитывает случай неограниченной функции Ляпунова и не налагает ограничений на максимальную длину интервалов между моментами импульсного воздействия.

1. Вступ

Теорія руху систем з запізненням при імпульсних збуреннях є тематикою, що активно розробляється [1–7]. У роботі [7] наведено огляд останніх результатів, присвячених дослідженню стійкості руху таких систем, та показано, яким чином ці результати можуть бути застосовані при розв'язанні задач механіки.

Один із широко використовуваних методів дослідження таких систем заснований на методі Ляпунова–Разуміхіна, що на початку застосовувався до систем з запізненням, але без імпульсних збурень. Отримувані на основі цього методу умови стійкості складаються з обмеження на похідну функції Ляпунова при виконанні умови Разуміхіна, а також обмеження на поведінку функції Ляпунова у точках розриву.

У даній статті запропоновано узагальнення результату публікації [5], у якій розглядається проблема стійкості лінійної системи з запізненням і імпульсною дією із застосуванням методу розривних функцій Ляпунова. Зокрема, при узагальненні розглядається більш широкий клас систем (системи можуть бути нелінійними).

2. Означення та допоміжний результат

Означення 2.1. Функція $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ належить класу Хана, якщо виконуються такі умови:
1) $f(0) = 0$;
2) $f(x) > 0$ при $x > 0$,
3) для всіх $x_2 > x_1 \geq 0 : \; f(x_2) \geq f(x_1)$.

Означення 2.2. Функція $v(t,x)$ належить класу V_0, якщо виконуються умови:

1) $v(t,x) \in C^1(E \times \mathbb{R}^n)$, де $E = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (\tau_k, \tau_{k+1})$, де $\tau_0 = 0$;

2) існує принаймні одна з границь: $\lim\limits_{t \to \tau_k - 0} v(t,x) = v(\tau_k, x), \; \lim\limits_{t \to \tau_k + 0} v(t,x) = v(\tau_k, x), \; k \in \mathbb{N}$.

Припущення А. *Для функції $v(t,x)$ існує функція a класу Хана, що $a(\|x\|) \leq v(t,x), \; \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.*

Припущення Б. *Для функції $v(t,x)$ існують функції a, b класу Хана, що $a(\|x\|) \leq v(t,x) \leq b(\|x\|), \; \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.*

Нехай $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t)$, $PC(X,Y)$ — простір функцій $X \to Y$, неперервних зліва з не більш ніж зчисленною множиною точок розриву першого роду, де $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}^n$.

Розглянемо систему з запізненням та імпульсною дією

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = f(t, x_t), \; t \neq \tau_k, \\ \Delta x(t) = I_k(x), \; t = \tau_k, \; k \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{1}$$

і початкові умови

$$x(t) = \varphi_0(t), \; t \in [-r, 0], \tag{2}$$

де $x \in PC([-r, +\infty), \mathbb{R}^n)$, $f \in C\left(\mathbb{R}, PC([-r,0), \mathbb{R}^n)\right)$ — ліпшицева по другому аргументу, $\tau_k \to \infty$, коли $k \to \infty$, $I_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\varphi_0 \in C([-r,0), \mathbb{R}^n)$.

Припустимо, що задача Коші (1), (2) має єдиний розв'язок.

Теорема 2.1. *(див. також [5]). Нехай система рівнянь* (1) *така, що існує функція $v(t,x)$ класу V_0, що задовольняє припущення А та умови*

(1) $D^-v(t,x(t))\Big|_{(1)} \leq 0$, *якщо* $v(t,\varphi(0^+)) > v(t+\zeta,\varphi(\zeta)),\ \zeta \in [-r,0]$, *де D^- — ліва верхня похідна Діні;*

(2) $v(\tau_i+0,x(\tau_i+0)) \leq v(\tau_i,x(\tau_i)),\ i \in \mathbb{N}$.

Тоді стан рівноваги $x=0$ системи (1) *стійкий.*

Доведення. Візьмемо $\varepsilon > 0$ та розглянемо область $\Gamma_{\alpha,t} = \{x \in \mathbb{R}^n | v(t,x) \leq \alpha\}$, виберемо $\alpha = a(\varepsilon), \delta < \min\{\|x\| : v(0,x) = \alpha\}$. Нехай $\|x_0\|_{[r,0]} < \delta(\varepsilon)$, тоді $x_0 \in \Gamma_{\alpha,0}$ та припустимо, що $\exists t_1 > 0,\ x(t_1;0,\varphi_0) \in \partial\Gamma_{\alpha,t_1},\ x(t;0,\varphi_0) \notin \Gamma_{\alpha,t_1}$ при $t \in (t_1,t_1+\delta_1), \delta_1 > 0$. Нехай $t_1 \neq \tau_j$. Розглянемо функцію $v(t) = v(t,x(t;0,\varphi_0))$ на множині $\mathbb{E}$. Оцінимо похідну $v(t)$ при $t = t_1$ з урахуванням умови $v(t,\varphi(0^+)) > v(t+\zeta,\varphi(\zeta)),\ \zeta \in [-r,0]$:

$$D^-v(t_1) \leq 0.$$

Якщо для деякого $t \in (t_1,t_1+\delta_1)$ виконується нерівність $v(t,x(t)) > v(t_1,x(t_1))$, то при $\lambda \in (0,1)$ отримаємо оцінку $D^-v(t_1+\lambda(t-t_1)) > 0$, що неможливо. Тому існує δ_2 таке, що $v(t,x(t)) \leq v(t_1,x(t_1))$ при всіх $t \in [t_1,t_1+\delta_2)$, звідки отримаємо $v(t,x(t)) \leq \alpha$, тобто $x(t;0,\varphi_0) \in \Gamma_{\alpha,t}$ при всіх $t \in [t_1,t_1+\delta_2)$. Якщо $t_1 = \tau_j$, тоді $v(\tau_j+0,x(\tau_j+0)) \leq v(\tau_j,x(\tau_j))$ та $v(\tau_j+0,x(\tau_j+0)) = \alpha$. Тому аналогічно можна отримати включення $x(t;0,\varphi_0) \in \Gamma_{\alpha,t}$ при всіх $t \in [t_1,t_1+\delta_2)$. Таким чином, $x(t;0,\varphi_0) \in \Gamma_{\alpha,t}$ при всіх $t \geq 0$. Звідси випливає стійкість стану рівноваги $x=0$ системи (1).

Теорему доведено. □

3. Основний результат

Сформулюємо умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги системи (1).

Теорема 3.2. *Припустимо, що для системи* (1) *існує функція $v(t,x)$ класу V_0, що задовольняє припущення Б, та додатно визначена функція $\omega(t,x)$ класу V_0, що задовольняє припущення А, такі, що:*

(1) $\frac{d}{dt}v(t,x(t))\big|_{(1)} \leq 0$, *якщо* $v(t+\zeta, x(t+\zeta)) \leq p(v(t,x(t)))$ *для* $\zeta \in [-r,0]$ *(умова Разуміхіна), де* $p(s) > s$ *при* $s > 0$, $p(0) = 0$, $p(s)$ *— неперервна;*

(2) $v(\tau_k, x(\tau_k^+)) \leq v(\tau_k, x(\tau_k))$*;*

(3) виконується будь-яка з таких умов:

(а) множина $M_1 = \Big\{t \geq 0 \Big| \frac{d}{dt}v(t,x(t))\big|_{(1)} \leq -\omega(t,x(t)), \sup\limits_{\zeta\in[-r,0]}\{v(t,x(t+\zeta))\} \leq p(v(t,x(t)))\Big\}$ *така, що* $\lambda(M_1) = \infty$*, де* $\lambda(.)$ *— міра Лебега на прямій;*

(б) множина $M_2 = \Big\{\sup\limits_{\zeta\in[-r,0]}\{v(t,x(t+\zeta))\} > p(v(t,x(t)))\Big\}$ *необмежена.*

Тоді нульовий стан рівноваги системи (1) *асимптотично стійкий.*

Доведення. Нульовий стан рівноваги системи (1) асимптотично стійкий згідно з теоремою 2.1. Доведемо асимптотичну стійкість цього стану рівноваги.

Оскільки $v(t,x)$ задовольняє припущення Б, то для деяких функцій a_v та b_v з класу Хана матиме місце оцінка $a_v(\|x\|) \leq v(t,x) \leq b_v(\|x\|)$.

Нехай виконується умова (3б). Позначимо $v_0 = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} v(t,x(t))$ та припустимо, що $v_0 > 0$. Завдяки умовам (1) та (2), вираз $\sup\limits_{\zeta\in[-r,0]}\Big\{v(t+\zeta, x(t+\zeta))\Big\}$ являє собою незростаючу функцію відносно t, тому має місце граничне співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\zeta\in[-r,0]} \Big\{v(t+\zeta, x(t+\zeta))\Big\} = v_0, \tag{3}$$

у якому наведена границя існує.

Беручи до уваги властивості функції $p(s)$, можна стверджувати, що для $s_0 < v_0$ існує таке число a, що $p(s-a) > s$ при $s > s_0$. З умови необмеженості множини M_2 випливає існування послідовності $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ такої, що

$$\sup_{\zeta\in[-r,0]} \Big\{v(\theta_k+\zeta, x(\theta_k+\zeta))\Big\} > p(v(\theta_k, x(\theta_k))) \tag{4}$$

і $\theta_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Розглянемо $v(\theta_k, x(\theta_k))$. З рівності (4) та оцінки

$$\sup_{\zeta\in[-r,0]} \big\{v(\theta_k + \zeta, x(\theta_k + \zeta))\big\} \geq v_0,$$

що є наслідком співвідношення (3), випливає, що $\sup\limits_{\zeta\in[-r,0]} \big\{v(\theta_k + \zeta, x(\theta_k + \zeta))\big\} > v(\theta_k, x(\theta_k)) + a$, тому для деяких $\zeta_k \in [-r, 0]$ отримаємо $v(\theta_k + \zeta_k, x(\theta_k + \zeta_k)) = \sup\limits_{\zeta\in[-r,0]} \big\{v(\theta_k + \zeta, x(\theta_k + \zeta))\big\}$. Беручи до уваги умови (1) та (2) теореми, можна зробити висновок, що $v(\theta_k+\zeta_k, x(\theta_k+\zeta_k)) > v(\theta_k+\eta, x(\theta_k+\eta))+a$ при всіх $\eta \in [0, |\zeta_k|]$, і, внаслідок цього, що $v(t, x(t))+a < v(\theta_k+\zeta_k, x(\theta_k+\zeta_k))$ для всіх $t > \theta_k$. Не зменшуючи загальності, можна вимагати, щоб $\theta_{k+1}+\zeta_{k+1}-\theta_k-\zeta_k > r$ (якщо ця умова не виконується, то в якості вихідної послідовності можна взяти таку підпослідовність послідовності $\{\theta_k\}$, для якої вона виконується). Тому для всіх $k \in \mathbb{N}$ матиме місце нерівність $v(\theta_{k+1} + \zeta_{k+1}, x(\theta_{k+1} + \zeta_{k+1})) < v(\theta_k + \zeta_k, x(\theta_k + \zeta_k)) - a$ та, відповідно, нерівність $v(\theta_{k+m} + \zeta_{k+m}, x(\theta_{k+m} + \zeta_{k+m})) < v(\theta_k + \zeta_k, x(\theta_k + \zeta_k)) - ma$ для будь-якого $m \in \mathbb{N}$. Це суперечить припущенню, що $v_0 = \lim\limits_{t\to\infty} v(x(t))$, якщо взяти m достатньо великим.

Припустимо тепер, що $\lambda(M_1) = \infty$. Доведемо спершу, що $\lim\limits_{t\to\infty,\, t\in M_1} v(t, x(t)) = 0$. Позначимо $M_3 = [-r, \infty]/(M_1 \cup M_2)$, тоді для всіх $t \in M_3$ виконуються нерівності

$$\sup_{\zeta\in[-r,0]} \big\{v(t + \zeta, x(t + \zeta))\big\} > p(v(t, x(t))),$$

$$-\omega(t, x(t)) < \dot{v}(t, x(t)) \leq 0.$$

Нехай $t' \in M_1 \cup M_3$, $t'' > t'$, $t'' - t' < r$. Покажемо, що

$$v(x(t'')) \leq v(x(t')). \tag{5}$$

Дійсно, якщо $t'' \in M_2$, тоді

$$p(v(x(t''))) \leq \sup_{\zeta\in[-r,0]} \big\{v(t'' + \zeta, x(t'' + \zeta))\big\},$$

$$p(v(x(t'))) > \sup_{\zeta\in[-r,0]} \big\{v(t' + \zeta, x(t' + \zeta))\big\}.$$

Припустимо, що $\sup\limits_{t\in[t',t'']}\{v(t,x(t))\} > \sup\limits_{\zeta\in[-r,0]}\big\{v(t'+\zeta,x(t'+\zeta))\big\}$, та, взявши до уваги, що завдяки умові (3) теореми наведені супремуми досягаються, позначимо $\widetilde{t} = \operatorname*{argmax}\limits_{t\in[t',t'']}\{v(t,x(t))\}$. Очевидно, що $\widetilde{t} \in M_1 \cup M_3$ та $D^- v(\widetilde{t},x(\widetilde{t})) \geq 0$, де під D^- розглядається оператор похідної зліва. Тому існує $\delta > 0$ таке, що $v(\widetilde{t}-\delta,x(\widetilde{t}-\delta)) < v(\widetilde{t},x(\widetilde{t}))$ і $(\widetilde{t}-\delta,\widetilde{t}) \subset M_1 \cup M_3$. Це суперечить умові (1) теореми.

Таким чином, враховуючи рівність

$$\sup_{\zeta\in[-r,0]}\big\{v(t+\zeta,x(t+\zeta))\big\} \leq \sup_{\zeta\in[-r,0]}\big\{v(s+\zeta,x(s+\zeta))\big\}, \tag{6}$$

вірну при всіх $s < t$, можна зробити висновок, що

$$v(x(t'')) \leq p^{-1}\Big(\sup_{\zeta\in[-r,0]}\big\{v(t'+\zeta,x(t'+\zeta))\big\}\Big) < v(x(t')). \tag{7}$$

Припустимо тепер, що $t'' \in M_1 \cup M_3$. Оскільки нерівність (7) у випадку $(t',t'')\cap M_2 = \emptyset$ тривіально випливає з умов (1) та (2) теореми, то припустимо, що $(t',t'')\cap M_2 \neq \emptyset$. Візьмемо $\widetilde{t} = \sup\limits_{t\leq t''}\{t|t \in M_2\}$, тоді при всіх $t \in (\widetilde{t},t'']$ отримаємо

$$v(t,x(t)) \leq v(\widetilde{t},x(\widetilde{t})) < v(t',x(t')).$$

Нерівність (5) була показана за умови $t''-t' < r$. Проте це обмеження можна зняти. Якщо $t'' \in M_2$, то нерівність (5) випливає з нерівностей (6) та (7) у відповідності до методу математичної індукції. Якщо $t'' \in M_1 \cup M_3$, тоді, взявши $t''' = \sup\limits_{t\leq t''}\{t|t \in M_2\}$ (отримаємо $t''' \in M_2$, бо M_2 замкнута), з урахуванням умов (1) та (2) теореми можна зробити висновок, що $v(x(t'')) \leq v(x(t''')) \leq v(x(t'))$.

З нерівності (5) випливає, що функція $v(t,x(t))$ монотонна на множині $M_1 \cup M_3$, а з умов (1) та (3а) теореми випливає, що ця функція задовольняє нерівності

$$\begin{aligned} v(t,x(t)) &\leq v(x,0) + \int\limits_{(0,t)\cap(M_1\cup M_3)} \dot{v}(s,x(s))ds \leq \\ &\leq v(x,0) - \int\limits_{(0,t)\cap M_1} \omega(s,x(s))ds \end{aligned} \tag{8}$$

для $t \in M_1 \cup M_3$. Доведемо, що $\lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ t\in M_1\cup M_3}} v(t,x(t)) = 0$. Припустимо, що

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in M_1\cup M_3}} v(t,x(t)) = v_0 > 0. \tag{9}$$

Таким чином, враховуючи оцінку (8), отримаємо

$$\begin{aligned} v(x(t)) &\le v(0,x(0)) - \int\limits_{(0,t)\cap M_1} \omega(s,x(s))ds \\ &\le v(0,x(0)) - \int\limits_{(0,t)\cap M_1} a(\|x(s)\|)ds \le \\ &\le v(0,x(0)) - \int\limits_{(0,t)\cap M_1} a(b_v^{-1}(v_0))ds \to -\infty,\ t\to\infty, \end{aligned}$$

де функція $a(.)$ задовольняє нерівність

$$a(\|x\|) \le \omega(t,x).$$

Отримане співвідношення суперечить припущенню (9).

Таким чином, $v(t,x(t)) \to 0$, $t\to\infty$ на $M_1 \cup M_3$ і, згідно з рівністю (7), на $[-r,\infty)$, що означає асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи (1).

Теорему доведено. $\square$

4. Наслідки та коментарі

Якщо в теоремі 3.2 $\omega(t,x) = g(v(t,x))$, де g належить класу Хана, то для асимптотичної стійкості виконання умови $v(t,x) \le b_v(\|x\|)$ не потрібне.

Теорема 4.3. *Нехай для системи* (1) *існує функція* $v(t,x)$ *класу* V_0*, що задовольняє припущення* A*, і функція* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *з класу Хана такі, що:*

(1) $\frac{d}{dt}v(t,x(t))\big|_{(1)} \le 0$*, якщо* $v(t,x(t+\zeta)) \le p(v(t,x(t)))$ *для* $\zeta \in [-r,0]$ *(умова Разуміхіна), де* $p(s) > s$ *при* $s > 0$, $p(0) = 0$, $p(s)$ *— неперервна;*

(2) $v(\tau_k, x(\tau_k^+)) \leq v(\tau_k, x(\tau_k))$*;*

(3) виконується будь-яка із таких умов:

(а) множина $M_1 = \Big\{t \geq 0 \Big| \frac{d}{dt} v(t, x(t))\big|_{(1)} \leq -g(v(t, x(t))), \sup\limits_{\zeta \in [-r,0]} \{v(t, x(t+\zeta))\} \leq p(v(t, x(t)))\Big\}$ *така, що* $\lambda(M_1) = \infty$*, де* $\lambda(.)$ *— міра Лебега на прямій;*

(б) множина $M_2 = \Big\{\sup\limits_{\zeta \in [-r,0]} \{v(t, x(t+\zeta))\} > p(v(t, x(t)))\Big\}$ *необмежена.*

Тоді нульовий стан рівноваги (1) *асимптотично стійкий.*

Для застосування корисним є випадок, коли $M_1 \bigcup M_2 = [-r, +\infty)$. Крім того, у теоремах 2.1 – 4.3 без зміни схеми доведення можна замінити параметр r в умові Разуміхіна на довільний додатній параметр r' (як правило, покладаючи $r' > r$).

Наслідок 4.1. *Нехай для системи* (1) *існує функція* $v(t, x)$ *класу* V_0*, яка задовольняє припущення Б, та монотонна функція* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*,* $g(0) = 0$*,* $g(s) > 0$*,* $s > 0$ *такі, що:*

(1) $\frac{d}{dt} v(t, x(t))\big|_{(1)} \leq -g(v(t, x(t)))$*, якщо* $v(t, x(t+\zeta)) \leq p(v(t, x(t)))$ *для* $\zeta \in [-r', 0]$ *(умова Разуміхіна), де* $p(s) > s$ *при* $s > 0$*,* $p(0) = 0$*,* $p(s)$ *— неперервна;*

(2) $v(\tau_k, x(\tau_k^+)) \leq v(\tau_k, x(\tau_k))$*.*

Тоді нульовий стан системи (1) *асимптотично стійкий.*

Отримані результати можуть бути застосовані при дослідженні механічних та іншого роду систем, що містять запізнення та імпульсну дію. Приклади застосування результатів такого типу при дослідженні стійкості енергосистем наведені у роботах [8, 9], у яких застосовуються у тому числі необмежені функції Ляпунова.

5. Висновок

Отриманий у теоремі 3.2 висновок щодо асимптотичної стійкості може бути ефективно застосований до систем, для яких функція Ляпунова у певні моменти чи періоди часу не спадає, маючи нульову похідну у точках неперервності. Добре відомо, що таку властивість мають деякі енергетичні функції ряду механічних систем.

Особливістю даного результату, а також сформульованих до нього наслідків, є те, що вони:

1) не накладають обмежень на максимальний та мінімальний інтервали між імпульсними збуреннями;

2) дозволяють працювати з необмеженими функціями Ляпунова.

[1] *Lakshmikantham V., Liu X.* Stability criteria for impulsive differential equations in terms of two measures // J. Math. Anal. Appl. — 1989. — **137**. — P. 591–604.

[2] *Liu X., Ballinger V.* Uniform asymptotyc stability of impulsive delay differential equations // Computers and mathematics with applications. — 2001. — **41**. — P. 903–915.

[3] *Tang X. H., Zhimin He, Yu J. S.* Stability theorem for delay differential equations with impulses // Applied Mathematics and Computation. — 2002. — **131**, 2–3. — P. 373–381.

[4] *Wang Q.* Stability and boundedness of impulsive systems with time delay. — PhD Thesis, Unix. of Waterloo, Ontario, Canada, 2007. — 204 p.

[5] *Слынько В. И.* Об условиях устойчивости движения линейных импульсных систем с запаздыванием // Прикладная механика. — 2005. — **41**, 6. — С. 130–138.

[6] *Stamova I. M.* Razumikhin–type theorems on stability in terms of two measures for impulsive functional differential systems // Note di Matematica. — 2006. — **26**, 2. — P. 69–80.

[7] *Мартынюк А. А.* Элементы теории устойчивости движения гибридных систем (обзор) // Прикладная механика. — 2015. — **51**, 3. — P. 3–66.

[8] *Иванов И. Л.* Устойчивость одной модели энергосистемы с запаздыванием и импульсным воздействием // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, 1. — С. 114–127.

[9] *Мартынюк А. А., Иванов И. Л.* О связной устойчивости трёхмашинной энергосистемы при импульсных возмущениях // Доповіді НАН України. — 2013. — № 7. — С. 64–71.