Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2015, т.12, №6, 220-223

О. М. Клименко, І. О. Блажко, Д. О. Кублицький, Д. О. Скидан, С. М. Ящук

Національний технічний університет України «КПІ», Київ
e.n.klimenko@gmail.com, iob.veritas@gmail.com, deniskublitskiy@gmail.com, skidan13@gmail.com, serg.yaschuk@gmail.com

Програма для зведення матриці до нормальної форми Арнольда відносно гладких перетворень подібності

V. I. Arnold (1971) constructed a miniversal deformation of each Jordan matrix J; that is, a simple normal form to which all matrices A close to J can be reduced by similarity transformations that smoothly depend on the entries of A. We describe a software for reducing a matrix in an neighborhood of J to Arnold's normal form by smooth similarity transformations and calculating the transforming matrix.

Нехай $J = J_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus J_{\lambda_t}$ — жорданова матриця, в якій

$$J_{\lambda_i} := J_{m_{i1}}(\lambda_i) \oplus \cdots \oplus J_{m_{ir_i}}(\lambda_i), \quad m_{i1} \geq m_{i2} \geq \cdots \geq m_{ir_i}, \tag{1}$$

$J_{m_{ij}}(\lambda_i)$ — клітка Жордана розміру $m_{ij} \times m_{ij}$ з власним числом λ_i та одиницями над діагоналлю, $\lambda_i \neq \lambda_j$ якщо $i \neq j$.

В. І. Арнольд [1] довів, що всі матриці $J + X$, що є достатньо близькими до J, можуть бути одночасно зведені деякими перетвореннями

$$J + X \mapsto \mathcal{S}(X)^{-1}(J + X)\mathcal{S}(X), \qquad \begin{array}{c}\mathcal{S}(X) \text{ аналітична} \\ \text{в } 0 \text{ та } \mathcal{S}(0) = I,\end{array} \tag{2}$$

до форми $J + \mathcal{D} :=$

$$\bigoplus_{i=1}^{t} \begin{bmatrix} J_{m_{i1}}(\lambda_i) + 0^{\downarrow} & 0^{\downarrow} & \dots & 0^{\downarrow} \\ 0^{\leftarrow} & J_{m_{i2}}(\lambda_i) + 0^{\downarrow} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0^{\downarrow} \\ 0^{\leftarrow} & \dots & 0^{\leftarrow} & J_{m_{ir_i}}(\lambda_i) + 0^{\downarrow} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$0^{\leftarrow} := \begin{bmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad 0^{\downarrow} := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

де зірочки замінюються комплексними числами, що залежать аналітично від елементів X. Кількість зірочок — мінімальна, яка може бути отримана перетвореннями форми (2), вона дорівнює корозмірності класу подібності матриці J.

Матриця (3) з незалежними параметрами замість зірочок називається *мініверсальною деформацією* матриці J.

О. М. Клименко та В. В. Сергейчук [2] побудували алгоритм, який зводить сім'ю матриць до нормальної форми Арнольда відносно подібності і будує перетворюючу матрицю $\mathcal{S}(X)$. Нами було реалізовано цей алгоритм за допомогою мови програмування C++.

Наша комп'ютерна програма складається з двох підпрограм. В першій підпрограмі ми зводимо задачу до випадку матриці J з єдиним власним числом і в другій підпрограмі розглядаємо цей випадок. Ми опишемо тільки першу підпрограму, бо вона реалізує алгоритм, який відрізняється від алгоритму з [2].

1) Вхідними даними підпрограми є:

- n — натуральне число;
- $J = J_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus J_{\lambda_t}$ ($t \geq 2$, див. (1)) і X — матриці розміру $n \times n$;

- ε — мале дійсне число для контролю значень матриці X, елементи якої не можуть перевищувати ε;
- μ — мале дійсне число, що задає точність обчислень.

2) Перевіряємо, чи дійсно елементи матриці X не перевищують ε.

3) Зображуємо матрицю $J+X$ у вигляді

$$J+X=\begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ C_2 & A_2 \end{bmatrix},$$

де $A_1 := J_{\lambda_1}+X_1$ (див. (1)).

4) Розв'язуємо рівняння Сильвестра $A_1Z+ZA_2=C_1$ за допомогою MatLab. Нехай його рішенням буде Z_1. Будуємо матрицю

$$S_1=I_n+\begin{bmatrix} 0 & Z_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5) Знаходимо матрицю

$$J+X_1 := S_1^{-1}(J+X)S_1=\begin{bmatrix} A_1' & C_1' \\ C_2 & A_2' \end{bmatrix}.$$

Перевіряємо, чи будуть елементи матриці C_1' меншими за задане μ. Якщо ні, то проводимо ці ітерації до тих пір, поки не досягнемо заданої точності μ. В результаті отримаємо

$$J+X'=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ C_2 & B_2 \end{bmatrix}.$$

6) Розв'язуємо рівняння Сильвестра $B_2Z+ZB_1=C_2$. Нехай його рішенням буде Z_2. Будуємо матрицю

$$S_2=I_n+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

7) Знаходимо матрицю

$$J+X_1' := S_2^{-1}(J+X')S_2=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ C_2' & B_2 \end{bmatrix}.$$

Перевіряємо, чи будуть елементи матриці C_2' меншими за задане μ. Якщо ні, то проводимо ці ітерації до тих пір поки не досягнемо заданої точності μ. В результаті отримаємо

$$J + X'' = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

8) Якщо $t \geq 3$, то таким же чином приводимо B_2 і так далі, поки не отримаємо блочно-діагональну матрицю

$$J + Y = (J_{\lambda_1} + Y_1) \oplus \cdots \oplus (J_{\lambda_t} + Y_t).$$

Література

[1] *Арнольд В. И.* О матрицах, зависящих от параметров // *Успехи матем. наук.* — 1971. — **26**, 2 (158). — С. 101–114.

[2] *Klimenko L., Sergeichuk V. V.* An informal introduction to perturbations of matrices determined up to similarity or congruence // *São Paulo J. Math. Sci.* — 2014. — **8**. — P. 1–22.