Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2015, т.12, №6, 48-67

И. Ю. Власенко, Д. А. Гольцов

Институт математики НАН Украины, Киев
vlasenko@imath.kiev.ua, adanos@i.ua

О классах топологической сопряженности квадратичных однородных внутренних полиномиальных отображений

We study classes of topological conjugacy of quadratic homogeneous polynomial maps of a plane which are internal maps. Partial results are achieved, but this problem needs futher research.

Досліджуються класи топологічної спряженості однорідних квадратичних відображень площини, які є внутрішніми відображеннями.

1. Введение

Отображения из одного пространства в другое топологически классифицируются как классы топологической эквивалентности, то есть замены координат гомеоморфизмами в образе и прообразе. В случае, когда отображение отображает пространство в себя, существуют и другие, более детальные способы классификации, дополнительно подразделяющие классы топологической эквивалентности. Это классификация с точностью до левого или правого действия гомеоморфизмом и классификация с точностью до топологической сопряженности (то есть описание свойств, инвариантных относительно сопряженности гомеоморфизмом[1]).

[1]Гомеоморфизмы $f, g : X \to X$ топологически сопряжены, если существует гомеоморфизм $h : X \to X$ такой, что $f \circ h = h \circ g$. Подробнее см. [1].

Для классификации с точностью до топологической сопряженности получено много результатов, относящихся к различным классам обратимых отображений — гомеоморфизмов и диффеоморфизмов. В то же время необратимые эндоморфизмы, по сравнению с обратимыми, сравнительно не изучены. Голоморфные отображения одной комплексной переменной являются на сегодняшний день одним из самых изученных классов необратимых внутренних отображений. Однако и для них классификация даже семейства полиномов второго порядка $z^2 + c$ является непростой задачей (см. [2]).

Отображения, отличные от голоморфных и некоторых других специальных классов необратимых отображений, таких, как одномерные отображения отрезка, как правило, представляют собой "terra incognita" для задач топологической классификации.

В работах [3,4] был введен ряд новых инвариантов топологической сопряженности внутренних (т.е. открытых дискретных) отображений, в качестве модели для которых использовались динамические инвариантные множества гомеоморфизмов.

Используя эти инварианты, в [5] для некоторого класса внутренних отображений, включающих отображения, у которых координатные функции являются однородными многочленами произвольной степени двух действительных переменных, были изучены некоторые топологические инварианты сопряженности, описаны их свойства и дан критерий топологической сопряженности.

Критерий топологической сопряженности, полученный в [5], применяется в данной работе для изучения границ классов топологической сопряженности квадратичных однородных внутренних полиномиальных отображений плоскости.

2. Предварительные сведения

Внутренним отображением будем называть непрерывный открытый (образ любого открытого множества открыт) конечнократный (у каждой точки число прообразов конечно) эпиморфизм. Подробнее о внутренних отображениях см. [6].

Отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовем *однородным порядка* k, если $\forall t \geq 0\ \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n\ f(t^k \overline{x}) = t^k f(\overline{x})$.

Пусть $\hat{\mathbb{C}}$ — двумерная сфера, являющаяся замыканием двумерного цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ точками $\overline{0}$ и ∞, и $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ — его внутреннее и однородное порядка $k > 1$ необратимое отображение, не имеющее в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ особых точек, с точками ветвления $\overline{0}$ и ∞.

Заметим, что не всякое однородное отображение является внутренним. Например, однородное порядка 2 отображение $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ складывает блинчиком окрестность точки $\overline{0}$ и внутренним не является.

Обозначим через $O_f^+(x)$ *положительную* полутраекторию точки x, то есть множество $\{f^n(x)|\ n \geq 0\}$. Обозначим через $O_f^-(x)$ *отрицательную* полутраекторию точки x, то есть множество $\{f^n(x)|\ n < 0\}$. *Широкой* траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество $\cup_{y \in O_f^+(x)} O_f^-(y)$.

В отличие от гомеоморфизмов, для которых траектория точки в точности состоит из ее положительной и отрицательной полутраекторий, у внутренних отображений широкая траектория точки имеет и другие точки. Введем еще одно естественное подмножество широкой траектории точки, которое нигде не пересекается с ее положительной и отрицательной полутраекториями, кроме как в самой точке.

Нейтральным сечением траектории точки x назовем множество $\{f^{-n}\left(f^n(x)\right) \mid n \geq 0\}$, которое будем обозначать $O_f^{\perp}(x)$.

Как легко видеть из определения, если среди образов x нет периодической точки, а f имеет в точках орбиты больше одного прообраза, то широкая траектория точки x распадается на бесконечное число нейтральных сечений, причем каждое нейтральное сечение состоит из бесконечного числа точек.

Определение 2.1. *Точка x называется* ***блуждающей*** *точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что для всех $m \in \mathbb{Z}$ выполнено условие $f^m(U) \cap U = \varnothing$.*

Общие определения суперблуждающих и равномерно суперблуждающих даны в [4]. Для краткости изложения дадим здесь упрощенное определение, используя тот факт, что в построенных примерах блуждающее множество двусвязно и гомеоморфно цилиндру, а сужение рассматриваемых отображений на этот цилиндр является локальным гомеоморфизмом.

Определение 2.2. *Точка x называется* ***нейтрально блуждающей*** *точкой f, если найдется такая ее связная окрестность U, что $\forall n \geq 0$ открытое множество $f^{-n}(f^n(U))$ распадается на компоненты связности такие, что сужение f на каждую компоненту связности является гомеоморфизмом и каждая компонента связности содержит в точности одну точку из множества $\{f^{-n}(f^n(x))\}$.*

Определение 2.3. *Точка x называется* ***суперблуждающей*** *точкой f, если она блуждающая и нейтрально блуждающая.*

Обозначим через Ω множество неблуждающих (не являющихся блуждающими) точек. Обозначим через $\Omega^{\perp}$ множество нейтрально неблуждающих (не являющихся нейтрально блуждающими) точек. Заметим, что это замкнутые множества.

Определение 2.4. *Блуждающая точка x называется* ***регулярной****, если для каждого $\epsilon > 0$ существует δ-окрестность $\delta(x)$ точки x, и $N > 0$ такие, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ такого, что $|k| > N$ выполняется условие: $f^k(\delta(x)) \subset \epsilon(\Omega)$, где $\epsilon(\Omega)$ — ϵ-окрестность множества Ω.*

Очевидно, что множество регулярных точек открыто.

3. Критерий топологической сопряженности двумерных однородных внутренних отображений

Напомним, что $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ — внутреннее и однородное порядка $k > 1$ необратимое (степени >1) отображение, не имеющее в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ особых точек, с точками ветвления $\overline{0}$ и ∞.

В работе [5] получены следующие свойства этих отображений:

(1) $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$, $\forall t > 0$, нейтральные сечения $O^{\perp}(\overline{x})$ и $O^{\perp}(t\overline{x})$ подобны с центром подобия в $\overline{0}$.
(2) У отображения f точки $\overline{0}$ и ∞ обладают открытыми бассейнами притяжения.
(3) На каждом луче, исходящем из центра координат, лежит ровно одна точка, не принадлежащая бассейнам притяжения точек $\overline{0}$ и ∞.
(4) Множество точек, не принадлежащих бассейнам притяжения точек $\overline{0}$ и ∞, образует гомеоморфную окружности нейтрально инвариантную (то есть содержащую с каждой своей точкой ее нейтральное сечение) жорданову кривую, разделяющую бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞.

Возьмем некоторый луч, выходящий из центра координат. Обозначим точку пересечения этого луча и γ_1 через p_1. Тогда точки луча можно представить как $p_t = tp_1$, $t > 0$. Используя t как коэффициент подобия, построим набор кривых γ_t, $t > 0$, являющихся гомотетиями кривой γ_1 относительно начала координат. По построению, это некоторое слоение цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$, причем это слоение нейтрально инвариантно.

Обозначим через S_ϕ гомеоморфное окружности множество лучей, исходящих из начала координат, где расстояние между двумя лучами равно минимуму углов между ними. Тогда f индуцирует на S_ϕ необратимое внутреннее отображение f_ϕ без особых точек, то есть накрытие.

В [4] полный топологический инвариант накрытий окружности описан в терминах нейтрально инвариантных множеств, и в этих терминах дан критерий топологической сопряженности накрытий окружности одной и той же степени.

Теорема 3.1 (Критерий топологической сопряженности, [4]). *Пусть f и g — внутренние и однородные порядка $k > 1$ необратимые отображения, не имеющие в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ особых точек, с точками ветвления $\overline{0}$ и ∞, и $f_\phi, g_\phi \colon S_\phi \to S_\phi$ — индуцированные ими внутренние отображения множества S_ϕ. f и g топологически сопряжены $\Longleftrightarrow$ f_ϕ и g_ϕ топологически сопряжены.*

4. Классы топологической сопряженности

В работе [5] однородные отображения были классифицированы в терминах инвариантных множеств индуцированного отображения на множестве лучей. Этот подход работает, если инвариантные множества сравниваемых отображений уже известны.

Однако такой важный частный случай однородных отображений, как однородные полиномиальные отображения, задаются коэффициентами своих координатных полиномиальных функций. В таком случае их инвариантные множества индуцированного отображения на множестве лучей заранее не известны. Поэтому для однородных полиномиальных отображений возникает задача вычислить по коэффициентам их координатных полиномиальных функций их топологические инварианты, чтобы к ним можно было бы применить результаты работы [5].

Отметим, что, несмотря на простоту постановки, задачи такого вида весьма сложны в реализации. Здесь уместно вспомнить и однопараметрическое семейство отображений прямой $x^2 + c$, для изучения которого понадобилось развитие методов эргодической динамики. С их помощью удалось установить, что на интервале значений параметра c, порождающих хаотическую динамическую систему, энтропия Колмогорова-Синая отображений различна, а значит, отображения попарно топологически не сопряжены.

Более общее комплексное однопараметрическое семейство отображений комплексной плоскости $z^2 + c$, порождает знаменитое множество Мальдеброта, изучению которого посвящено большое количество работ, а многие вопросы о его строении не решены до сих пор.

Рассматриваемая здесь задача сродни упомянутым выше задачам тем, что, как и они, она не решается "в лоб". Индуцированное отображение на множестве лучей можно явно вычислить. Однако далее из результатов работы [5] следует, что топологические инварианты индуцированнного отображения определяются наличием и взаимным расположением его периодических интервалов. Чтобы определить расположение периодических интервалов, необходимо исследовать периодические точки отображения, которых бесконечное число, выделить среди них неотталкивающие траектории, определить, входят ли такие траектории в границу периодических интервалов, и определить взаимное расположение периодических интервалов.

В работе [4] высказано предположение, что число периодических интервалов такого отображения конечно. Однако априори это число может быть как угодно большим, в частности, превосходить возможности компьютерного эксперимента. Поэтому описать топологические инварианты однородных полиномиальных отображений в терминах коэффициентов его координатных полиномиальных функций — крайне не простая задача даже для квадратичных полиномиальных функций.

Тем не менее, некоторые частичные результаты получить можно, чем мы и займемся далее. Для дальнейшего продвижения в будущем можно будет провести масштабные компьютерные эксперименты, в основе которых будут полученные здесь частичные результаты.

4.1. **Однородные квадратичные внутренние отображения.** Каждое однородное квадратичное отображение имеет вид:

$$f\colon (x,y) \mapsto (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,\\ b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2).$$

У него имеется единственная неподвижная особая точка $(0,0)$. Матрица Якоби f принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2a_{20}x + a_{11}y & a_{11}x + 2a_{02}y \\ 2b_{20}x + b_{11}y & b_{11}x + 2b_{02}y \end{pmatrix},$$

а ее детерминант равен

$$(2a_{20}x + a_{11}y)(b_{11}x + 2b_{02}y) - (2b_{20}x + b_{11}y)(a_{11}x + 2a_{02}y) =\\ = 2(a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20})x^2 + 4(a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20})xy + 2(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11})y^2.$$

Чтобы однородное квадратичное отображение было внутренним, необходимо, чтобы особая точка была изолированной, то есть, чтобы вырожденная кривая II порядка

$$(a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20})x^2 + 2(a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20})xy + (a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11})y^2 = 0$$

вырождалась в точку (представляла собой вырожденный эллипс в классификации кривых II порядка). Для этого необходимым и достаточным условием является неравенство $I_2 > 0$ для второго инварианта кривых II порядка. В наших обозначениях

$$I_2 = (a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20})(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) - (a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20})^2 > 0.$$

В таком виде однородные квадратичные отображения цилиндра являются шестипараметрическим семейством отображений. Для задачи топологического описания этого семейства такое количество параметров избыточно. Заменами координат выделим из этого семейства более простое для изучения подсемейство, содержащее представителей всех классов топологической сопряженности исходного семейства.

Легко видеть, что однородные квадратичные отображения с неподвижной особой точкой в $(0,0)$ обладают инвариантным слоением на координатные кривые $\phi = \text{const}$ в полярных координатах — исходящие из точки O лучи. Также, отображение симметрично относительно центра координат.

На окружности — пространстве исходящих из точки O лучей — наше однородное квадратичное внутреннее отображение индуцирует двулистное накрытие. Такое отображение всегда имеет как минимум одну неподвижную точку (лемма 7.5 в [4]), которой соответствует инвариантный луч. Поворотом системы координат можно добиться, чтобы этот инвариантный луч перешел в положительный луч координатной оси OX. При этом b_{20} будет равно 0, однородное квадратичное внутреннее отображение принимает вид

$$f\colon (x,y) \longmapsto \big(a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,\ b_{11}xy + b_{02}y^2\big),$$

а условие для I_2 принимает вид

$$I_2 = a_{20}b_{11}(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) - a_{20}^2 b_{02}^2 > 0.$$

Ограничение f на положительный луч координатной оси OX является отображением $a_{20}x^2$. Поскольку этот луч инвариантен, то $a_{20} > 0$ и $a_{20}x^2$ — гомеоморфизм с притягивающими точками 0 и ∞ и неподвижной отталкивающей точкой $\frac{1}{a_{20}}$. Тогда линейной заменой координат $x' = \frac{x}{\sqrt{a_{20}}}$ можно добиться, что $a_{20} = 1$, на луче координатной оси OX $(1,0)$ является отталкивающей неподвижной точкой, и однородное квадратичное внутреннее отображение принимает вид

$$f\colon (x,y) \longmapsto \big(x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,\ b_{11}xy + b_{02}y^2\big)$$

с условием $I_2 = b_{11}(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) - b_{02}^2 > 0$.

Рассмотрим нейтральное сечение неподвижной точки $(1,0)$. Вычислим ее нейтральные итерации[1]. $\Delta_1^{\perp}((1,0)) = \{(-1,0)\}$. Сосчитаем $\Delta_2^{\perp}((1,0))$. Для этого найдем прообраз точки $(-1,0)$:

[1] $\Delta_n^{\perp}(x) = f^{-n} \circ f^n(x) \setminus f^{-(n-1)} \circ f^{n-1}(x)$, см. тж. определение 3.7 в [4].

$$\begin{aligned} x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 &= -1 \\ b_{11}xy + b_{02}y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Если $b_{02} = 0$, то $x = 0$ и $y^2 = \frac{1}{-a_{02}}$.

Если $b_{02} \neq 0$, то $y = -\frac{b_{11}}{b_{02}}x$ и

$$x^2 = \frac{b_{02}^2}{b_{11}(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) - b_{02}^2} = \frac{b_{02}^2}{I_2} > 0.$$

В первом случае ($b_{02} = 0$) из условия $I_2 > 0$ получим, что $a_{02} < 0$. Тогда линейной заменой $y' = \sqrt{-a_{02}}y$ отображение в новой системе координат приводится к виду

$$f\colon (x, y) \mapsto (x^2 + a_{11}xy - y^2, b_{11}xy) \tag{4.1}$$

с условием $I_2 = b_{11}^2 > 0$, или, эквивалентно, $b_{11} \neq 0$.

При этом в новых координатах $\Delta_1^{\perp}((0,1)) = \{(-1,0)\}$, $\Delta_2^{\perp}((0,1)) = \{(0,-1),(0,1)\}$.

Во втором случае ($b_{02} \neq 0$) мы имеем

$$\Delta_2^{\perp}((0,1)) = \left\{ \left(\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}}, -\frac{b_{11}}{b_{02}}\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}} \right), \left(-\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}}, \frac{b_{11}}{b_{02}}\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}} \right) \right\}.$$

Возьмем линейную замену координат, которая ось OX оставляет неизменной, а прямую, соединяющую точки $O = (0,0)$ и $\left(+\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}}, -\frac{b_{11}}{b_{02}}\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}} \right)$ переводит в ось OY так, что образом точки $\left(\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}}, -\frac{b_{11}}{b_{02}}\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}} \right)$ станет точка $(0,1)$.

С помощью такой замены во втором случае ($b_{02} \neq 0$) внутреннее отображение в новой системе координат также приводится к виду (4.1).

Следствие 4.2. *Однородные внутренние квадратичные отображения цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus O$ линейно эквивалентны отображениям двухпараметрического семейства* (4.1).

Отметим, что для отображений семейства (4.1)

$$J_f = \det \begin{pmatrix} 2x + a_{11}y & a_{11}x - 2y \\ b_{11}y & b_{11}x \end{pmatrix} = 2b_{11}(x^2 + y^2).$$

Поэтому знак Якобиана J_f определяется знаком b_{11}. Соответственно, семейство (4.1) содержит 2 подсемейства: отображения, сохраняющие ориентацию, с $b_{11} > 0$, и обращающие ориентацию, с $b_{11} < 0$.

Изучим отображения этого семейства с точностью до топологической сопряженности.

Заметим, что однородные квадратичные отображения являются частным случаем однородных отображений из работы [5], поэтому для них справедливы утверждения лемм 1–5 и теорема 1 из этой работы.

Следствие 4.3. *У отображений семейства* (4.1) *замыкание нейтрального сечения точки* $(1, 0)$ *входит в общую границу бассейнов притяжения точек* O *и* ∞.

Пусть f — отображение семейства (4.1). Обозначим через $f_1(x, y) = x^2 + a_{11}xy - y^2$, $f_2(x, y) = b_{11}xy$ координатные функции отображения f.

Обозначим через S_ϕ гомеоморфное окружности множество лучей, исходящих из начала координат. Отображение f индуцирует на S_ϕ внутреннее отображение f_ϕ.

В качестве S_ϕ можно взять единичную окружность. Ее точки имеют вид $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, где φ — угловая координата. При этом

$$f_1(\varphi) = \cos 2\varphi + \frac{a_{11}}{2} \sin 2\varphi, \qquad f_2(\varphi) = \frac{b_{11}}{2} \sin 2\varphi.$$

Тогда внутреннее отображение $f_\phi \colon S_\phi \to S_\phi$ можно выразить из уравнений $\cos(f_\phi) = \frac{f_1}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}$, $\sin(f_\phi) = \frac{f_2}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}$, $\operatorname{ctg}(f_\phi) = \frac{f_1}{f_2}$. Из них последнее выражение наиболее удобно для вычислений. Получим

$$f_\phi(\varphi)=\begin{cases}\operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{b_{11}}\operatorname{ctg}(2\varphi)+\frac{a_{11}}{b_{11}}\right), & f_2>0\\ \operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{b_{11}}\operatorname{ctg}(2\varphi)+\frac{a_{11}}{b_{11}}\right)-\pi, & f_2<0, f_1>0\\ \operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{b_{11}}\operatorname{ctg}(2\varphi)+\frac{a_{11}}{b_{11}}\right)+\pi, & f_2<0, f_1\le 0\\ \frac{\pi}{2}, & f_2=0, f_1>0\\ -\frac{\pi}{2}, & f_2=0, f_1<0\end{cases}$$

Предположим, что φ не принимает значения 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Для удобства обозначим $a=a_{11}$, $b=b_{11}$. Тогда производная отображения $f_\phi(\varphi)$ имеет вид

$$(f_\phi)'(\varphi)=\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{b}\operatorname{ctg}2\varphi+\frac{a}{b}\right)\right)'=$$
$$=-\frac{1}{1+\left(\frac{2}{b}\operatorname{ctg}2\varphi+\frac{a}{b}\right)^2}\left(\frac{2}{b}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 2\varphi}\right)\cdot 2\right)=$$
$$=\frac{4}{b\cdot\sin^2 2\varphi\left(1+\left(\frac{2}{b}\operatorname{ctg}2\varphi+\frac{a}{b}\right)^2\right)}.$$

Таким выражением удобно пользоваться для всех точек, кроме 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Для вычисления значения $(f_\phi)'(\varphi)$ в этих точках удобнее воспользоваться выражением $\sin(f_\phi)=\frac{f_2}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}$, Из него следует, что в этих точках $(f_\phi)'=b$.

В работе [5] описаны классы топологической сопряженности индуцированного отображения f_ϕ, а значит, и отображений семейства (4.1). Для f_ϕ возникает следующая дихотомия: либо $\Omega^\perp(f_\phi)=S_\phi$, либо $\Omega^\perp(f_\phi)\neq S_\phi$.

4.4. **Отображения сопряженные с $z\mapsto z^2$.** Рассмотрим вначале случай, когда $\Omega^\perp(f_\phi)=S_\phi$. Тогда у f_ϕ нет периодических интервалов и f_ϕ топологически сопряжено стандартному линейному растяжению окружности $\phi\mapsto 2\phi$ либо $\phi\mapsto -2\phi$, в зависимости от того, f_ϕ сохраняет ориентацию окружности S_ϕ или нет.

Тогда для отображений семейства (4.1) имеют место результаты из [5] и главы 7 [4]. В частности, замыкание нейтрального сечения точки $(1, 0)$ является той гомеоморфной окружности жордановой кривой, которая разделяет бассейны притяжения точек O и ∞, и такой, что сужение на нее отображения семейства (4.1) порождает отображение f_ϕ. При этом, если f сохраняет ориентацию, то f топологически сопряжено z^2, а если обращает — то $\overline{z}^2$.

Возникает естественный вопрос: при каких значениях коэффициентов a и b у отображения f_ϕ, индуцированного отображением f семейства (4.1), имеет место $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$?

Для проверки можно было бы воспользоваться тем, что отображение f_ϕ гладкое, и сосчитать производную вдоль каждой периодической траектории. Если $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$, то все периодические траектории топологически отталкивающие. Если при некоторых значениях коэффициентов a и b у отображения f_ϕ найдется траектория, такая, что производная вдоль траектории (произведение значений производной во всех точках) меньше 1, то отображение f_ϕ имеет притягивающую траекторию, и $\Omega^\perp(f_\phi) \neq S_\phi$. И наоборот, если для всех периодических траекторий производная вдоль траектории больше 1, то все периодические траектории топологически отталкивающие и $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$. Если же для какой-то периодической траектории производная вдоль траектории равна 1, то для такой траектории требуется дополнительное исследование, является ли она топологически отталкивающей.

Однако такой критерий на практике не применим, так как для исследования бесконечного числа траекторий требуется произвести бесконечное число вычислений. Тем не менее, один важный частный случай этого критерия можно легко вычислить. Когда производная отображения f_ϕ строго больше 1 на всей окружности, то тем более для всех периодических траекторий производная вдоль траектории больше 1.

Ограничимся частным случаем, когда отображения семейства (4.1) сохраняют ориентацию, ($b > 0$). Вычислим, когда производная отображения f_ϕ строго больше 1 на всей окружности.

Как и выше, можно считать, что $\varphi \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Тогда из $b > 0$ получаем, что $b \cdot \sin^2 2\varphi \left(1 + \left(\frac{2}{b}\operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{a}{b}\right)^2\right) > 0$. Следовательно, $|f'(\varphi)| > 1$ влечет

$$\frac{4}{b \cdot \sin^2 2\varphi \left(1 + \left(\frac{2}{b}\operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{a}{b}\right)^2\right)} > 1,$$

$$b \cdot \sin^2 2\varphi \left(1 + \left(\frac{2}{b}\operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{a}{b}\right)^2\right) < 4,$$

$$b \cdot \left(\sin^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi \cdot \left(\frac{4}{b^2}\operatorname{ctg}^2 2\varphi + \frac{4a}{b^2}\operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{a^2}{b^2}\right)\right) < 4,$$

$$b \sin^2 2\varphi + \frac{4}{b}\cos^2 2\varphi + \frac{4a}{b}\cos 2\varphi \sin 2\varphi + \frac{a^2}{b}\sin^2 2\varphi < 4,$$

$$b^2 \sin^2 2\varphi + 4\cos^2 2\varphi + 4a\cos 2\varphi \sin 2\varphi + a^2 \sin^2 2\varphi < 4b,$$

$$\left(a^2 + b^2\right)\sin^2 2\varphi + 4a\cos 2\varphi \sin 2\varphi + 4\cos^2 2\varphi - 4b < 0,$$

$$\left(a^2 + b^2\right)\frac{(2\operatorname{tg}\varphi)^2}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\varphi\right)^2} + 4a\frac{2\operatorname{tg}\varphi\left(1 - \operatorname{tg}^2\varphi\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\varphi\right)^2}$$

$$+4\frac{\left(1 - \operatorname{tg}^2\varphi\right)^2}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\varphi\right)^2} - 4b < 0,$$

$$\left(a^2 + b^2\right)\operatorname{tg}^2\varphi + 2a\operatorname{tg}\varphi\left(1 - \operatorname{tg}^2\varphi\right) + \left(1 - \operatorname{tg}^2\varphi\right)^2 -$$

$$-b\left(1 + \operatorname{tg}^2\varphi\right)^2 < 0.$$

Используя замену $u = \operatorname{tg}\varphi$ получим:

$$\left(a^2 + b^2\right)u^2 + 2au\left(1 - u^2\right) + \left(1 - u^2\right)^2 - b\left(1 + u^2\right)^2 < 0,$$

$$(1 - b)u^4 - 2au^3 + \left(a^2 + b^2 - 2b - 2\right)u^2 + 2au + (1 - b) < 0.$$

Положим

$$q(u) = (1-b)u^4 - 2au^3 + \left(a^2 + b^2 - 2b - 2\right) u^2 + 2au + (1-b).$$

Заметим, что когда $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $u > 0$. Чтобы имело место неравенство $q_1(u) < 0$, для каждого $u > 0$ график полинома q_1 должен лежать под осью Ox. Рассмотрим два случая

1) Пусть $b = 1$. Тогда

$$\begin{gathered} q_1(u) = -2au^3 + \left(a^2 - 3\right) u^2 + 2au < 0, \\ u\left(2au^2 - \left(a^2 - 3\right) u - 2a\right) > 0, \\ 2au^2 - \left(a^2 - 3\right) u - 2a > 0. \end{gathered}$$

Рассмотрим последнее неравенство. При $a \neq 0$ оно задано полиномом второй степени. Отметим, что дискриминант левой части последнего неравенства равен

$$D = \left(a^2 - 3\right)^2 + 16a^2 > 0.$$

Он всегда положителен, а значит, уравнение всегда имеет корни и случай $a \neq 0$ не подходит. Если же $a = 0$, то получим неравенство $-3u^2 < 0$, которое не выполняется при $a = 0$. Поэтому при $b = 1$ имеем только нестрогое неравенство $-3u^2 \leq 0$ и f_φ не является строго метрически растягивающим отображением.

2) Предположим, что $b \neq 1$. Тогда

$$(1-b)u^4 - 2au^3 + \left(a^2 + b^2 - 2b - 2\right) + 2au + (1-b) < 0.$$

Сокращая на u^2, получим:

$$\begin{gathered} (1-b)\left(u^2 + \tfrac{1}{u^2}\right) - 2a\left(u - \tfrac{1}{u}\right) + \left(a^2 + b^2 - 2b - 2\right) < 0 \\ (1-b)\left(\left(u - \tfrac{1}{u}\right)^2 + 2\right) - 2a\left(u - \tfrac{1}{u}\right) + \left(a^2 + b^2 - 2b - 2\right) < 0. \end{gathered}$$

Сделаем замену $t = u - \frac{1}{u}$, тогда

$$(1-b)t^2 - 2at + \left(a^2 + b^2 - 4b\right) < 0.$$

Если u пробегает все множество положительных чисел, то t пробегает всю числовую прямую, поэтому последнее неравенство должно выполняться для всех $t \in \mathbb{R}$, то есть дискриминант левой части должен быть отрицательным и $1 - b < 0$. Таким образом,

$$\begin{gathered} D = 4a^2 + 4(b-1)\left(a^2 + b^2 - 4b\right) < 0, \\ a^2 + (b-1)\left(a^2 + b^2 - 4b\right) < 0, \\ a^2 b + b(b-4)(b-1) < 0, \\ a^2 + b^2 - 5b + 4 < 0, \end{gathered}$$

что дает нам открытый диск (внутренность эллипса):

$$a^2 + \left(b - \tfrac{5}{2}\right)^2 < \left(\tfrac{3}{2}\right)^2.$$

Заметим, что точка $a = 0$, $b = 2$ (соответствующая отображению z^2) лежит у него внутри, а точка $a = 0$, $b = 1$ лежит на граничной окружности этого диска. Также, этот диск целиком лежит в области $b > \frac{a^2}{4} + 1$ (or $a^2 < 4(b-1)$), которая будет рассмотрена далее.

4.5. **Отображения, не сопряженные с $z \mapsto z^2$.** В предыдущем разделе были найдены достаточные условия, когда отображения семейства (4.1) сопряжены z^2. Найдем теперь достаточные условия, когда отображения семейства (4.1) не сопряжены z^2. Для этого рассмотрим оставшийся случай, когда $\Omega^{\perp}(f_\phi) \neq S_\phi$. Тогда у множества $W^{\perp}(f_\phi)$ отображения f_ϕ есть периодические интервалы.

Как следует из результатов главы 7 [4], в этом случае каждому циклу периодических компонент отображения f_ϕ соответствует в $\mathbb{R}^2$ инвариантный для отображения f набор секторов, заполненных лучами, исходящими из начала координат. Границы таких периодических компонент состоят из периодических лучей, в сужении на каждый цикл из своих периодических компонент отображение f_ϕ является гомеоморфизмом, а внутри таких периодических компонент под действием отображения f_ϕ каждый луч со временем сходится к периодическому лучу внутри или на границе такой периодической компоненты.

Поскольку отображение квадратично, то на каждом периодическом луче существует единственная периодическая точка, которая разделяет бассейны притяжения точек O и ∞. Соответственно, на каждом движущемся луче существует единственная точка, которая принадлежит в зависимости от направления движения устойчивому или неустойчивому многообразию соответствующей периодической точки и разделяет бассейны притяжения точек O и ∞, причем точки, попадающие в бассейны притяжения точек O и ∞, являются суперблуждающими.

Таким образом, и в случае, когда $\Omega^\perp(f_\phi) \neq S_\phi$, бассейны притяжения точек O и ∞ также разделяет образованная динамически выделенными топологически инвариантными множествами жорданова кривая γ, в сужении на которую отображение f сопряжено f_ϕ.

При этом все периодические точки отображения f, кроме $O = (0,0)$ и ∞, лежат на жордановой кривой γ, и их можно естественно отождествить с периодическими точками отображения f_ϕ.

Если отображения семейства (4.1) сопряжены z^2, то у них есть ровно три неподвижные точки: $O = (0,0)$, ∞ и единственную неподвижную точку на жордановой кривой γ, которая по построению имеет координаты $(1,0)$.

Соответственно, если у отображения возникнут дополнительные неподвижные точки, то такое отображение не сопряжено z^2.

5. Дополнительные неподвижные точки

Найдем конечные неподвижные точки отображения

$$f\colon (x,y) \longmapsto (x^2 + axy - y^2, bxy),$$

т. е. решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + axy - y^2 = x \\ bxy = y \end{cases}$$

Если $y = 0$, то имеем уже упомянутые неподвижные точки $(1, 0)$ и $(0, 0)$. Пусть $y \neq 0$. Тогда $x = \frac{1}{b}$, и

$$\frac{1}{b^2} + \frac{a}{b}y - y^2 = \frac{1}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 + aby - b^2y^2 = b.$$

Пусть $t = by$. Рассмотрим уравнение $t^2 - at + b - 1 = 0$.

Если $D < 0$, то, как и выше, у нас только две (конечные) неподвижные точки $(1, 0)$ и $(0, 0)$ отображения f. Но так как $D = a^2 - 4b + 4$, то это достигается, если $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$.

Рассмотрим случай, когда $D = 0$. Тогда $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$, и $t = \frac{a}{2}$, следовательно, $x = \frac{1}{b}$, $y = \frac{a}{2b}$.

При $a = 0$, $b = 1$ все равно две неподвижные точки, так как $y = 0$, а при любых других значениях a и b, лежащих на параболе $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$, возникает 3 неподвижные точки: $(1, 0), (0, 0), \left(\frac{1}{b}, \frac{a}{2b}\right)$.

Если $D > 0$ ($b < \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$), то у нас может быть до четырех неподвижных точек:

$$(0, 0),\ (1, 0),\ \left(\frac{1}{b}, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2b}\right),\ \left(\frac{1}{b}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2b}\right).$$

Но если $b = 1$, то точка $\left(\frac{1}{b}, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2b}\right)$ совпадает с точкой $(1, 0)$ и остаются три неподвижные точки: $(0, 0), (1, 0), (1, a)$. Для остальных значений параметров из области $b < \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$ все четыре точки различны.

Рассмотрим неподвижные точки, лежащие на кривой γ. Когда $0 < b < 1$, то, сосчитав производную, легко видеть, что точка $(1, 0)$ — притягивающая, и две другие неподвижные точки образуют границы инвариантного интервала бассейна притяжения точки $(1, 0)$.

Когда $1 < b < \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$, то отображение f_ϕ также обладает инвариантным интервалом, но точка $(1,0)$ уже входит в границу этого инвариантного интервала, который представляет собой бассейн притяжения, образованный одной из оставшихся неподвижных притягивающих точек.

Суммируем полученные результаты в следующей теореме:

Теорема 5.1. *Однородные внутренние квадратичные отображения цилиндра* $\mathbb{R}^2 \setminus O$ *линейными заменами координат сводятся к отображениям двухпараметрического семейства* (4.1). *При этом для полученных коэффициентов справедливы следующие утверждения:*

(a) *если параметры* a *и* b *попадают внутрь области*

$$a^2 + \left(b - \tfrac{5}{2}\right)^2 < \left(\tfrac{3}{2}\right)^2,$$

то отображение топологически сопряжено голоморфному отображению z^2*;*

(b) *за исключением точки* $a = 0$ $b = 1$, *область* $b \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$ *в полуплоскости параметров* $\{(a,b)|b > 0\}$, *сохраняющих ориентацию отображений семейства* (4.1), *содержит отображения, которые топологически не сопряжены голоморфному отображению* z^2*;*

(c) *в области* $b \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$ *можно выделить следующие подмножества:*

- *точка* $a = 0$ $b = 1$*;*
- *прямая* $b = 1$ *без точки* $a = 0$ $b = 1$*;*
- *парабола* $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$ *без точки* $a = 0$ $b = 1$*;*
- *двумерные открытые области - связные компоненты дополнения к объединению вышеперечисленных подмножеств в полуплоскости параметров.*

такие, что отображения, параметры которых принадлежат подмножествам разных размерностей, топологически не сопряжены между собой, так как имеют разное число неподвижных точек.

Для дальнейшего описания классов топологической сопряженности отображений семейства (4.1) необходимо дальнейшее исследование их периодических точек.

При этом исследование точек периода 2 еще может быть выполнено аналитическим способом, так как сводится к уравнениям 4-й степени, однако исследование точек более высоких периодов приводит к уравнениям 8-й и больше степени, что потребует приближенных вычислений и экспериментов на компьютере. В работе [4] было высказано предположение, что число периодических интервалов у индуцированного отображения окружности будет конечным. Используя компьютерные эксперименты, можно попытаться оценить это число, затем доказывать полученную гипотезу методами одномерной динамики.

Список литературы

[1] *Кузаконь В. М., Кириченко В. Ф., Пришляк О. О.* Гладкі многовиди: геометричні та топологічні аспекти. — Институт математики НАН Украины. Киев, 2013. — **97**. — С. 500.

[2] *Cabrera Carlos.* On the classification of laminations associated to quadratic polynomials // *J. Geom. Anal.* — 2008. — **18**, 1. — P. 29–67.

[3] *Власенко И. Ю.* Особенности динамики бесконечнократных внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов. // *Труды Международной конференции "Геометрия в Одессе – 2008"*. — 2008. — С. 373–389.

[4] *Власенко И. Ю.* Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения. — Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Інститут математики НАН України, Київ, 2014. — **101**. — С. 225.

[5] *Власенко И. Ю.* Топологические инварианты однородных многочленов на цилиндре // *Proc. Intern. Geom. Center.* — 2015. — 1. — С. 7–11.

[6] *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. — Институт математики НАН Украины. Киев, 2008. — **70**. — С. 539.