

О. О. Пришляк, Д. М. Скочко

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка
prishlyak@yahoo.com, geroyasf@gmail.com*

Топологія потоків Морса з нерухомими точками на межі повного кренделя

We studied topological properties of polar Morse flows on 3-dimensional handlebody, all fixed points of which lie on the boundary and have no separatrices connecting the saddle. We built an analog of Heegaard decomposition and m-diagram, which is complete topological invariant of flow. Equivalence of m-diagrams and flow we check using the distinguishing graphs. We found all possible distinguishing graphs with no more than 5 vertex.

1. ВСТУП

Теорія Морса є потужним інструментом для дослідження властивостей многовидів з межею, а тому вона широко використовувалась і розвивалась в багатьох роботах, таких, як [1], [2], [3], [4], [5] та інших.

При дослідженнях топологічних властивостей функцій Морса на многовидах часто використовуються їх поля градієнтів, що в загальному випадку породжують потоки Морса-Смейла.

Якщо на такому полі зафіксувати значення функції в особливих точках, то по них (полю і цих значеннях) функція відновлюється однозначно з точністю до топологічної еквівалентності.

На кожному компактному многовиді функція Морса з мінімальним числом критичних точок має єдиний локальний мінімум та єдиний локальний максимум [6]. Відповідне поле градієнта має єдиний витік і єдиний стік. Такі поля називаються *полярними*. Якщо поле градієнта на двовимірній поверхні є полем Морса-Смейла, тоді у нього немає спільних сепаратрис сідлових точок.

Часто замість полів градієнта розглядають градієнтноподібні поля. Це поля, які в регулярних точках трансверсальні поверхням рівня, а особливі точки яких є критичними точками функції. З роботи С. Смейла [7] випливає, що такі поля для функцій Морса топологічно еквівалентні полям градієнта в деякій рімановій метриці. Для функцій Морса, що мають критичні точки на межі многовиду, можна розглядати аналогічні конструкції, і мають місце аналогічні результати.

На замкненому многовиді векторне поле завжди породжує потік [8]. У випадку компактного многовиду з межею векторне поле буде породжувати потік тоді і тільки тоді, коли воно дотикається до межі в кожній її точці [9]. Саме такі поля градієнта і породжені ними потоки ми будемо розглядати. При цьому вважатимемо, що всі особливі точки лежать на межі тривимірного многовиду. Крім того, ми будемо розглядати поля, що не мають траєкторій, які починаються і закінчуються в сідлових точках. Якщо на поверхні (межі тривимірного многовиду) ця умова виконується в загальному положенні, то на тривимірному многовиді вона накладає певні обмеження на многовид, так само, як і умова про єдиність витоку та стоку (витік на поверхні може не бути витоком на тривимірному многовиді — в нього може входити траєкторія). Зокрема з цих умов випливає, що тривимірний многовид з межею буде повним кренделем.

Зауважимо, що поля, які ми розглядаємо, є структурно стійкими.

Нехай W компактний многовид з межею ∂W . Позначимо через $\mathfrak{X}(W, \partial W)$ простір векторних C^r полів на W дотичних

до ∂W оснащений звичайною C^r топологією. В цьому просторі можна визначити структурну стійкість наступним чином: скажемо, що векторне поле $X \in \mathfrak{X}(W, \partial W)$ є C^r *структурно стійким*, якщо воно має C^r окіл \mathfrak{U} , такий, що кожен $Y \in \mathfrak{U}$ є топологічно еквівалентним до X , тобто існує гомеоморфізм h , що переводить орбіти X в орбіти Y та зберігає їх орієнтацію.

Для векторного поля $X \in \mathfrak{X}^\infty(W, \partial W)$ позначимо через $\Omega(X)$ множину неблукаючих точок поля X .

Означення 1.1. *Нехай $\widetilde{W} \in C^\infty$ замкнений многовид і C^r множина векторних полів з C^r топологією, $r \geq 1$, тоді векторне поле $X \in X^r(W)$ називається **полем Морса-Смейла**, якщо виконуються такі умови:*

- (1) $\omega(X)$ є простою, тобто вона має скінченну кількість орбіт, усі з яких гіперболічні;
- (2) якщо $\sigma_i, \sigma_j \in \omega(X)$, то нестійкий многовид $W^U(\sigma_i)$ трансверсальний до стійкого многовиду $W^S(\sigma_j)$.

Дослідженню полів Морса-Смейла присвячено багато робіт, зокрема [10], [11], [12].

Множина векторних полів Морса-Смейла є відкритою непорожньою множиною в $\mathfrak{X}^r(\widetilde{W})$, $r \geq 1$ і кожен її елемент структурно стійкий [13], [7].

Означення 1.2. *Полем Морса на многовиді з межею називається векторне поле $X \in X^r(W)$, що задовольняє такі умови:*

- (1) $\omega(X)$ є скінченною, тобто має скінченне число точок, усі з яких є гіперболічними особливими точками;
- (2) якщо $\sigma_i, \sigma_j \in \omega(X)$ і в точці $x \in W^U(\sigma_i) \cap W^S(\sigma_j)$ стійкий та нестійкий многовиди перетинаються нетрансверсально, то $x \in \partial W$;
- (3) поле дотичне до межі і його обмеження на межу є полем Морса-Смейла.

Потік, породжений полем Морса, називається *потокем Морса*.

Означення 1.3. *Полярним потоком називається потік, який має єдиний стік та витік, та обмеження якого на межу має також єдиний стік та витік.*

Означення 1.4. *Потік Морса називається простим, якщо у нього не існує траєкторій, що починаються і закінчуються в сідлових точках (сепаратрис, що з'єднують сідла).*

Для полярного потоку Морса, з точністю до топологічної еквівалентності, можливі чотири типи невироджених особливих точок на межі:

- (1) *витік*, координати якого (x_1, x_2, x_3) в локальних координатах x_1, x_2, x_3 на многовиді;
- (2) *стік* $(-x_1, -x_2, -x_3)$;
- (3) *A-сідло* $(x_1, -x_2, -x_3)$;
- (4) *B-сідло* $(-x_1, x_2, x_3)$.

Тут межа многовиду задається рівнянням $x_3 = 0$, при цьому випадки точок $(-x_1, -x_2, x_3)$ та $(x_1, x_2, -x_3)$ нами не розглядаються, оскільки ці точки є точками стоку на межі, що не є стоком на многовиді, або витоку на межі, що не є витоком на многовиді, що неможливо для полярного потоку Морса.

Надалі ми будемо розглядати потоки, у яких всі особливі точки лежать на межі і обмеження потоку на межу має єдиний стік та витік (полярні потоки).

Мета даної роботи: дослідити топологічні властивості простих полярних потоків Морса на повному кренделі, всі нерухомі точки яких лежать на межі; побудувати для них повний топологічний інваріант (діаграму, а також розрізняючий граф, який зручно використовувати для підрахунку топологічно нееквівалентних потоків).

2. m -ДІАГРАМА ПОТОКУ МОРСА

Надалі будемо розглядати ріманову метрику, яка має для кожного A -сідла таку властивість: для двох різних траєкторій, що виходять із A -сідла, їх довжини рівні та менші за довжини

траєкторій, що входять в ці сідла, і аналогічно для кожного B -сідла: дві траєкторії, що входять в нього, мають рівні довжини, менші за довжини всіх інших траєкторій, що виходять з нього. Таку ріманову метрику легко побудувати з довільної ріманової метрики, стискаючи до необхідного околиці дуг на зазначених вище траєкторіях.

Для кожної траєкторії потоку Морса на повному кренделі, крім особливих точок, та тих, що лежать на не стійких многовидах A -сідел та стійких многовидах B -сідел, знайдемо її середину, і розглянемо множину $F \subset W$ всіх таких середин траєкторій. При цьому довжина кожної траєкторії обчислюється від витoku до стоку, тобто для траєкторій, що лежать на стійких многовидах A -сідел знаходиться середина їх об'єднання з одною з двох траєкторій, які виходять з цього сідла (вони за побудовою мають рівні довжини, що менші довжин траєкторій стійкого многовиду), і аналогічно для нестійких многовидів B -сідел.

Зауваження 2.1. За побудовою, множина F є двовимірним многовидом з межею $\partial F \in \partial W$.

Локальна евклідовість F доводиться за допомогою гомеоморфізмів околиць точок на межу ε -околиці витoku або стоку для достатньо малого ε в канонічній системі координат, де кожній точці з F ставиться у відповідність точка на цій же самій траєкторії на межі околиці. Аналогічно доводиться, що коли F_1 та F_2 — дві поверхні, побудовані за рімановими метриками ρ_1 та ρ_2 , відповідно, то існує гомеоморфізм $h: W \rightarrow W$ такий, що

- (a) $h(\omega) = \omega$ для кожної траєкторії ω потоку, причому h зберігає орієнтацію ω якщо $\dim \omega = 1$;
- (b) $h(F_1) = F_2$.

Таким чином, побудова поверхні F з точністю до гомеоморфізму, що задовольняє умову (a), не залежить від вибору ріманової метрики.

Зауваження 2.2. Нехай Σ — множина всіх особливих точок потоку, а S — множина всіх пар «коротких» сепаратрис, тобто сепаратрис, що виходять з A -сідел та сепаратрис, що входять в B -сідла. Тоді поверхня F перетинає кожен орбіту з множини $W \setminus (\Sigma \cup S)$ в єдиній точці, а тому F можна ототожнити з простором траєкторій $W \setminus (\Sigma \cup S)$.

Відмітимо, що множина F розбиває многовид W на дві компоненти зв'язності, а тому можна розглядати многовид W як склейку з деяких двох многовидів M та N за деяким гомеоморфізмом частин їх меж. Многовиди M та N вибираються так, що кожна траєкторія в точках поверхні F направлена з многовиду N в многовид M . Тоді, за побудовою, всі A -сідла лежать в многовиді M , а B -сідла лежать в многовиді N .

Таке розбиття многовиду W є аналогом розбиття Хегора для замкнених многовидів, а поверхня F є аналогом поверхні Хегора.

Означення 2.3. *t -діаграма простого полярного потоку Морса — це трійка, що складається з:*

- (1) *поверхні F з межею;*
- (2) *набору простих дуг I типу — перетин стійких многовидів A -сідел з поверхнею F ;*
- (3) *набору простих дуг II типу — перетин нестійких многовидів B -сідел з поверхнею F .*

Лема 2.4. *У випадку розрізання F вздовж дуг першого (другого) типу, буде отримана однозв'язна область.*

Доведення. Розглянемо на многовиді F диски, що лежать на нестійких двовимірних многовидах та обмежені цими кривими та двома траєкторіями на межі. Розріжемо F за цими дисками. В утвореному многовиді F' послідовно стягнемо кожний з отриманих при розрізанні дисків в точку. Після стягнення отримаємо многовид, гомеоморфний F' , та векторне поле на

ньому з однією особливою точкою - витоком. Отже, цей многовид гомеоморфний півдиску D_+^3 , а поверхня F , після розрізання за кривими першого типу, гомеоморфна диску D^2 . \square

Далі під m -діаграмою будемо розуміти довільну поверхню з межею, на якій виділено два типи простих кривих, кінці яких з'єднують різні компоненти межі і такі, що, розрізавши поверхню за дугами одного типу, виходить однозв'язна поверхня.

Отже, за кожним простим полярним потоком Морса на повному кренделі побудовано m -діаграму (поверхня F та дуги I та II типу — це перетин стійких та нестійких двовимірних многовидів з поверхнею F).

3. Задання потоку Морса з допомогою m -діаграми

Покажемо, як за m -діаграмою можна відновити тривимірний многовид і потік на ньому. Повний крендель можна склеїти з двох многовидів за допомогою такої послідовності дій: до межі $\partial(D^2) = S^1$ приклеюються k смуг, що є 1-ручками $h_i^k = D^1 \times D^1$ за відображенням $\partial(D^1 \times D^1) \rightarrow S^1$. Позначимо

$$L_k = D^2 \cup h_1^1 \dots \cup h_k^1.$$

Слід зауважити, що приклеєні ручки не перехрещуються. Далі вклеєні смуги разом з диском потовщуються. Отриманий 3-многовид позначатимемо через $L_k^I = L \times I$.

Надалі будемо казати, що 3-многовид має L_k^I тип з основою L_k , якщо його можна побудувати вищезазначеним способом. Нехай M та N мають L_k^I тип. Визначимо деякий гомеоморфізм $h: M \rightarrow N$, що склеює їхні основи M_{L_k} та N_{L_k} , розглянуті як бордизми, а всі інші точки лишає на місці, див. рис. 3.1. Варто зазначити, що під дією цього гомеоморфізму компоненти межі M_{L_k} довільним чином вклеюються в компоненти межі N_{L_k} .

Таким чином після склеювання M та N буде отримано многовид W , $W \supset F = h(M_{L_k}) = N_{L_k}$. Тобто W розбивається на многовиди M та N .

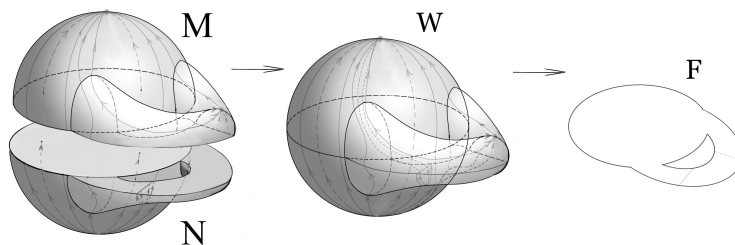


Рис. 3.1. Склейка многовидів M та N , що мають L_1^I тип.

Розглянемо поверхню F , що є результатом склеювання основи многовиду M з основою N за відображенням h та дуги першого типу на ній. Кожна така дуга є простим шляхом, що має кінці на різних компонентах межі поверхні F .

Для зручності будемо вважати, що дуги першого типу належать основі многовиду M , яку будемо позначати M_{L_k} , а дуги другого типу — основі многовиду N , яку позначатимемо як N_{L_k} . Приклад m -діаграми потоку див. на рис. 3.2.

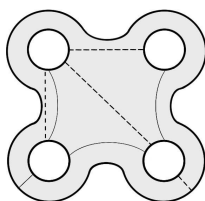


Рис. 3.2. Приклад m -діаграми потоку.

Означення 3.1. Дві m -діаграми називаються *гомеоморфними*, якщо існує гомеоморфізм їх поверхонь, що відображає криві першого типу на криві першого типу, а другого — на другого.

Означення 3.2. Векторні поля (потоки) називаються *топологічно еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм многовиду, який відображає траєкторії одного векторного поля (потoku) на траєкторії іншого, зберігаючи напрямки руху за траєкторіями, [9].

Теорема 3.3. Прості полярні потоки Морса топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх m -діаграми гомеоморфні.

Доведення. Припустимо, що існує топологічна еквівалентність $h: W_1 \rightarrow W_2$ полярних потоків Морса X_1 та X_2 на многовидах W_1 та W_2 відповідно. Нехай Σ_i — множина нерухомих точок X_i , а S_i — множина його сепаратрис, що виходять з A -сідел, та сепаратрис, що входять в B -сідла. Тоді $h(\Sigma_1) = \Sigma_2$ і $h(S_1) = S_2$, а тому

$$h(W_1 \setminus (\Sigma_1 \cup S_1)) = W_2 \setminus (\Sigma_2 \cup S_2).$$

Зокрема, h індукує гомеоморфізм між відповідними просторами шарів, тобто m -діаграмами.

Навпаки, припустимо, що m -діаграми гомеоморфні. Тоді цей гомеоморфізм задає бієкцію між траєкторіями векторних полів, і для кожної точки з поверхні F можемо продовжити її відображення на всю траєкторію, що проходить через цю точку за гомеоморфізмом, який зберігає пропорцію довжин дуг в заданій метриці. Таким чином отримаємо гомеоморфізм повних кренделів, що є топологічною еквівалентністю векторних полів. \square

Означення 3.4. *Родом g потоку Морса називається рід поверхні F його діаграми. Складністю c полярного потоку Морса називається число A -сідел.*

Якщо поверхню F розглядати як диск з приклеєними стрічками (1-ручками Смейла), то складність дорівнює числу стрічок. Звідси видно, що число B -сідел дорівнює числу A -сідел для полярного потоку Морса.

Зауваження 3.5. Для орієнтованої поверхні число компонент межі $k = 1 + c - 2g$, звідки складність $c = k + 2g - 1$.

4. Розрізняючий граф потоку Морса

Дослідимо, скількома різними способами можна склеїти многовиди M та N , що мають тип L_k^I . Для цього ототожнимо компоненти межі M_{L_k} з вершинами деякого графа G_M , а криві, що їх з'єднують, з його ребрами. Аналогічно N_{L_k} з G_N .

Твердження 4.1. *Для полярного потоку Морса роду нуль графи G_M та G_N є деревами.*

Доведення. При побудові графів G_M та G_N , коли компоненти границі стягуються в точки, поверхня роду нуль переходить у сферу. Отже, ці графи, є графами вкладеними у сферу. Якщо один з цих графів, нехай для визначеності граф G_M , не є деревом, то він містить цикл, який розбиває сферу на дві області. За побудовою, кожній області, на які граф G_M розбиває сферу, відповідає область, на яку криві першого типу розбивають поверхню F , а такій області відповідає витік. Тоді потік не є полярним. Отримане протиріччя доводить твердження. \square

Надалі будемо розглядати лише полярні потоки роду нуль.

Склеїмо граф G_M з графом G_N так, щоб вершини G_M були попарно ототожені з вершинами G_N і ребра G_M не перетинали ребер G_N . Отриманий об'єкт будемо називати *розрізняючим графом* потоку Морса і позначати G .

Лема 4.2. *Два розрізняючі графи ізоморфні, якщо існує ізоморфізм ребер та вершин одного в ребра та вершини іншого зі збереженням типу ребра та кількості і довжин циклів.*

З побудови розрізняючого графа випливає така теорема.

Теорема 4.3. *Дві діаграми гомеоморфні тоді і тільки тоді, коли відповідні їм графи ізоморфні.*

Зауваження 4.4. Для потоків роду 0 кожна дуга з'єднує різні компоненти. Якби вона починалась і закінчувалась в одній компоненті межі, то розрізання вздовж цієї дуги зробило б поверхню незв'язною, або зменшило б її рід, що не можливо.

Далі знайдемо всі розрізняючі графи для потоків роду 0 складності менше 4. Для випадку склеювання двох многовидів M та N , що мають L_1^I тип отримаємо графи G_M та G_N , які будуть деревами на двох вершинах, а тому існує лише один варіант для того, щоб їх склеїти (рис. 4.3).

На рис. 4.3 і всіх подальших рисунках ребра графа G_M будуть зображатись прямими відрізками, а графа G_N — дугами.



Рис. 4.3. Склейки дерев на двох вершинах.

Для випадку склеювання двох многовидів M та N , що мають L_2^I тип, отримаємо графи G_M та G_N , які будуть деревами на трьох вершинах, всього існує два варіанти їх склейки (рис. 4.4).



Рис. 4.4. Склейки дерев на трьох вершинах.

Якщо склеюються два многовиди M та N , що мають L_3^I тип, то графи G_M та G_N будуть деревами на чотирьох вершинах, а тому всього існує 12 варіантів склейок і відповідних їм розрізняючих графів (Рис. 4.5).

Кожному із отриманих розрізняючих графів відповідає свій полярний потік Морса-Смейла.

Нехай S_n — кількість полярних потоків Морса-Смейла для склейок многовидів L_n^I типу. Тоді $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 12$. Для розгляду випадків $n \geq 4$ потрібно розробити певний алгоритм та скористатись обчислювальною технікою.

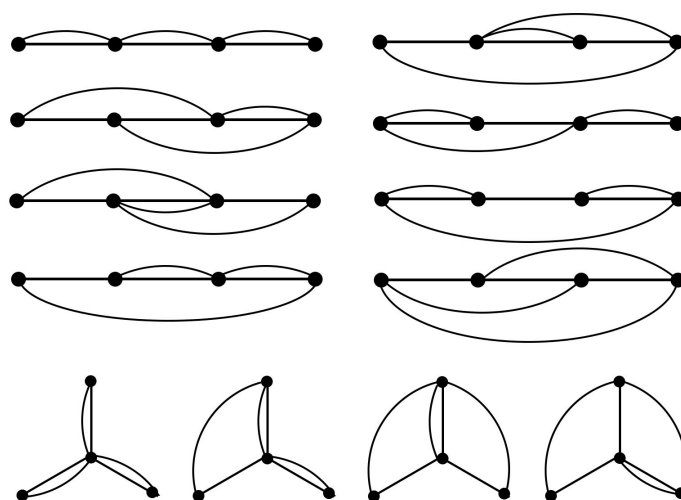


Рис. 4.5. Склейки дерев на чотирьох вершинах.

5. Розрізняючі графи для потоків Морса роду 0 складності 4

Нехай многовиди M та N мають тип L_4^I , і, як результат, графи G_M та G_N матимуть по 5 вершин. На 5 вершинах можна побудувати три неізоморфні дерева (рис. 5.6).

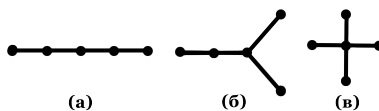


Рис. 5.6. Древа на п'яти вершинах.

Таким чином кожному з многовидів M та N може відповідати один з трьох графів, а тому існує 6 різних типів склейок двох дерев на п'яти вершинах (рис. 5.7).

Розглянемо граф з точки зору властивостей кожної вершини, таких, як її степінь і віддаленість від кінців (висячих вершин), враховуючи всі можливі симетрії. Для дерева рис. 5.6(а) маємо три типи вершин: крайня, середня та вершина між крайньою і середньою, аналогічно для дерева рис. 5.6(б) матимемо 4 типи вершин, для рис. 5.6(в) — 2.

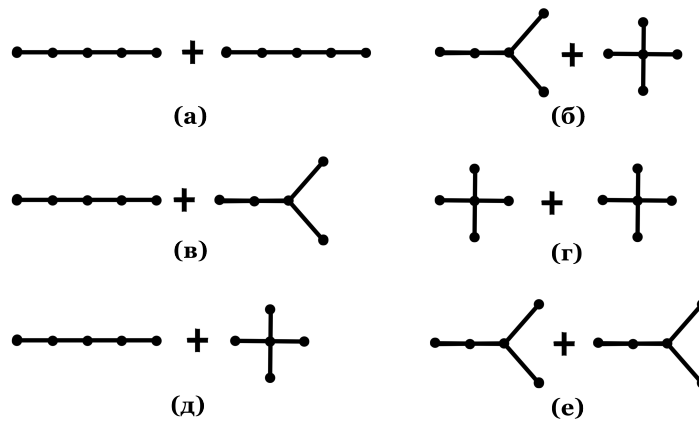


Рис. 5.7. Всі можливі склейки двох дерев на п'яти вершинах.

Опишемо процес вклеювання графа G_M в G_N на прикладі варіанту з рис. 5.7(в). Для цього фіксується одна з точок графа G_M і розглядаються всі можливі варіанти приклеювання до неї різних типів точок графа G_N . Нехай лівий граф з рис. 5.7(в) буде графом G_M , а правий G_N . Зафіксуємо крайню ліву точку в G_M і визначимо, скільки різних типів точок в G_N . Отримаємо чотири варіанти. Далі для кожного із цих 4 варіантів зафіксуємо наступну точку з G_M і визначимо кількість варіантів точок з G_N , із тих, що лишилися — їх по три варіанти. Таким перебором знаходимо всі варіанти m -діаграм.

Зауваження 5.1. В отриманій множині графи будуть повторюватись. Даний факт є наслідком випадків склейок однакових типів графів, оскільки при переборі не враховуються порядок перебору першого графа з порядком перебору іншого.

Цю ситуацію легко виправити, якщо дублювати отриману множину графів і поміняти місцями в новому наборі кожен перший з кожним другим графом, а потім порівняти ці множини.

Таким чином можна сформулювати алгоритм для пошуку склейок графів:

- (1) Виберемо з множини неізоморфних дерев пару графів G_M та G_N , що відповідатиме парі многовидів;
- (2) Фіксуємо довільну вершину G_M і знаходимо кількість вершин графа G_N , які до неї можна приклеїти;
- (3) Фіксуємо наступну точку G_M і повторюємо попередній перебір серед точок G_N , що ще не були вибрані;
- (4) Повторюємо кроки 1-3, поки не будуть перебрані всі точки графа G_M ;
- (5) Дублюємо множину графів та міняємо в копії місцями усі G_M з усіма G_N ;
- (6) Порівнюємо вхідну множину пар графів з модифікованою, відкидаємо ті, що повторюються.

На основі даного алгоритму створено відповідну програму, за результатами, якої було визначено кількість розрізняючих графів, ребра яких не перетинаються:

Розглянувши випадок рис. 5.7(а) склейки двох дерев з двома листками, було отримано 23 розрізняючі графи рис. 5.8.

Випадок рис. 5.7(б) ілюструє вклеювання дерева з трьома листками в дерево з чотирма. Склейок цього типу існує 8, їм відповідає 8 полярних потоків Морса-Смейла рис. 5.9.

Для випадку рис. 5.7(в) вклеювання дерева з двома листками у дерево з трьома листками отримано найбільшу кількість склейок — 30. Це спричинено тим, що один з графів має 3 типи

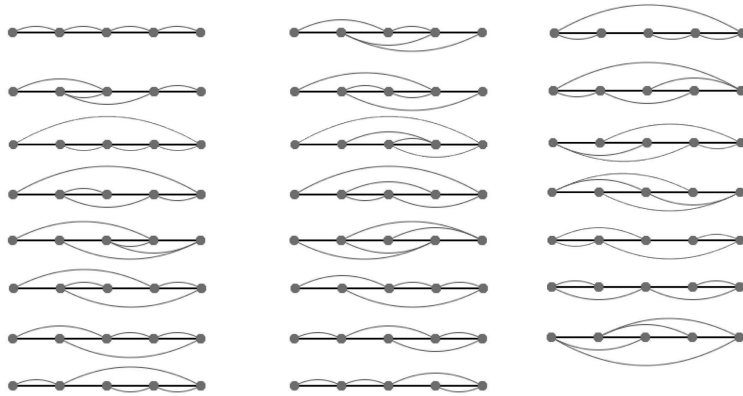


Рис. 5.8. Склейки ізоморфних дерев з двома листком.

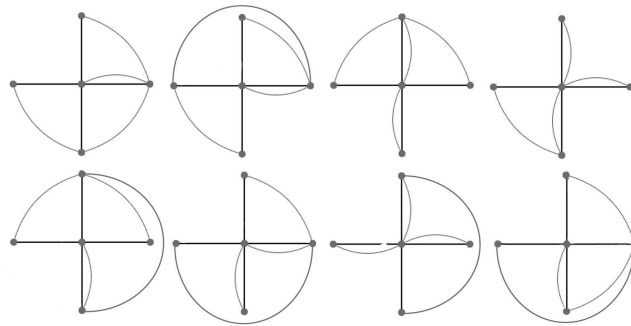


Рис. 5.9. Склейки дерев з трьома та чотирма листками.

вершин, а інший 4. Таким чином для цього типу склейки існує 30 полярних потоків Морса-Смейла рис. 5.10.

У випадку рис. 5.7(г), коли склеюються дві зірки — графи з чотирма листками, було отримано лише 2 графи, які відповідають двом полярним потокам Морса-Смейла рис. 5.11. Це

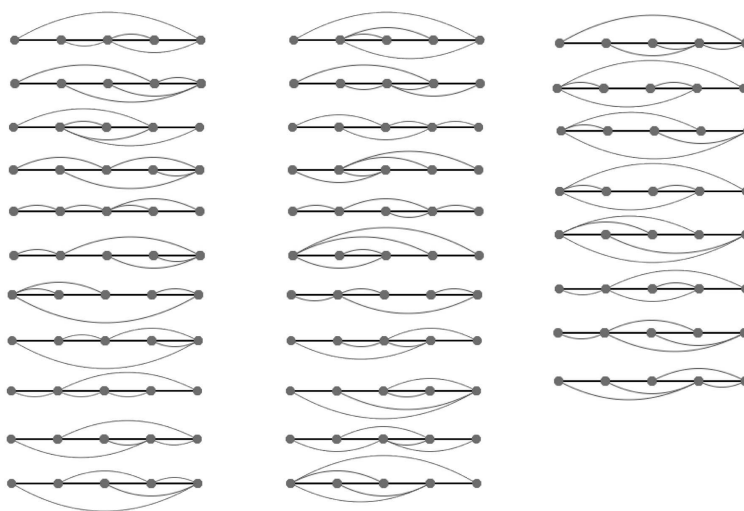


Рис. 5.10. Склейки дерев з двома та трьома листками.

найменша кількість серед 6 типів склеювань, що зумовлено тим, що графи мають лише два типи вершин та симетрії.

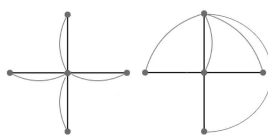


Рис. 5.11. Склейки ізоморфних дерев з чотирма листками.

Для вклеювання дерева з двома листками в дерево з чотирма листками рис. 5.7(д) існує 5 варіантів, а тому існує 5 варіантів полярних потоків Морса-Смейла рис. 5.12. У випадку двох ізоморфних дерев з трьома листками рис. 5.7(е) існує 24 m -діаграми Хегора, рис. 5.13.

З вищесказаного випливає така теорема:

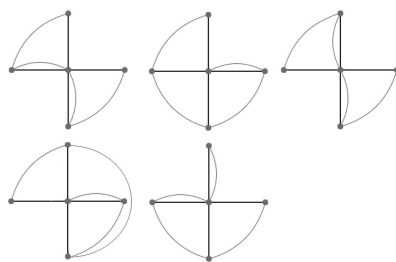


Рис. 5.12. Склейки дерев з двома та чотирма листками.

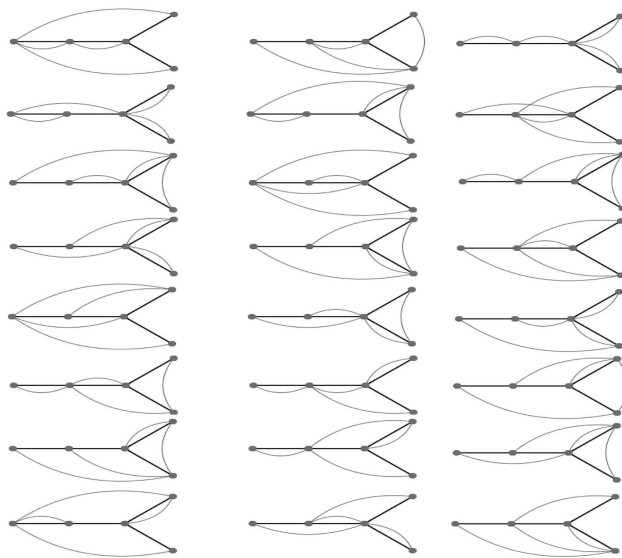


Рис. 5.13. Склейки ізоморфних дерев з трьома листками.

Теорема 5.2. *Існує 92 топологічно не еквівалентні потоки Морса роду 0 складності 4.*

6. Висновки

У даній роботі були досліджені топологічні властивості полярних потоків Морса на повному кренделі, всі нерухомі точки яких лежать на межі і не мають сепаратрис, що з'єднують сідла. Для них побудовано аналог розбиття Хегора, а також m -діаграму, що є їх повним топологічним інваріантом потоку. Еквівалентність m -діаграм, а також потоків, перевіряється за допомогою побудованих у роботі розрізняючих графів. Знайдені всі можливі розрізняючі графи з не більш ніж 5 вершинами. Кожному з графів відповідає свій полярний потік Морса і в результаті відкидання ізоморфних діаграм було отримано 92 неізоморфні розрізняючі графи, які були поділені на шість типів, три з яких утворені склеюванням ізоморфних дерев і три — не ізоморфних. Всі діаграми подаються у вигляді ілюстрацій і наведені у роботі.

Ця тема має перспективи для досліджень, оскільки многовиди можуть мати складнішу побудову, наприклад, вони можуть бути склеєні з двох многовидів, що мають тип L_k^I , $k \geq 5$, а тому, в подальшому, наведені вище дослідження будуть стосуватись розгляду таких випадків.

Крім цього, цікаво дослідити випадок, коли ребра графів G_M та G_N перетинаються. В такому випадку кількість многовидів, які можна утворити склеюванням двох многовидів M та N , значно збільшиться, а тому і кількість потоків Морса також значно збільшиться.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Braess Dietrich. Morse-Theorie für berandete Mannigfaltigkeiten // *Math. Ann.* — 1974. — **208**. — P. 133–148.
- [2] Jankowski A., Rubinsztein R. Functions with non-degenerate critical points on manifolds with boundary // *Comment. Math. Prace Mat.* — 1972. — **16**. — P. 99–112.
- [3] Hajduk B. Minimal m -functions // *Fund. Math.* — 1981. — **111**, 3. — P. 179–200.

- [4] *Bloom Jonathan M.* The combinatorics of Morse theory with boundary // Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2012. — Int. Press, Somerville, MA, 2013. — P. 43–88.
- [5] *Laudenbach François.* A Morse complex on manifolds with boundary // *Geom. Dedicata.* — 2011. — **153**. — P. 47–57.
- [6] *Matsumoto Yukio.* An introduction to Morse theory. — American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. — **208** of *Translations of Mathematical Monographs.* — P. xiv+219. — ISBN: 0-8218-1022-7. — Translated from the 1997 Japanese original by Kiki Hudson and Masahico Saito, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- [7] *Palis J., Smale S.* Structural stability theorems // Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968). — Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970. — P. 223–231.
- [8] *Borodzik M., Nemethi A., Ranicki A.* Morse theory for manifolds with boundary // *arXiv:1207/3066*.
- [9] *Fleitas G.* Classification of gradient-like flows on dimensions two and three // *Bol. Soc. Brasil. Mat.* — 1975. — **6**, 2. — P. 155–183.
- [10] *Giryk O. A.* Classification of polar Morse-Smale vector fields on two-dimensional manifolds // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 1996. — **2**, 1. — P. 23–37.
- [11] *Кадубовський О.* Класифікація векторних полів Морса–Смейла на двовимірних многовидах // *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Математика, механіка.* Київ. — 2005. — **14**. — С. 85–88.
- [12] *Poltavec D.* Equivalent polar Morse-Smale system on two dimensional manifolds of genus 3 // *Abstract of International Conference on Topology and its Applications, Kiev.* — 1995. — P. 29.
- [13] *Palis J.* On Morse-Smale dynamical systems // *Topology.* — 1968. — **8**. — P. 385–404.