Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 1, 194–203

УДК 517.956.4

В. А. Літовченко, І. М. Довжицька

(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці)

Граничні значення гладких розв'язків для параболічних систем типу Шилова

vladlit4@mail.ru, ira_nezvanova@mail.ru

On the initial generalized vector-valued function, we formulate sufficient conditions under which the corresponding solution to the Cauchy problem for parabolic systems of Shilov type with respect to the spatial variable belongs to the Schwartz space $\mathbb{S}$ or one or another $\mathbb{S}$-type space.

Сформульовано достатні умови на початкову узагальнену вектор-функцію, за яких відповідний розв'язок задачі Коші для параболічних систем типу Шилова стосовно просторової змінної є елементом простору $\mathbb{S}$ Л. Шварца або того чи іншого простору типу $\mathbb{S}$.

У [1], розвиваючи ідею Я. І. Житомирського [2] опису параболічно стійких до зміни коефіцієнтів систем рівнянь із частинними похідними, означено широкий клас параболічних систем із змінними коефіцієнтами порядку p вигляду

$$\partial_t u(t;x) = \{P_0(t;i\partial_x) + P_1(t,x;i\partial_x)\}u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \quad (1)$$

де $u := \mathrm{col}(u_1, ..., u_m)$, $\Pi_{(0;T]} := \{(t;x) : t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^n\}$, а $P_0(t; i\partial_x)$ і $P_1(t, x; i\partial_x)$– матричні диференціальні вирази порядків відповідно p і p_1, $p > p_1 \geq 0$, з коефіцієнтами, залежними від часової змінної t, при цьому, коефіцієнти виразу P_1 можуть залежати і від просторової змінної x. Також припускається, що система

$$\partial_t u(t;x) = P_0(t; i\partial_x)u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$

є параболічною за Шиловим системою рівнянь з показником параболічності h, $0 < h \leq p$, невід'ємним родом μ і зведеним порядком p_0 [3] (тобто існують сталі $\delta_0 > 0$ і $\delta_1 \geq 0$ такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$\Lambda(x) := \max_{j \in \mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\lambda_j(x) \leq -\delta_0 \|x\|^h + \delta_1,$$

де λ_j – корені рівняння $\det(P_0(t;\zeta) - \lambda E) = 0$, $\zeta \in \mathbb{C}^n, E$ - одинична матриця порядку m, а $\mathbb{N}_m := \{1, 2, \ldots, m\}$).

Нагадаємо також, що зведеним порядком p_0 системи називається точний степеневий порядок росту функції $\Lambda(\cdot)$ у комплексному просторі $\mathbb{C}^n$ (для параболічної системи завжди $p_0 > 1$). Крім того, родом параболічної за Шиловим системи називається найбільший показник μ такий, що в області $G^\mu(K) := \{x + iy \in \mathbb{C}^n : \ \|y\| \leq K(1 + \|x\|)^\mu\}$ з деяким $K > 0$ для функції $\Lambda(\cdot)$ виконується оцінка

$$\Lambda(x + iy) \leq -\delta_* \|x\|^h + \delta_1,\ \delta_* > 0,\ \delta_1 \geq 0.$$

Відомо, що $1 - (p_0 - h) \leq \mu \leq 1$.

Для таких систем у [1] побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) $Z(t, x; \tau, \xi)$, досліджено її основні властивості гладкості та поведінку в околі нескінченно віддалених просторових точок при наступних умовах:

А) $0 \leq p_1 < h - n(1 - h\mu/p_0) - (m-1)(p-h)$;

В) коефіцієнти системи (1) є неперервними за змінною t, нескінченно диференційовними за змінною x комплекснозначними функціями, обмеженими разом зі своїми похідними у шарі $\Pi_{[0;T]}$.

Зокрема, встановлено, що матрична функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}^n$ функцією за кожною із просторових змінних x та ξ, причому для всіх $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ і $0 \le \tau < t \le T$ виконується оцінка

$$|\partial_x^k \partial_\xi^q Z(t,x;\tau,\xi)| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+|k+q|_*+\gamma}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{2}$$

(тут $\alpha := \frac{\mu}{p_0}$, $\gamma := (m-1)(p-h)$ і $|l|_* := l_1 + \ldots + l_n$ для $l := (l_1,\ldots,l_n)$).

Якщо для системи (1) задати початкову умову

$$u(t;x)|_{t=0} = f, \quad f \in \mathbb{S}'_\beta, \tag{3}$$

(тут $\mathbb{S}'_\beta$– топологічно спряжений простір із векторним простором $\mathbb{S}_\beta$ І. М. Гельфанда і Г. Є. Шилова [5]), то під розв'язком задачі Коші (1), (3) у півпросторі $t > 0$ розумітимемо вектор-функцію $u(t;x)$, $(t;x) \in \Pi_{(0;T]}$, диференційовну за змінною t, p разів диференційовну за змінною x, яка задовольняє систему (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (3) у сенсі збіжності в просторі $\mathbb{S}'_\beta$, тобто

$$\langle u(t;x), \varphi(x)E\rangle \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \langle f, \varphi(x)E\rangle \qquad (\forall \varphi \in S_\beta),$$

де кутовими дужками $\langle,\rangle$ позначено дію узагальненої функції на основну, E - одинична матриця порядку m.

Правильне таке твердження [4].

Теорема 1. *Задача Коші (1), (3) коректно розв'язна у класі початкових даних $\mathbb{S}'_{1-\alpha}$. Її розв'язок є звичайною вектор-функцією, диференційовною за змінною t, нескінченно диференційовною за x і зображується формулою*

$$u(t;x) = \langle f, Z(t,x;0,\xi)\rangle, \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \ f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha}.$$

У даній роботі описуються умови на початкову вектор-функцію $f \in \mathbb{S}'_{1-\alpha}$, за яких відповідний розв'язок задачі Коші (1), (3) стосовно просторової змінної є елементом простору $\mathbb{S}$ Л. Шварца або того чи іншого простору типу $\mathbb{S}$ І. М. Гельфанда і Г. Є. Шилова.

Розглянемо клас $\widehat{S'}$ усіх узагальнених функцій f з $S'_{1-\alpha}$ такий, що

$$F[\widehat{S'}] = \Bigg\{ \widetilde{f}(\cdot) \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n) | \, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \, \exists \gamma_k \geq 0 \, \exists c_k > 0 \, \forall \sigma \in \mathbb{R}^n : \\ |\partial_\sigma^k \widetilde{f}(\sigma)| \leq c_k (1 + \|\sigma\|)^{\gamma_k} \Bigg\}$$

(тут $F[\cdot]$ – оператор перетворення Фур'є, а величини γ_k і c_k можуть залежати від функції $\widetilde{f}(\cdot) := F[f](\cdot)$).

Через $\widehat{S'}_\beta$ позначатимемо клас $\widehat{S'}$ у випадку, коли існує таке $\beta > 0$, що кожна оціночна величина c_k має вигляд

$$c_k = cB^{|k|_*} |k|_*^{\beta |k|_*}$$

з відповідними додатними сталими c і B, не залежними від k, і при цьому також не залежить від k величина $\gamma_k \equiv \gamma_0$.

Очевидно, що для всіх додатних β_1 і β_2 таких, що $\beta_1 \leq \beta_2$, виконуються співвідношення

$$\widehat{S'}_{\beta_1} \subset \widehat{S'}_{\beta_2} \subset \widehat{S'},$$

більше того,

$$S \subset \widehat{S'} \;\; \text{і} \;\; S_\beta \subset \widehat{S'}_\beta, \;\; \beta > 0.$$

Векторний аналог класів $\widehat{S'}$, $\widehat{S'}_\beta$ позначатимемо відповідно через $\widehat{\mathbb{S}'}$ і $\widehat{\mathbb{S}'}_\beta$.

Далі, сформулюємо таке допоміжне твердження.

Лема 2. *Кожен елемент класу $\widehat{S'}$ є згортувачем у просторі S. Якщо ж $f \in \widehat{S'}_\beta$, $\beta > 0$, то f – згортувач у S_β.*

Доведення. Згідно з відомим результатом В. М. Борок (*див.* [6]), елемент $f \in S'_{1-\alpha}$ буде згортувачем у просторі S чи S_β, якщо його перетворення Фур'є $F[f]$ є регулярним функціоналом типу функції $\widetilde{f}(\cdot)$, яка є мультиплікатором у просторі $F[S] = S$ чи, відповідно, у $F[S_\beta] = S^\beta$.

Отже, необхідно переконатися лише у тому, що $\widetilde{f}(\cdot)$ є мультиплікатором у відповідному двоїстому стосовно перетворення Фур'є просторі $\Phi \in \{S, S^\beta\}$. Проте, як зазначено фактично в [6], умови з означення класів $\widehat{S}'$ і $\widehat{S}'_\beta$, які накладаються на функцію $\widetilde{f}(\cdot)$, гарантують те, що $\widetilde{f}(\cdot)$ є мультиплікатором у відповідному просторі Φ.

Лему доведено.

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 3. *Нехай початкова вектор-функція f є елементом класу $\widehat{\mathbb{S}}'$, тоді при кожному фіксованому t з $(0;T]$ відповідний розв'язок $u(t;\cdot)$ задачі Коші (1), (3) належить до простору $\mathbb{S}$. Якщо ж $f \in \widehat{\mathbb{S}}'_{\beta_0}$ при $\beta_0 \geq 1-\alpha$, то $u(t;\cdot) \in \mathbb{S}_{\beta_0}$ для всіх $t \in (0;T]$.*

Доведення.

Згідно з відповідним твердженням теореми 1, структурою ФМРЗК [1]

$$Z(t,x;\tau,\xi) = G(t,\tau;x-\xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy \equiv$$

$$\equiv G(t,\tau;x-\xi) + W(t,x;\tau,\xi)$$

та означенням перетворення Фур'є узагальненої функції, маємо

$$u(t;x) =< f, Z(t,x;0,\cdot) >=< f, G(t;x-\cdot) > + < f, W(t,x;0,\cdot) >=$$

$$= (f*G)(t;x) + (2\pi)^n < \widetilde{f}(\sigma), F_{\xi\to\sigma}[W(t,x;0,\xi)] >, \ \ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Звідси, врахувавши твердження леми 2, а також те, що [4]

$$G(t;\cdot) \in \mathrm{P}(S_{1-\alpha}) \subset \mathrm{P}(S), \ \ t \in (0;T],$$

приходимо до висновку, що для доведення теореми 3 необхідно лише встановити належність до відповідного простору основних функцій кожного елемента вектор-функції

$$R(t;\cdot) :=< \widetilde{f}(\sigma), F_{\xi\to\sigma}[W(t,\cdot;0,\xi)] >$$

при кожному фіксованому $t \in (0;T]$. Тут через $\mathrm{P}(\Phi)$ позначено сукупність усіх матричних функцій порядку m, елементи яких належать простору Φ.

Нехай $f \in \widehat{\mathbb{S}}'$. Скориставшись регулярністю функціонала $F[f]$, для кожних $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ і $(t;x) \in \Pi_{(0;T]}$ маємо

$$|x^q \partial_x^k R(t;x)| = |\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\sigma) x^q \partial_x^k F_{\xi\to\sigma}[W(t,x;0,\xi)] d\sigma| \leq$$

$$\leq \sum_{|l|_*=0}^{|q|_*} C_q^l \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\sigma) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi^{q-l} e^{i(\xi,\sigma)} (x-\xi)^l \partial_x^k W(t,x;0,\xi) d\xi d\sigma \right| =$$

$$= \sum_{|l|_*=0}^{|q|_*} C_q^l \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\sigma) \big(\partial_\sigma^{q-l} F_{\xi\to\sigma}[(x-\xi)^l \partial_x^k W(t,x;0,\xi)] \big) d\sigma \right|.$$

Безпосередньо з оцінок

$$\left| \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^r \partial_x^q (G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)) dy \right| \leq$$

$$\leq c_3 (t-\tau)^{\alpha_0 - \frac{n+|r+q|_*+\gamma}{h}} e^{-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \qquad (4)$$

$\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2:=\{(t,x;\tau,\xi)|\ 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n\}$, (де c_3 – додатна стала, не залежна від t,τ,x і ξ) та нерівності

$$|\partial_x^r\partial_\xi^q W(t,x;\tau,\xi)|\le\left|\int\limits_\tau^t d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_\xi^r\partial_x^q(G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi))dy\right|, \tag{5}$$

$\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$ випливає, що матричний вираз $F_{\xi\to\sigma}[(x-\xi)^l\partial_x^k W(t,x;0,\xi)]$ стосовно змінної σ є елементом класу $\mathrm{P}(S)$, тоді, зінтегрувавши частинами останній інтеграл і врахувавши, що $\widetilde{f}(\cdot)$ – мультиплікатор у просторі $\mathbb{S}$, одержимо спочатку

$$|x^q\partial_x^k R(t;x)|\le$$

$$\le\sum_{|l|_*=0}^{|q|_*}C_q^l\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(\partial_\sigma^{q-l}\widetilde{f}(\sigma)\big)F_{\xi\to\sigma}[(x-\xi)^l\partial_x^k W(t,x;0,\xi)]d\sigma\right|, \tag{6}$$

а, відтак, і оцінку

$$|x^q\partial_x^k R(t;x)|\le c_{k,q}(t),\ \ \{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,\ x\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0;T],$$

в якій оціночний вираз $c_{k,q}(t)$ є додатною величиною, не залежною від x. Ця оцінка вже забезпечує належність вектор-функції $R(t;\cdot)$ до простору $\mathbb{S}$ при кожному фіксованому t з $(0;T]$.

Нехай тепер $f\in\widehat{\mathbb{S}}'_{\beta_0}$, $\beta_0\ge 1-\alpha$. Скористаємося зображенням

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(\partial_\sigma^{q-l}\widetilde{f}(\sigma)\big)F_{\xi\to\sigma}[(x-\xi)^l\partial_x^k W(t,x;0,\xi)]d\sigma=$$

$$=\mathcal{R}^0_{k,q,l}(t;x)+\mathcal{R}^1_{k,q,l}(t;x),$$

в якому

$$\mathcal{R}^0_{k,q,l}(t;x):=\int\limits_{\|\sigma\|<1}\big(\partial_\sigma^{q-l}\widetilde{f}(\sigma)\big)F_{\xi\to\sigma}[(x-\xi)^l\partial_x^k W(t,x;0,\xi)]d\sigma,$$

$$\mathcal{R}^1_{k,q,l}(t;x) := \int\limits_{\|\sigma\|\geq 1} \big(\partial_\sigma^{q-l}\widetilde{f}(\sigma)\big) F_{\xi\to\sigma}[(x-\xi)^l \partial_x^k W(t,x;0,\xi)]d\sigma.$$

Зваживши на властивості вектор-функції $\widetilde{f}(\cdot)$ (*див.* означення класу $\widehat{\mathbb{S}}'_{\beta_0}$) та на оцінки (4), (5), одержимо

$$|\mathcal{R}^0_{k,q,l}(t;x)| \leq \int\limits_{\|\sigma\|<1} \big|\partial_\sigma^{q-l}\widetilde{f}(\sigma)\big|d\sigma \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x-\xi\|^{|l|_*}|\partial_x^k W(t,x;0,\xi)|d\xi \leq$$

$$\leq c(k)t^{\alpha_0-\frac{n+|k|_*+\gamma}{h}} B^{|q-l|_*}|q-l|_*^{\beta_0|q-l|_*} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x-\xi\|^{|l|_*} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\xi =$$

$$= c(k)t^{\alpha_0-\frac{n+|k|_*+\gamma}{h}+\alpha(n+|l|_*)} B^{|q-l|_*}|q-l|_*^{\beta_0|q-l|_*} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|\zeta\|^{|l|_*} e^{-\delta\|\zeta\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\zeta \leq$$

$$\leq c(k)t^{\alpha_0-\frac{n+|k|_*+\gamma}{h}+\alpha(n+|l|_*)} B^{|q-l|_*}|q-l|_*^{\beta_0|q-l|_*} \sup_{\rho\geq 0}\big(\rho^{|l|_*} e^{-\frac{\delta}{2}\rho^{\frac{1}{1-\alpha}}}\big)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{2}\|\zeta\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\zeta = c(k)t^{\alpha_0-\frac{n+|k|_*+\gamma}{h}+\alpha(n+|l|_*)}\times$$

$$\times B^{|q-l|_*} B_0^{|l|_*}|q-l|_*^{\beta_0|q-l|_*}|l|_*^{(1-\alpha)|l|_*} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{2}\|\zeta\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\zeta \leq$$

$$\leq c_1(k)t^{\alpha_0+\alpha n-\frac{n+|k|_*+\gamma}{h}} B_1^{|q|_*}|q|_*^{\beta_0|q|_*},\ \ (t;x)\in\Pi_{(0;T]},\ \{k,q,l\}\subset\mathbb{Z}_+^n,$$

$|l|_* \leq |q|_*$ (тут додатні величини $c_1(k)$ і B_1 не залежать від t, x, q і l).

Далі, нехай $\sigma = (\sigma_1;\ldots;\sigma_n)$; виберемо такий номер j, що $|\sigma_j| \geq |\sigma_k|$, $k\in\mathbb{N}_n$. Тоді $\|\sigma\| \leq \sqrt{n}|\sigma_j|$ і

$$|F_{\xi\to\sigma}[(x-\xi)^l\partial_x^k W(t,x;0,\xi)]| = \big|\sigma_j^{-r_j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_{\xi_j}^{r_j} e^{i(\xi,\sigma)}\big)(x-\xi)^l\times$$

$$\times \partial_x^k W(t,x;0,\xi)d\xi\big| = \big|\sigma_j^{-r_j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi,\sigma)} \partial_{\xi_j}^{r_j}\big((x-\xi)^l \partial_x^k W(t,x;0,\xi)\big)d\xi\big| \le$$

$$\le (\|\sigma\|/\sqrt{n})^{-r_j} \sum_{s=0}^{r_j} C_{r_j}^s \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|\partial_{\xi_j}^s (x-\xi)^l\big|\big|\partial_{\xi_j}^{r_j-s} \partial_x^k W(t,x;0,\xi)\big|d\xi$$

$$(\forall r_j \in \mathbb{Z}_+).$$

Оскільки

$$\big|\partial_{\xi_j}^s (x-\xi)^l\big| \le \begin{cases} s! C_{l_j}^s \|x-\xi\|^{|l|_*-s}, \ s \le l_j, \\ \qquad\qquad\qquad 0, \ s > l_j, \end{cases}$$

то врахувавши оцінки (4), (5), для всіх $(t;x) \in \Pi_{(0;T]}$ і $\{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ одержимо

$$|F_{\xi\to\sigma}[(x-\xi)^l \partial_x^k W(t,x;0,\xi)]| \le$$

$$\le \frac{c(k,r_j)}{\|\sigma\|^{r_j}} 2^{l_j} \sum_{s=0}^{\min\{r_j,l_j\}} C_{r_j}^s t^{\alpha_0 - \frac{n+|k|_*+r_j-s+\gamma}{h}} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x-\xi\|^{|l|_*-s} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\xi \le \frac{c(k,r_j)}{\|\sigma\|^{r_j}} 2^{l_j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{2}\|\zeta\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\zeta \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{\min\{r_j,l_j\}} C_{r_j}^s \times t^{\alpha_0+\alpha(n+|l|_*-s)-\frac{n+|k|_*+r_j-s+\gamma}{h}} \sup_{\rho\ge 0}\left(\rho^{|l|_*-s} e^{-\frac{\delta}{2}\rho^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right) \le$$

$$\le \frac{c_1(k,r_j)}{\|\sigma\|^{r_j}} t^{\alpha_0+\alpha n-\frac{n+|k|_*+r_j+\gamma}{h}} B_1^{|l|_*} |l|_*^{(1-\alpha)|l|_*}, \ \ r_j \in \mathbb{Z}_+, \, \sigma_j \ne 0,$$

де $c_1(k,r_j)$ і B_1 – додатні величини, не залежні від t, x, σ і l.

Звідси при $r_j > n + \gamma_0$, зваживши на властивості вектор-функції $\widetilde{f}(\cdot)$, приходимо до оцінки

$$|\mathcal{R}_{k,q,l}^1(t;x)| \le c_2(k) t^{\alpha_0+\alpha n-\frac{n+|k|_*+r_j+\gamma}{h}} B_2^{|q|_*} |q|_*^{\beta_0|q|_*},$$

в якій $(t; x) \in \Pi_{(0;T]}$, $\{k, q, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $|l|_* \le |q|_*$, а оціночні величини $c_2(k)$ та B_2 не залежать від t, x, q і l.

Отже, для кожного фіксованого $t \in (0; T]$ і $k \in \mathbb{Z}_+^n$ існують додатні сталі c і B такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $\{q, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $|l|_* \le |q|_*$, виконується нерівність

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_\sigma^{q-l} \widetilde{f}(\sigma)\big) F_{\xi\to\sigma}[(x-\xi)^l \partial_x^k W(t, x; 0, \xi)] d\sigma \right| \le cB^{|q|_*} |q|_*^{\beta_0 |q|_*},$$

яка, з огляду на (6), забезпечує вже належність до простору $\mathbb{S}_{\beta_0}$ вектор-функції $R(t; \cdot)$ при кожному фіксованому $t \in (0; T]$.

Теорему доведено.

Література

[1] *Літовченко В. А., Довжицька І. М.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами // Укр. мат. вісник. – 2010. – **7**, № 4. – С. 516—552.

[2] *Житомирский Я. И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1959. – **23**. – С. 925–932.

[3] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

[4] *Litovchenko V. A., Dovzhytska I. M.* Cauchy problem for a class of parabolic systems of Shilov type with variable coefficients // Central European Journal of Mathematics. – 2012. – **10**, No. 3. – P. 1084–1102.

[5] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

[6] *Борок В. М.* Об одном характеристическом свойстве параболических систем // ДАН СССР. – 1956. – **100**, № 6. – С. 903–905.