

УДК 517.956.4

В. М. Лось

(Національний технічний університет України “КПІ”, Київ)

Про достатні умови класичності узагальнених розв’язків деяких мішаних параболічних задач

v_los@yahoo.com

Considering the mixed problem for the second order linear parabolic equation with the Dirichlet boundary condition, we obtain new sufficient conditions under which the generalized solution to the problem is classical. These conditions are formulated in terms of the belonging of the right-hand sides of the problem to certain $2b$ -anisotropic Hörmander spaces. The classical solutions can be discontinuous on the junction of the lateral area and base of the cylinder in which the problem is considered.

Знайдено нові достатні умови класичності узагальнених розв’язків мішаної задачі для лінійного параболічного рівняння другого порядку з крайовою умовою Діріхле. Ці умови сформульовано у термінах приналежності правих частин задачі деяким анізотропним просторам Хермандера. Класичні розв’язки можуть мати розрив на стику бічної поверхні і основи циліндру, у якому розглядається задача.

1. Вступ

Сучасна теорія загальних параболічних мішаних задач розроблена для шкал функціональних просторів Гельдера і Соболева [1 – 6]. У цій теорії особливе місце посідають мішані задачі для рівнянь другого порядку, що пов'язано з їх численними застосуваннями. Актуальним є питання, за яких умов узагальнений розв'язок такої задачі є класичним, тобто коли він у термінах класичних похідних і слідів функцій задовольняє рівняння у відкритому циліндрі, а на його бічній поверхні і основі — крайову і початкову умови відповідно. У роботах [2, 7 – 11] відповідь на це питання отримано у термінах приналежності правих частин задачі деяким просторам Гельдера або Соболева.

Широке і змістовне узагальнення просторів Соболева було запропоноване Л. Хермандером у [12]. Це простори $H^\mu := \mathcal{B}_{2,\mu}$. Для них показником регулярності розподілів служить вагова функція μ , залежна від кількох дуальних змінних. Такі простори знайшли різні застосування в аналізі і теорії рівнянь з частинними похідними [12 – 21].

Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач [19 – 26] побудували теорію загальних еліптичних диференціальних операторів і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах ізотропних просторів Хермандера.

В роботах [27 – 38] досліджено мішані параболічні задачі у гільбертових просторах Хермандера. У [37] отримано достатні умови класичності узагальнених розв'язків мішаних задач для лінійних параболічних диференціальних рівнянь другого порядку. Ці умови, зокрема, гарантують неперервність розв'язку у замкнутому циліндрі.

У різних практичних задачах (див., наприклад, [39, гл. 3, § 2, п. 3]) корисно розглядати класичні розв'язки, які не є неперервними на лінії з'єднання бічної поверхні і основи циліндра, у якому досліджується задача. Мета цієї роботи – встановити достатні умови того, що узагальнені розв'язки є класичними у щойно за-

значеному сенсі. Для простоти в роботі розглядається мішана задача для лінійного параболічного диференціального рівняння другого порядку з крайовою умовою Діріхле. Ці достатні умови сформульовано у термінах приналежності правих частин задачі відповідним просторам Хермандера. Їх застосування дозволяє отримати більш тонкі достатні умови, ніж це можливо у межах класичних шкал функціональних просторів Гельдера і Соболева.

Стаття складається з 6 пунктів. Пункт 1. є вступ. Пункт 2. містить постановку задачі, що досліджується. У п. 3. введено необхідні гільбертові простори Хермандера. У п. 4. сформульовано основний результат статті. Він доведений у п. 5.. Пункт 6. містить висновки до статті.

2. Постановка задачі

Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G \times (0, \tau)$ — відкритий циліндр в \mathbb{R}^{n+1} , $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\bar{\Omega} := \bar{G} \times [0, \tau]$ і $\bar{S} := \Gamma \times [0, \tau]$ є замикання Ω і S відповідно.

Для параболічного рівняння другого порядку, заданого в Ω , розглянемо початково-крайову задачу з крайовою умовою Діріхле:

$$Au \equiv \partial_t u(x, t) + \sum_{|\alpha| \leq 2} a^\alpha(x, t) D_x^\alpha u(x, t) = f(x, t) \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = h(x) \quad \text{при } x \in G, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_S = g(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma, 0 < t < \tau. \quad (3)$$

Всі коефіцієнти диференціального виразу A вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями на $\bar{\Omega}$ відповідно, тобто $a^\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Використовуємо такі позначення для частинних похідних $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_j := i \partial / \partial x_j$, $\partial_t := \partial / \partial t$.

Тут $x = (x_1, \dots, x_n)$ є довільною точкою простору \mathbb{R}^n , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ є мультиіндексом і $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Підсумовування у (1) здійснюється за цілими індексами $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$, які задовольняють умову, вказану під знаком суми.

Припускаємо [1] (§ 9, п. 1), що рівняння (1) є параболічним за Петровським у замкнутому циліндрі $\bar{\Omega}$. Це значить виконання такої умови.

Умова 1. Для довільних $x \in \bar{G}$, $t \in [0, \tau]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ та $p \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Re} p \geq 0$, правильно

$$A^{(0)}(x, t, \xi, p) \equiv p + \sum_{|\alpha|=2} a^\alpha(x, t) \xi^\alpha \neq 0 \quad \text{за умови} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

3. Функціональні простори

Основний результат роботи будемо формулювати у термінах приналежності правих частин задачі гільбертовим функціональним просторам $H^\mu := \mathcal{B}_{2,\mu}$, що були введені і досліджені Л. Хермандером [12, п. 2.2]. Згодом ці простори дослідили також Л. Р. Волевич і Б. П. Панеях [13, § 2, 3].

Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$, де ціле $k \geq 1$, є вимірна за Борелем функція $\mu : \mathbb{R}^k \rightarrow (0, \infty)$, яка задовольняє таку умову: існують додатні числа c та l такі, що

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \leq c(1 + |\xi - \eta|)^l \quad \text{для довільних} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^k.$$

За означенням, комплексний лінійний простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є \widehat{w} яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)}^2 := \int_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi) |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(У роботі усі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.) Цей простір є гільбертовим відносно введеної норми $\|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)}$.

Нам знадобиться версія простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ для довільної відкритої непорожньої множини $V \subset \mathbb{R}^k$. Лінійний простір $H^\mu(V)$ складається, за означенням, із звужень $u = w \upharpoonright V$ всіх розподілів $w \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$ на множину V . У цьому просторі задана норма за формулою

$$\|u\|_{H^\mu(V)} := \inf \{ \|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} : w \in H^\mu(\mathbb{R}^k), u = w \upharpoonright V \}.$$

Простір $H^\mu(V)$ є гільбертовим відносно цієї норми.

Для зручності позначень приймемо $\gamma := 1/2$. Надалі будемо використовувати показники регулярності вигляду

$$\begin{aligned} \mu_{s;\varphi}(\xi', \xi_k) &:= \mu(\xi', \xi_k) := \\ &(1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{s/2} \varphi((1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ є аргументами функції μ . Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ пробігає клас \mathcal{M} .

За означенням, клас \mathcal{M} складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, які задовольняють такі дві умови:

а) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, b]$, де $1 < b < \infty$;

б) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, а саме, $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ для кожного $\lambda > 0$.

Теорія повільно змінних функцій (на нескінченності) викладена, наприклад, у монографії [40]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\log r)^{q_1} (\log \log r)^{q_2} \dots \underbrace{(\log \dots \log r)^{q_k}}_{k \text{ разів}} \quad \text{при } r \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ та $q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{R}$ є довільними.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Розв'язки u початково-крайової задачі (1)–(3) та праві частини f рівняння (1) будемо розглядати у анізотропних гільбертових функціональних просторах Хермандера $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega) := H^\mu(\Omega)$, де показник μ визначений формулою (4), у якій $k := n + 1$.

Якщо $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболева порядку $(s, s\gamma)$; позначимо його через $H^{s, s\gamma}(\Omega)$. Тут s — показник регулярності розподілу $u = u(x, t)$ по просторовій змінній $x \in \Omega$, а $s\gamma$ — показник регулярності по часовій змінній $t \in (0, \tau)$. У загальному випадку, коли $\varphi \in \mathcal{M}$ є довільною, правильні неперервні і щільні вкладення

$$H^{s_1, s_1\gamma}(\Omega) \hookrightarrow H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_0, s_0\gamma}(\Omega) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1. \quad (5)$$

У випадку, коли $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, нам будуть потрібні такі простори Хермандера, де $\varphi \in \mathcal{M}$ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. У зв'язку з цим відмітимо, що для довільної зростаючої (в нестрогому сенсі) функції $\varphi \in \mathcal{M}$ правильне неперервне та щільне вкладення $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s, s\gamma}(\Omega)$.

Нам знадобляться також анізотропні простори Хермандера, задані на бічній поверхні $S = \Gamma \times (0, \tau)$ циліндра Ω . До них буде належати права частина g крайової умови (3). Означимо ці простори, використовуючи спеціальні локальні карти на S (див. [33, п. 1]). Нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Попередньо для відкритої смуги $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Pi) := H^\mu(\Pi)$, де показник μ визначений формулою (4), у якій $k := n$. Довільно виберемо скінченний атлас із C^∞ -структури на замкненому многовиді Γ . Нехай цей атлас утворений локальними картами $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \dots, \lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ . Окрім цього, довільно виберемо функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1, \dots, \lambda$, такі, що $\text{supp } \chi_j \subset \Gamma_j$ і $\sum_{j=1}^{\lambda} \chi_j = 1$ на Γ .

За означенням, лінійний простір $H^{s, s\gamma; \varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номера

$j \in \{1, \dots, \lambda\}$ функція

$$v_j(y, t) := \chi_j(\theta_j(y)) v(\theta_j(y), t)$$

аргументів $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0, \tau)$ належить до $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Pi)$.

У просторі $H^{s, s\gamma; \varphi}(S)$ задана норма за формулою

$$\|v\|_{H^{s, s\gamma; \varphi}(S)} := \left(\sum_{j=1}^{\lambda} \|v_j\|_{H^{s, s\gamma; \varphi}(\Pi)}^2 \right)^{1/2}.$$

Цей простір є гільбертовим відносно введеної норми і не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ [33] (теорема 1).

Введемо простори, до яких належить права частина h початкової умови (2). Це ізотропні гільбертові простори Хермандера $H^{s; \varphi}(G) := H^\mu(G)$ з показником $\mu(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2} \varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2})$ аргументу $\xi \in \mathbb{R}^n$. Їх виділили і систематично використовували В. А. Михайлець та О. О. Мурач у теорії еліптичних крайових задач [19, 20].

Нарешті, для формулювання основного результату введемо необхідні локальні аналоги просторів $H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)$, $H^{s, s\gamma; \varphi}(S)$ і $H^{s; \varphi}(G)$.

Нехай U є відкритою множиною в \mathbb{R}^{n+1} , такою, що $U \cap \Gamma = \emptyset$. Нехай $\omega := U \cap \Omega \neq \emptyset$, $\pi_1 := U \cap \partial\Omega$, $\pi_2 := U \cap S$ і $\pi_3 := U \cap G$.

Позначимо через $H_{\text{loc}}^{s, s\gamma; \varphi}(\omega, \pi_1)$ лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u \in H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ із $\text{supp } \chi \subset \omega \cup \pi_1$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$u \mapsto \|\chi u\|_{H^{s, s\gamma; \varphi}(\Omega)},$$

де χ – довільна вище згадана функція. Подібно до цього, позначимо через $H_{\text{loc}}^{s, s\gamma; \varphi}(\pi_2)$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v \in H^{s, s\gamma; \varphi}(S)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\bar{S})$ із $\text{supp } \chi \subset \pi_2$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$v \mapsto \|\chi v\|_{H^{s, s\gamma; \varphi}(S)},$$

де χ – довільна тільки згадана функція. Нарешті, позначимо через $H_{\text{loc}}^{s;\varphi}(\pi_3)$ лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w \in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{G})$ із $\text{supp } \chi \subset \pi_3$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$w \mapsto \|\chi w\|_{H^{s;\varphi}(G)},$$

де χ – довільна тільки згадана функція.

Якщо $\varphi \equiv 1$, то означені вище простори стають соболевськими просторами (анізотропними на Ω і S , або ізотропними на G). У цьому випадку будемо опускати індекс φ у позначеннях цих просторів.

4. Основний результат

Позначимо

$$\mathcal{H}_D^{0,0} := L_2(\Omega) \oplus H^{3/2,3/4}(S) \oplus H^1(G).$$

Через $\mathcal{Q}_D^{0,0}$ позначимо підпростір простору вектор-функцій $(f, g, h) \in \mathcal{H}_D^{0,0}$, які задовольняють умову узгодження

$$g \upharpoonright \Gamma = h \upharpoonright \Gamma. \tag{6}$$

Із результату М. С. Аграновіча та М. І. Вішіка [1] (теорема 12.1) випливає, що для кожної вектор-функції (f, g, h) із соболевського простору $\mathcal{Q}_D^{0,0}$ задача (1)–(3) має єдиний розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$. Таку функцію u називаємо узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною $(f, g, h) \in \mathcal{Q}_D^{0,0}$.

Дамо означення класичного розв'язку цієї задачі.

Означення 1. *Узагальнений розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$ задачі (1)–(3) назвемо класичним, якщо*

$$u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega) \quad \text{і} \quad u \in C(\Omega \cup S \cup G).$$

Зауважимо, що, на відміну від означення класичного розв'язку задачі (1)–(3) у [37, означення 1], у цій роботі в означенні 1 не вимагається неперервність розв'язку у замкнутому циліндрі $\bar{\Omega}$.

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Нехай функція $u \in H^{2,1}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H_{\text{loc}}^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi_1}(\Omega, \emptyset) \cap H_{\text{loc}}^{-1+n/2, -1/2+n/4; \varphi_2}(\Omega, S \cup G), \quad (7)$$

$$g \in H_{\text{loc}}^{1/2+n/2, 1/4+n/4; \varphi_2}(S), \quad (8)$$

$$h \in H_{\text{loc}}^{n/2; \varphi_2}(G) \quad (9)$$

з деякими функціональними параметрами φ_1 і $\varphi_2 \in \mathcal{M}$ такими, що

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \text{для всіх } j \in \{1, 2\}. \quad (10)$$

При $n = 2$ додатково припускаємо, що φ_2 є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Тоді $u(x, t)$ є класичним розв'язком задачі (1)–(3).

Відмітимо, для означення локальних просторів, що фігурують у теоремі, можна покласти, наприклад, $U := \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Gamma \cup \bar{G}_\tau)$, де \bar{G}_τ – верхня основа циліндра $\bar{\Omega}$.

Зауваження 1. Якщо сформулювати аналог теореми 1 для соболевської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (7)–(9) цієї теореми на більш сильні: для правих

частин задачі виконуються включення

$$\begin{aligned} f &\in H_{\text{loc}}^{1+n/2+\varepsilon_1, 1/2+n/4+\varepsilon_1/2}(\Omega, \emptyset) \cap \\ &\quad H_{\text{loc}}^{-1+n/2+\varepsilon_2, -1/2+n/4+\varepsilon_2/2}(\Omega, S \cup G), \\ g &\in H_{\text{loc}}^{1/2+n/2+\varepsilon_2, 1/4+n/4+\varepsilon_2/2}(S), \\ h &\in H_{\text{loc}}^{n/2+\varepsilon_2}(G) \end{aligned}$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$.

5. Доведення

Доведення теореми 1 спирається на теорему про локальне підвищення регулярності розв'язку задачі (1)–(3) та деяку модифікацію теореми вкладання Хермандера [12] (теорема 2.2.7). Для зручності сформулюємо необхідні твердження.

Твердження 1 [38] (теорема 2). *Нехай $u \in H^{2,1}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі (1)–(3) із правою частиною $(f, g, h) \in \mathcal{Q}_D^{0,0}$. Припустимо, що*

$$f \in H_{\text{loc}}^{s-2, (s-2)/2; \varphi}(\omega, \pi_1), \quad (11)$$

$$g \in H_{\text{loc}}^{s-1/2, (s-1/2)/2; \varphi}(\pi_2), \quad (12)$$

$$h \in H_{\text{loc}}^{s-1; \varphi}(\pi_3) \quad (13)$$

для деяких $s > 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді $u \in H_{\text{loc}}^{s, s/2; \varphi}(\omega, \pi_1)$.

Твердження 2 [36] (Лема 8.1). *Нехай $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$, $s := p + 1 + n/2$ та $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді правильні такі два твердження:*

(i) *Якщо φ задовольняє умову*

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r \varphi^2(r)} < \infty, \quad (14)$$

то кожна функція $w \in H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ має таку властивість: всі її узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta w(x, t)$ з $0 \leq |\alpha| + 2\beta \leq p$ є неперервними на \mathbb{R}^{n+1} .

(ii) Нехай V є непорожня відкрита підмножина \mathbb{R}^{n+1} , і нехай ціле k таке, що $1 \leq k \leq n$. Якщо кожна функція $w \in H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ з $\text{supp } w \subset V$ задовольняє умову $\partial^j w / \partial x_k^j \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ для кожного $j \in \mathbb{Z}$ з $0 \leq j \leq p$, то φ задовольняє умову (14).

Нам буде потрібний такий наслідок із твердження 2.

Наслідок 1. Твердження 3(i) зберігає силу, якщо у ньому замінити $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ на $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ і \mathbb{R}^{n+1} на $\bar{\Omega}$.

Справді, з означення простору $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ випливає, що для кожної функції $u \in H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ існує така функція $w \in H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, що $u = w$ в Ω . Тому з твердження 3(i) випливає, що всі узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x, t)$ з $0 \leq |\alpha| + 2\beta \leq p$ є неперервними на $\bar{\Omega}$.

Доведення теореми 1. Спочатку покажемо, що твердження 1 є правильним у випадку, коли $s = 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Цей факт потрібний у випадку, коли $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Нехай $u \in H^{2,1}(\Omega)$. Виберемо довільну функцію $\chi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ з $\text{supp } \chi \subset \omega \cup \pi_1$. Переставляючи диференціальний оператор A з оператором множення на χ , можемо записати

$$\Lambda(\chi u) := (A(\chi u), \chi u|_S, \chi u|_{t=0}) = \chi(f, g, h) + (A'u, 0, 0), \quad (15)$$

де

$$A'u = u \partial_t \chi + \sum_{|\alpha| \leq 1} a_1^\alpha(x, t) D_x^\alpha u \in H^{1,1/2}(\Omega).$$

З (15), умов (11)–(13) для $s = 2$ і лівого вкладання (5) випливає включення

$$\Lambda(\chi u) \in H^{0,0;\varphi}(\Omega) \oplus H^{3/2,3/4;\varphi}(S) \oplus H^{1;\varphi}(G). \quad (16)$$

Відмітимо, що для вектор-функції $\Lambda(\chi u)$ виконується умова узгодження (6). Справді, оскільки $\text{dist}(\text{supp } \chi, \Gamma) > 0$, то $\chi = 0$ в деякому околі Γ . Звідси маємо, що $\Lambda(\chi u) = 0$ в цьому околі Γ .

Отже, для $\Lambda(\chi u)$ має місце включення (16) і виконується умова (6). З цього за теоремою 1 з [35] випливає потрібне включення $\chi u \in H^{2,1;\varphi}(\Omega)$. Врахувавши довільність вибору функції χ , маємо $u \in H_{\text{loc}}^{2,1;\varphi}(\omega, \pi_1)$.

Переходимо безпосередньо до доведення теореми 1. Спочатку покажемо, що $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega)$. З умов (7)–(9) маємо включення

$$\begin{aligned} f &\in H_{\text{loc}}^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi_1}(\Omega, \emptyset), \\ g &\in \mathcal{D}'(S) = H_{\text{loc}}^{5/2+n/2, 5/4+n/4; \varphi_1}(\emptyset), \\ h &\in \mathcal{D}'(G) = H_{\text{loc}}^{2+n/2; \varphi_1}(\emptyset). \end{aligned}$$

З цих включень і твердження 1, де $s := 3 + n/2$, випливає, що

$$u \in H_{\text{loc}}^{3+n/2, 3/2+n/4; \varphi_1}(\Omega, \emptyset). \quad (17)$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини Ω . Знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий, що $O(x_0) \subset \Omega$ і $\text{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\Omega)$, така, що $\text{supp } \chi \subset \Omega$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (17) випливає включення $\chi u \in H^{3+n/2, 3/2+n/4; \varphi_1}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 1, де $p := 2$, маємо включення

$$\partial_t(\chi u), D_x^\alpha(\chi u) \in C(\bar{\Omega}) \quad \text{при} \quad |\alpha| \leq 2.$$

З останніх включень випливає, що узагальнені частинні похідні $\partial_t u$ і $D_x^\alpha u$ з $|\alpha| \leq 2$ є неперервними в деякому околі точки x_0 . Оскільки x_0 є довільною точкою Ω , то $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega)$.

Подібним чином доводиться, що $u \in C(\Omega \cup S \cup G)$. Справді, з умов (7)–(9) і твердження 1, де $s := 1 + n/2$, випливає, що

$$u \in H_{\text{loc}}^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi_2}(\Omega, S \cup G). \quad (18)$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини $\Omega \cup S \cup G$. У топології $\bar{\Omega}$ знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий, що $\text{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$.

Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, така, що $\text{supp } \chi \subset \Omega \cup S \cup G$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (18) випливає включення $\chi u \in H^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi_2}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 1, де $p := 0$, маємо включення $\chi u \in C(\bar{\Omega})$. З останнього включення випливає, що функція u є неперервною в деякому околі точки x_0 . Оскільки x_0 є довільною точкою $\Omega \cup S \cup G$, то $u \in C(\Omega \cup S \cup G)$.

Теорема 1 доведена.

6. Висновки

У роботі знайдено нові достатні умови класичності узагальнених розв'язків параболічної мішаної задачі (1)–(3) (теорема 1). За цих умов розв'язки не обов'язково є неперервними у замкнутому циліндрі, у якому розглядається задача. Праві частини задачі належать певним анізотропним просторам Хермандера. Завдяки цим просторам отримано більш тонкий результат, ніж це можливо у межах класичних шкал функціональних просторів Гельдера або Соболева.

Література

- [1] Агранович М. С., Вшивик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – 19, № 3. – С. 53 – 161.
- [2] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
- [3] Lions J.-L. Magenes E. Non-homogeneous boundary-value problems and applications. – Vol. II. – Berlin: Springer, 1972. – xi+242 p.
- [4] Ивасишен С. Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Выща школа, 1990. – 200 с.
- [5] Eidel'man S. D. Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial differential equations, VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205 – 316.

- [6] *Eidel'man S. D., Zhitarashu N. V.* Parabolic boundary value problems. – Basel: Birkhäuser, 1998. – xii+298 p.
- [7] *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 2. – С. 97 – 154.
- [8] *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 3. – С. 3 – 146.
- [9] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
- [10] *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О корректности задач Дирихле и Неймана для параболических уравнений второго порядка с коэффициентами из классов Дини // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 3. – С. 328 – 337.
- [11] *Михайлов В. П.* Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем // Мат. энциклопедия. Т. 5 – Москва: Советская энциклопедия, 1985. – 1248 с.
- [12] *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. перевод: Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.)
- [13] *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
- [14] *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // В кн.: Х. Трибель. Теория функциональных пространств. – Москва: Мир, 1986. – С. 381 – 415.
- [15] *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem. – Berlin: Wiley-VCH, 2000. – 348 p.
- [16] *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii+425 p.
- [17] *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // Ann. Mat. Pura Appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1 – 62.

- [18] *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculus on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – xi+306 p.
- [19] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // *Banach J. Math. Anal.* – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
- [20] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xiv+297 p.
- [21] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // *Results Math.* – 2015. – **67**, № 1. – P. 135 – 152.
- [22] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. II // *Ukrainian Math. J.* – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
- [23] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. III // *Ukrainian Math. J.* – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
- [24] *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold // *Ukrainian Math. J.* – 2007. – **59**, № 6. – P. 874 – 893.
- [25] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // *Ukrainian Math. J.* – 2008. – **60**, № 4. – P. 574 – 597.
- [26] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // *Methods Funct. Anal. Topology.* – 2008. – **14**, № 1. – P. 81 – 100.
- [27] *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter. – *Methods Funct. Anal. Topology.* – 2013. – **19**, № 2. – P. 146 – 160.
- [28] *Лось В. М., Мурач О. О.* Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач // Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 219 – 234.
- [29] *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости // *Доп. НАН України.* – 2014. – № 6. – С. 23 – 31.

- [30] *Лось В. М.* Параболічні мішані задачі для систем Петровського в просторах узагальненої гладкості // Доп. НАН України. – 2014. – № 10. – С. 24 – 32.
- [31] *Лось В. М.* Класичні розв'язки параболічної мішаної задачі і $2b$ -анізотропні простори Хермандера // Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 276 – 290.
- [32] *Лось В. М.* Мішані задачі для двовимірного рівняння теплопровідності у анізотропних просторах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 645 – 656.
- [33] *Лось В. М.* Анізотропні простори Хермандера на бічній поверхні циліндра // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 2. – С. 226 – 237.
- [34] *Лось В. М., Мурач О. О.* Теореми про ізоморфізми для деяких параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера // arXiv:1510.06270.
- [35] *Лось В. М.* Теореми про ізоморфізми для деяких параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера: граничний випадок // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 6 (прийнята до друку).
- [36] *Los V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications // arXiv:1511.04688 (to appear in Commun. Pure Appl. Anal.).
- [37] *Лось В. М.* Класичні розв'язки параболічних початково-крайових задач і простори Хермандера // Укр. мат. журн. – 2016 – **68**, № 9 (прийнята до друку).
- [38] *Лось В. М., Михайлець В. А., Мурач О. О.* Загальні параболічні початково-крайові задачі у просторах Хермандера (у друці).
- [39] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики: Учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
- [40] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.