Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 1, 88–97

УДК 517.9

В. М. Горбачук

(Національний технічний університет України "КПІ", Київ)

Умови існування обмежених розв'язків диференціального рівняння у банаховому просторі на всій числовій осі

v.m.horbach@gmail.com

We consider an equation of the form $y''(t) - By(t) = f(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, where B is a positive operator in a Banach space. For the vector-valued function $f(t)$, we establish sufficient conditions under which a bounded solution to this equation exists and is unique.

Розглядається рівняння вигляду $y''(t) - By(t) = f(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, де B – позитивний оператор у банаховому просторі. Установлюються умови на вектор-функцію $f(t)$, достатні для існування і єдиності обмеженого розв'язку цього рівняння.

Розглядається рівняння вигляду

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right) y(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де B – позитивний оператор у комплексному банаховому просторі $\mathfrak{B}$, $m \in \mathbb{N}$, $f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ – неперервна вектор-функція.

Даються умови на $f(t)$, які гарантують існування єдиного обмеженого, періодичного або майже періодичного розв'язку цього рівняння.

1. Нехай $\mathfrak{B}$ – банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, $E(\mathfrak{B})$, $L(\mathfrak{B})$ – множини всіх щільно визначених замкнених і, відповідно, неперервних лінійних операторів в $\mathfrak{B}$, I – одиничний оператор, $\mathcal{D}(\cdot), \rho(\cdot), \sigma(\cdot)$ – область визначення, резольвентна множина і спектр оператора.

Для оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ і числа $\alpha > 0$ покладемо

$$\mathfrak{B}_{\{\alpha\}}(A) = \Big\{ x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) \Big| \, \exists c = c(x) > 0,$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} : \|A^k x\| \leq c\alpha^k k! \Big\}.$$

Простір $\mathfrak{B}_{\{\alpha\}}(A)$ є банаховим відносно норми

$$\|x\|_{\mathfrak{B}_\alpha(A)} = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\|A^k x\|}{\alpha^k k!}.$$

Покладемо

$$\mathfrak{B}_+(A) = \operatorname{proj}\lim_{\alpha \to 0} \mathfrak{B}_\alpha(A) = \bigcap_{\alpha > 0} \mathfrak{B}_\alpha(A).$$

Зліченно-нормований простір $\mathfrak{B}_+(A)$ називається простором цілих векторів оператора A (див. [1, 2]). Якщо $A \in L(\mathfrak{B})$, то $\mathfrak{B}_+(A) = \mathfrak{B}$. Неважко навести приклад оператора A, для якого $\mathfrak{B}_+(A) = \{0\}$. Але якщо A генерує аналітичну C_0-півгрупу лінійних неперервних операторів у $\mathfrak{B}$, то, як показано в [2 - 4], має місце таке

Твердження 1. *Нехай A є генератором обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$. Тоді $\overline{\mathfrak{B}_+(A)} = \mathfrak{B}$ і оператор-функція*

$$\exp(zA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k}{k!}$$

є цілою у просторі $\mathfrak{B}_+(A)$, сім'я $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює однопараметричну C_0-групу обмежених операторів у $\mathfrak{B}_+(A)$, і якщо x належить до цього простору, то

$$\exp(tA)x = \begin{cases} e^{tA}x & \text{при} \quad t \geq 0 \\ (e^{-tA})^{-1}x & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Нагадаємо [5], що сім'я лінійних неперервних операторів $U(t),\ t \geq 0$, що діють у локально опуклому просторі X, називається C_0-півгрупою, якщо: 1) $\forall t, s \geq 0 : U(t+s) = U(t)U(s)$; 2)$U(0) = I$; 3)$\forall x \in X : U(t)x \to x$ при $t \to 0$. Генератор A півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ задається рівністю

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t}$$

на тих елементах $x \in X$, для яких ця границя існує, і однозначно визначається півгрупою $U(t),\ t \geq 0$. Скрізь у подальшому півгрупу, що генерується оператором A, позначатимемо $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$. Півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$ називається аналітичною з кутом аналітичності θ (див [6]), якщо вона допускає продовження до аналітичної в секторі $\Sigma(\theta) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta\}$ оператор-функції e^{zA}, сильно неперервної уздовж довільного променя в $\Sigma(\theta)$ з початком в нулі. Якщо ж для будь-якого $\psi \in (0, \theta)$

$$\exists M_\psi, \forall z \in \Sigma(\psi) : \|e^{zA}\| \leq M_\psi,$$

то півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ називається обмеженою аналітичною.

2. Перейдемо тепер до рівняння (1), де B – позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, тобто $B \in E(\mathfrak{B}),\ (-\infty, 0] \in \rho(B)$ і існує стала $M > 0$ така, що

$$\forall \lambda \geq 0 : \|(B + \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{1+\lambda}.$$

Згідно із [7, 8], у цьому випадку є визначеними дробові степені $B^\alpha, 0 < \alpha < 1$, оператора B, а оператор $A = -B^{\frac{1}{2}}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$ з від'ємним типом

$$\omega(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|e^{tA}\|}{t} = -\sqrt{s(B)},$$

де

$$0 < s(B) = \sup_{\lambda\in\sigma(B)} \mathrm{Re}\lambda.$$

Як показано в [6] (Теорема 6.13), зв'язок між степенями $(-A)^\alpha = B^{\alpha/2}$ і півгрупою $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ здійснюється таким чином.

Твердження 2. *Для будь-яких $t > 0$ та $\alpha \geq 0$:*
a) $e^{tA} : \mathfrak{B} \mapsto \mathcal{D}((-A)^\alpha)$;
b) оператор $(-A)^\alpha e^{tA}$ обмежений, і

$$\left\|(-A)^\alpha e^{tA}\right\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t},$$

де $\delta \in (0, \sqrt{s(B)})$.

Під розв'язком (класичним) рівняння (1) на $\mathbb{R}$ розумітимемо двічі неперервно диференційовну вектор-функцію $y(t)$: $\mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ таку, що $y^{(2k)}(t) \in \mathcal{D}(B^{1-k})$ $(k = 0, 1)$, вектор-функція $B^{1-k}y^{(2k)}(t)$ є неперервною в $\mathfrak{B}$ на $\mathbb{R}$, і $y(t)$ задовольняє (1).

Розглянемо спочатку однорідне рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right) y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

Твердження 3. (*див.*[4]) *Вектор-функція $y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ є розв'язком рівняння (2) тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$y(t) = \exp(tA)f + \exp(-tA)g,$$

де $A = -B^{\frac{1}{2}}$, $f, g \in \mathfrak{B}_+(A)$. Вектори f і g однозначно визначаються за $y(t)$. Якщо $y(t)$ – розв'язок рівняння (2) на $\mathbb{R}$ і для деякого $\gamma \in (0, \sqrt{s(B)})$

$$\exists c_\gamma > 0,\ \forall t \in \mathbb{R} : \|y(t)\| \leq c_\gamma e^{\gamma|t|},$$

то $y(t) \equiv 0$. У випадку, коли B – нормальний оператор у гільбертовому просторі, можлива також рівність $\gamma = \sqrt{s(B)}$.

3. Розглянемо тепер неоднорідне рівняння (1).

Позначимо через $C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ множину всіх обмежених неперервних на $\mathbb{R}$ $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій. Будемо говорити, що вектор-функція $x(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ задовольняє умову неперервності Гельдера з показником $\alpha \in (0, 1)$, якщо існує стала $L > 0$ така, що

$$\|x(t) - x(s)\| \leq L|t - s|^{\alpha}. \tag{3}$$

Клас усіх вектор-функцій $x(t)$ з $C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, що задовольняють умову (3), позначатимемо $C_b^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Через $\widetilde{C_b^{\alpha}}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ позначатимемо множину вектор-функцій $x(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, для яких

$$\|x(t + s) - 2x(t) + x(t - s)\| \leq L|t - s|^{\alpha}.$$

Очевидно, що $C_b^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \in \widetilde{C_b^{\alpha}}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Під узагальненим розв'язком рівняння (1) на $\mathbb{R}$ розумітимемо неперервну вектор-функцію $y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$, для якої виконується інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \left(\frac{d^2}{dt^2} - B^* \right) \varphi(t), y(t) \right\rangle dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \varphi(t), f(t) \rangle \, dt,$$

де $\varphi(t)$ – довільна нескінченно диференційовна фінітна вектор-функція зі значеннями в $\mathcal{D}(B^*)$ така, що вектор-функція $B^*\varphi(t)$ є неперервною, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – дія функціонала на відповідний елемент.

Неважко переконатись, що якщо $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, то вектор-функція

$$z(t) = \frac{A^{-1}}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{|t-s|A} f(s) \, ds \tag{4}$$

є узагальненим розв'язком рівняння (1). Як показано в [9], за умови, що $f'(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ або $\forall s \in \mathbb{R} : f(s) \in \mathcal{D}(A)$ і $Af(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, вектор-функція (4) – розв'язок (1). Наша мета зараз полягатиме у відшуканні більш широкого класу вектор-функцій $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, для яких $z(t)$ є розв'язком цього рівняння.

За допомогою заміни змінних $t - s = \xi$ в інтегралі $\int\limits_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\,ds$ і $s - t = \xi$ – в інтегралі $\int\limits_{t}^{\infty} e^{(s-t)A} f(s)\,ds$ прийдемо до таких зображень для $z(t)$ та $z''(t)$:

$$z(t) = \frac{A^{-2}}{2} \int\limits_0^\infty e^{sA} A\omega_f(t,s)\,ds + A^{-2} f(t), \qquad (5)$$
$$\omega_f(t,s) = f(t+s) + f(t-s) - 2f(t);$$

$$z''(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty e^{sA} A\omega_f(t,s)\,ds. \qquad (6)$$

Покладемо

$$\omega_2(s,f) = \sup_{|\tau| \le s} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\omega_f(t,\tau)\|.$$

Функція $\omega_2(s,f)$ є неперервною на $[0,\infty)$ при фіксованому f і $\omega_2(0,f) = 0$. Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ задовольняє умову*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_2(s,f)}{s}\,ds < \infty. \qquad (7)$$

Тоді $z(t)$ є розв'язком рівняння (1).

Доведення. Із зображень (5) та (6) випливає, що якщо

$$v(t) = \int\limits_0^\infty e^{sA} A\omega_f(t,s)\,ds \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}),$$

то $z(t) \in \mathcal{D}(A)$ $(t \in \mathbb{R})$, $A^2 z(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ і $z''(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Покладемо

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = \int_0^1 e^{sA} A\omega_f(t,s)\,ds + \int_1^\infty e^{sA} A\omega_f(t,s)\,ds. \quad (8)$$

Оскільки, за твердженням 2, вектор-функція $e^{sA}A^{n+1}\omega_f(t,s)$ є неперервною при $(t,s) \in \mathbb{R} \times [1,\infty)$ і

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\| e^{sA} A^{n+1}\omega_f(t,s) \right\| \le s^{-(n+1)} e^{-\delta s} \sup_{t,s} \|\omega_f(t,s)\|,$$

то

$$v_2(t) = A^{-n} \int_1^\infty e^{sA} A^{n+1}\omega_f(t,s)\,ds \in \mathcal{D}(A^n),$$

звідки

$$A^n v_2(t) = \int_1^\infty e^{sA} A^{n+1}\omega_f(t,s)\,ds \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}). \quad (9)$$

Враховуючи, що при фіксованому $s \in (0,1]$ вектор-функція $e^{sA}A\omega_f(t,s)$ належить до $C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, а також нерівності

$$\left\| e^{sA} A\omega_f(t,s) \right\| \le \frac{\omega_2(s,f)}{s}$$

і (7), одержуємо

$$\int_0^1 e^{sA} A\omega_f(t,s)\,ds \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}). \quad (10)$$

Співвідношення (9) та (10) зумовлюють включення $v(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, звідки, беручи до уваги (5) і (6), робимо висновок, що $z(t)$ – розв'язок рівняння (1), що й завершує доведення теореми.

Наслідок 1. *Якщо $f(\cdot) \in \widetilde{C_b^\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, то вектор-функція $z(t)$ є розв'язком рівняння (1).*

Теорема 2. *Нехай* $f(s) \in \mathcal{D}((-A)^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, *і функція* $\|(-A)^\alpha f(s)\|$ *є обмеженою. Тоді для* $\alpha' \in (0, \alpha)$ *мають місце включення*

$$z(t) \in \mathcal{D}((-A)^{2+\alpha'}), \quad z''(t) \in \mathcal{D}((-A)^{\alpha'}),$$

вектор-функції $(-A)^{2+\alpha} z(t)$ *та* $(-A)^\alpha z''(t)$ *неперервні на* $\mathbb{R}$ *і* $z(t)$ *є розв'язком рівняння (1).*

Доведення. Із зображень (5) і (6) для $z(t)$ і $z''(t)$ випливає, що для доведення теореми досить показати, що

$$v(t) = \int_0^\infty e^{sA} A \omega_f(t,s)\, ds \in C_b\left(\mathbb{R}, \mathcal{D}((-A)^{\alpha'}\right)$$

та

$$(-A)^{\alpha'} v(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}).$$

Подаючи $v(t)$ у вигляді (8) і враховуючи міркування, наведені при доведенні теореми 1, приходимо до висновку, що

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_2(t) \in \mathcal{D}(A^n) \text{ і } A^n v_2(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}). \tag{11}$$

Візьмемо $\alpha'' = 1 - (\alpha - \alpha') < 1$. Тоді

$$\begin{aligned} e^{sA} A \omega_f(t,s) &= (-A)^{1-\alpha} e^{sA} A^\alpha \omega_f(t,s) = \\ &= (-A)^{-\alpha'} e^{sA} (-A)^{\alpha''} (-A)^\alpha \omega_f(t,s). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\left\| e^{sA} (-A)^{\alpha''} (-A)^\alpha \omega_f(t,s) \right\| \leq \frac{M_{\alpha''}}{s^{\alpha''}} \sup_{t,s \in \mathbb{R}} \|(-A)^\alpha \omega_f(t,s)\|$$

і вектор-функція $e^{sA}(-A)^{\alpha''}(-A)^\alpha \omega_f(t,s)$ є неперервною по s по і t, $(s,t) \in (0,1] \times \mathbb{R}$, маємо

$$(-A)^{\alpha'} v_1(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}). \tag{12}$$

Тоді із зображень (5), (6) та включень (11), (12) випливає, що $z(t)$ – розв'язок рівняння (1), що й треба було довести.

Нагадаємо, що неперервна вектор-функція $f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ називається майже періодичною (за Бором), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує стала $L_\varepsilon > 0$ така, що кожний інтервал з $\mathbb{R}$, довжина якого не менша за L_ε, містить точку $\tau = \tau(\varepsilon)$ (ε-майже період) із властивістю

$$\forall t \in \mathbb{R} : \|f(t) - f(t+\tau)\| < \varepsilon.$$

Виходячи з теорем 1, 2, наслідку 1 та твердження 3, прийдемо до основної теореми.

Теорема 3. *Нехай $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Тоді існує один і лише один обмежений узагальнений розв'язок $y(t)$ рівняння (1) на $\mathbb{R}$ і він зображується у вигляді (5). Якщо ж $f(\cdot) \in \widetilde{C_b^\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $\alpha \in (0,1)$, або $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^\alpha))$, то цей розв'язок є класичним. У випадку, коли вектор-функція $f(t)$ є майже періодичною (періодичною), розв'язок також є майже періодичним (періодичним).*

Література

[1] R. Goodman, *Analytic and entire vectors for representations of Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), 55-76.

[2] V. I. Gorbachuk and M. L. Gorbachuk, *Boundary Value Problems for Operator Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1991.

[3] M. L. Gorbachuk and Yu. G. Mokrousov, *On density of some sets of infinitely differentiable vectors of a closed operator on a Banach space*, Methods Funct. Anal. Topology **8** (2002), no. 1, 23-29.

[4] V. M. Gorbachuk, *On solutions of parabolic and elliptic type differential equations on $(-\infty, \infty)$ in a Banach space*, Methods Funct. Anal. Topology **14** (2008), no. 2, 177-183.

[5] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, Москва, 1967.

[6] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer, New York ets., 1983.

[7] H. Komatsu, *Fractional powers of operators*, Pacific J. of Math. **19** (1966), no. 2, 285-346.

[8] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва, 1967.

[9] V. M. Gorbachuk, *On the structure of solutions of operator-differential equations on the whole real axis*, Methods Funct. Anal. Topology **21** (2015), no. 2, 170-178.