Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 1, 98–107

УДК 517.984, 517.923

А. С. Горюнов

(Інститут математики НАН України, Київ)

Про збіжність та апроксимацію розв'язків крайових задач для квазідиференціальних рівнянь

goriunov@imath.kiev.ua

The paper studies the convergence and approximation of solutions of two-point boundary value problems for the Shin–Zettl quasidifferential equations of arbitrary order $m \in \mathbb{N}$ on the finite interval. The sufficient conditions for the uniform convergence of these solutions are found in terms of coefficient matrices, right-hand members and matrices defining boundary conditions. Also we prove that these solutions may be approximated with solutions of boundary value problems for differential equations with infinitely smooth coefficients.

В роботі досліджується питання збіжності та апроксимації розв'язків двоточкових крайових задач для квазідиференціальних за Шином-Цеттлом рівнянь довільного порядку $m \in \mathbb{N}$ на скінченному інтервалі. Знайдено достатні умови рівномірної збіжності розв'язків та їх квазіпохідних до порядку $m-1$ у термінах матриць коефіцієнтів, правих частин і матриць, що задають крайові умови. Зокрема, встановлена можливість апроксимації розв'язків таких задач розв'язками крайових задач для диференціальних рівнянь з нескінченно гладкими коефіцієнтами.

Основний об'єкт, що досліджується в роботі — крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь Шина–Цеттла. Поняття квазідиференціальних виразів (або квазіпохідних) було введене у роботах Шина [13, 14, 15] і пізніше узагальнено Цеттлом [9], див. також [1]. Це поняття є узагальненням звичайного диференціального виразу.

Як відомо, у сучасній математичній фізиці помітне значення мають диференціальні крайові задачі з узагальненими функціями в коефіцієнтах. Виявляється, що деякі класи таких задач можна інтерпретувати як квазідиференціальні за Шином-Цеттлом крайові задачі (див., зокрема, роботи [2, 8]). У зв'язку з цим представляє інтерес дослідження таких задач і відповідних їм операторів. Спектральна теорія таких операторів розроблялась в [5, 7].

Дану роботу присвячено дослідженню збіжності розв'язків двоточкових крайових задач для квазідиференціальних рівнянь спеціального вигляду. Зокрема, показано, що розв'язок такої задачі разом з усіма його квазіпохідними може бути побудований як границя розв'язків крайових задач з коефіцієнтами з деякої всюди щільної в $L_1([a,b],\mathbb{C})$ підмножини простору $C^\infty([a,b],\mathbb{C})$ (зокрема, поліноміальними).

Близькі результати, що стосуються виразів Штурма-Ліувілля з сингулярними коефіцієнтами, отримані в роботі [4].

Перейдемо до формулювання об'єкту дослідження.

Почнемо з того, що введемо квазіпохідні Шина–Цеттла відповідно до [10, 11]. Це окремий випадок загальних квазіпохідних Шина–Цеттла, що розглядались в [1, 9] та інших роботах.

Нехай $m \in \mathbb{N}$ і задано скінченний відрізок $[a,b]$. Квазіпохідні функції $y(t)$ визначаються рекурентним чином за формулами:

$$D^{[0]}y := y,$$

$$D^{[k]}y := (D^{[k-1]}y)' - \sum_{s=1}^{k} a_{k,s}(t) D^{[s-1]}y, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

для функцій $y(t)$ з множини визначення квазіпохідних

$$\mathrm{Dom}(A) := \left\{ y \,\middle|\, D^{[k]}y \in AC([a,b],\mathbb{C}),\ k = \overline{0, m-1},\ \right\}.$$

Тут коефіцієнти $a_{k,s}(t) \in L_1([a,b],\mathbb{C})$, $k \in \{1,2,\dots,m\}$, $s \in \{1,2,\dots,k\}$. З означення квазіпохідних одразу випливає, що $D^{[m]}y \in L_1([a,b],\mathbb{C})$.

Позначимо через $A(t)$ комплекснозначну матрицю-функцію порядку m, що містить коефіцієнти квазіпохідних:

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{1,1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \dots & a_{m-1,m-1} & 1 \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,m-1} & a_{m,m} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Легко помітити, що така матриця є матрицею Шина–Цеттла у сенсі роботи [9].

Зауваження 1. Нехай $a_{k,s} \in C^{\infty}([a,b],\mathbb{C})$. Тоді всі квазіпохідні Шина-Цеттла, включно з $D^{[m]}y$, є диференціальними виразами з нескінченно гладкими коефіцієнтами.

Якщо $a_{k,s}$ є поліномами, то всі квазіпохідні Шина–Цеттла, включно з $D^{[m]}y$, є диференціальними виразами з поліноміальними коефіцієнтами.

Позначимо для кожного $t \in [a,b]$

$$\widehat{y}(t) := \left(D^{[0]}y(t), D^{[1]}y(t), \dots, D^{[m-1]}y(t) \right) \in \mathbb{C}^m.$$

Розглянемо двохточкову квазідиференціальну крайову задачу

$$D^{[m]}y(t) = f(t) \in L_1([a,b],\mathbb{C}), \tag{2}$$

$$\alpha\widehat{y}(a) + \beta\widehat{y}(b) = c, \tag{3}$$

де матриці $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а вектор $c \in \mathbb{C}^m$.

Під розв'язком цієї крайової задачі розуміється функція $y_n(t) \in \mathrm{Dom}(A)$, яка задовольняє квазідиференціальне рівняння (2) майже скрізь на відрізку $[a,b]$ та крайову умову (3).

Наступне твердження пов'язує квазідиференціальну крайову задачу (2), (3) з системами диференціальних рівнянь першого порядку.

Лема 1. *Функція $y(t)$ є розв'язком крайової задачі* (2), (3) *тоді і тільки тоді, коли вектор-функція $w(t) = \widehat{y}(t)$ є розв'язком крайової задачі*

$$w'(t) = A(t)w(t) + \varphi(t), \tag{4}$$

$$\alpha w(a) + \beta w(b) = c, \tag{5}$$

де вектор-функція $\varphi(t) = (0, 0, ..., 0, f(t)) \in L_1([a,b]; \mathbb{C}^m)$.

Доведення. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} (D^{[k-1]}y(t))' = D^{[k]}y(t) + \sum\limits_{s=1}^{k} a_{k,s}(t) D^{[s-1]}y(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ (D^{[m-1]}y(t))' = \sum\limits_{s=1}^{m} a_{m,s}(t) D^{[s-1]}y(t) + f(t). \end{cases}$$

Якщо $y(\cdot)$ – розв'язок рівняння (2), то з означення квазіпохідних випливає, що $y(\cdot)$ є розв'язком цієї системи. З іншого боку, поклавши $w(t) = \widehat{y}(t)$ і $\varphi(t) = (0, 0, ..., 0, f(t))$, дану систему можна записати у вигляді рівняння (4).

Враховуючи, що $\widehat{y}(a) = w(a)$, $\widehat{y}(b) = w(b)$, легко бачити, що крайові умови (3) еквівалентні крайовим умовам (5). $\square$

Розглянемо на відрізку $[a,b]$ послідовність матриць Шина–Цеттла порядку m $A_n(t) := (a_{k,s,n}(t))$, $n \in \mathbb{N}$, яким відповідають квазіпохідні $D_n^{[0]}y, D_n^{[1]}y, \ldots, D_n^{[m]}y$ функції $y(t)$.

Позначимо для кожного $t \in [a,b]$

$$\widehat{y}_n(t) = \left(D_n^{[0]}y(t), D_n^{[1]}y(t), \ldots, D_n^{[m_j-1]}y(t) \right) \in \mathbb{C}^m$$

та розглянемо поряд з задачею (2), (3) послідовність двоточкових крайових задач

$$D_n^{[m]} y(t) = f_n(t) \in L_2([a,b];\mathbb{C}), \tag{6}$$

$$\alpha_n \widehat{y}_n(a) + \beta_n \widehat{y}_n(b) = c_n, \tag{7}$$

де матриці $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а вектор $c_n \in \mathbb{C}^m$.

Відповідно до леми 1, вони еквівалентні крайовим задачам

$$w'(t) = A_n(t)w(t) + \varphi_n(t), \tag{8}$$

$$\alpha_n w(a) + \beta_n w(b) = c_n, \tag{9}$$

де $w(t) = \widehat{y}_n(t)$ і $\varphi_n(t) = (0, 0, ..., 0, f_n(t)) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^m)$.

Позначимо через $Y(t)$ матрицант задачі (4), (5), тобто розв'язок матричної задачі Коші

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(a) = I, \tag{10}$$

де I — одинична $m \times m$-матриця.

Аналогічно позначимо через $Y_n(\cdot)$ — матриценти, що відповідають задачам (8), (9), тобто розв'язки матричних задач Коші

$$Y_n'(t) = A_n(t)Y_n(t), \quad Y_n(a) = I, \tag{11}$$

і через $Z_n(t)$ — матриценти, що є розв'язками матричних задач Коші

$$Z_n'(t) = [A_n(t) - A(t)]Z_n(t), \quad Z_n(a) = I. \tag{12}$$

Теорема 1. *Нехай виконані умови:*

1) *однорідна крайова задача*

$$D^{[m]} y = 0, \quad \alpha\widehat{y}(a) + \beta\widehat{y}(b) = 0$$

має тільки тривіальний розв'язок;

2) матриціанти $Z_n(t)$ задовольняють граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \|Z_n(t) - I\|_\infty = 0;$$

3) праві частини задовольняють умову $\|f_n(\cdot)\|_1 = O(1)$ та граничне співвідношення

$$\| \int_a^t (f_n(s) - f(s))\, ds\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty;$$

4) матриці, що визначають крайові умови, і вектори у правих частинах задовольняють граничні співвідношення $\alpha_n \to \alpha, \quad \beta_n \to \beta, \quad c_n \to c, \quad n \to \infty.$

Тоді при достатньо великих n однозначно визначені розв'язки задач (6), (7) *задовольняють граничні співвідношення*

$$\|D_n^{[k]} y_n - D^{[k]} y\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty, \quad k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}. \quad (13)$$

Тут і далі $\|\cdot\|_\infty$ — рівномірна норма, а $\|\cdot\|_1$ — норма в банаховому просторі $L_1([a,b],\mathbb{C})$.

Зауваження 2. Умова 2 означає, що матриця $A_n(t) - A(t)$ належить до класу $\mathcal{M} = \mathcal{M}(a,b;m)$, введеного в роботах Михайлеця і його учнів, див., зокрема, роботу [6]. При доведенні теореми 1 ми скористаємось результатами цієї роботи.

Доведення. В силу леми 1 отримуємо, що умова 1 теореми рівносильна тому, що однорідна гранична крайова задача

$$w'(t) = A(t)w(t), \quad (14)$$

$$\alpha w(a) + \beta w(b) = 0, \quad (15)$$

також буде мати лише тривіальний розв'язок.

При цьому за побудовою функцій φ та φ_n з умови 3 випливає, що

$$\|\varphi_n\|_1 \le c < \infty$$

та

$$\| \int_a^t (\varphi_n(s) - \varphi(s))\, ds\|_\infty \to 0 \quad n \to \infty.$$

Тоді, враховуючи зауваження 2 роботи [6], можна застосувати до задач (8), (9) теорему 1 цієї роботи з $\varepsilon := 1/n$ та $B_\varepsilon w = \alpha_n w(a) + \beta_n w(b)$.

Звідси ми отримуємо граничне співвідношення

$$\|w_n(\cdot) - w_0(\cdot)\|_\infty \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Тут w_0 — розв'язок крайової задачі (4), (5), а w_n — розв'язки задач (8), (9). Враховуючи лему 1, звідси випливає співвідношення (13). □

Умова 2 теореми 1 не є конструктивною. При доведенні наступної теореми ми скористаємось результатом, отриманим в [12]. При цьому відмітимо, що результати роботи [12] були істотно посилені в подальших роботах, див. [6] і наведені там посилання. Тим не менше, зараз нам буде достатньо нижченаведеного результату.

Лема 2. *Якщо при $n \to \infty$ виконана одна з чотирьох (нееквівалентних між собою) умов:*

(α) $\|A_n - A\|_1 = O(1)$,

(β) $\| \int_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds \cdot (A_n(t) - A(t))\, \|_1 \to 0$,

(γ) $\| (A_n(t) - A(t)) \cdot \int_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds\|_1 \to 0$,

(δ) $\| \int_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds\, (A_n(t) - A(t)) - (A_n(t) - A(t)) \int_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds\|_1 \to 0$,

то умова $\| \int_a^t (A_n(s) - A(s))\, ds\|_C \to 0$ *рівносильна умові 2 теореми 1.*

Розглянемо знову лише задачу (2), (3).

Нехай $X([a,b])$ — довільна всюди щільна в $L_1([a,b],\mathbb{C})$ множина функцій із $C^\infty([a,b],\mathbb{C})$.

Тоді справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай однорідна крайова задача*

$$D^{[m]}y(t) = 0, \quad \alpha\widehat{y}(a) + \beta\widehat{y}(b) = 0$$

має тільки тривіальний розв'язок.

Тоді для задачі (2), (3) *існує послідовність диференціальних крайових задач вигляду* (6), (7), *таких, що:*

1) їх коефіцієнти $\widetilde{a}_{k,s,n} \in X([a,b])$*;*

2) існують розв'язки цих задач і виконуються граничні співвідношення (13).

Доведення. Для доведення теореми 2 нам достатньо буде, спираючись на лему 2, замінити умову 2 теореми 1 на таку: $\|A_n - A\|_1 \to 0$.

З означення класу $X([a,b])$ випливає, що для будь-яких $k \in \{1,\ldots,m\}$, $s \in \{1,\ldots,k\}$ існує послідовність $\{\widetilde{a}_{k,s,n}\}_{n\geq 1}$ така, що $\|\widetilde{a}_{k,s,n} - a_{k,s}\|_1 \to 0$, $n \to \infty$.

Очевидно, що при кожному n набори функцій $\widetilde{a}_{k,s,n}$ породжують матриці $\widetilde{A}_n$ Шина-Цеттла. Із зауваження 1 випливає, що пов'язані з цими матрицями квазідиференціальні вирази є диференціальними з коефіцієнтами із $C^\infty([a,b],\mathbb{C})$.

Також виберемо послідовності матриць α_n, β_n, такі, що $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$, $n \to \infty$, та послідовність векторів c_n, таку, що $c_n \to c$, $n \to \infty$.

Тоді твердження теореми одразу випливає з теореми 1. □

Література

[1] *Everitt W. N., Markus L.* Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi–differential Operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1999.

[2] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of singular Sturm–Liouville equations // Methods Funct. Anal. Topology. — 2010. — **16**, № 2. — P. 120–130.

[3] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukrainian Math. J. — 2011. — **63**, № 9. — P. 1190–1205.

[4] *Goriunov A. S.* Convergence and approximation of the Sturm–Liouville operators with potentials-distributions // Ukrainian Math. J. — 2015. — **67**, № 5. — P. 680–689.

[5] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A., Pankrashkin K.* Formally self-adjoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electron. J. Diff. Equ. — 2013. — № 101. — P. 1–16.

[6] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukrainian Math. J. — 2013. — **65**, № 1. — P. 77–90.

[7] *Mikhailets V. A., Molyboga V. M.* Singular eigenvalue problems on the circle // Meth. Funct. Anal. Topol. — 2004. —**10**, № 3. — P. 44–53.

[8] *Savchuk A., Shkalikov A.* Sturm–Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. — 1999. — **66**, № 5-6. — P. 741–753.

[9] *Zettl A.* Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mountain J. Math. — 1975. —**5**, № 3. — P. 453–474.

[10] *Горюнов А. С., Михайлец В. А.* О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка // Доповіді НАН України. — 2009. — № 4. — С. 19–24.

[11] *Горюнов А. С., Михайлец В. А.* О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов нечетного порядка // Доповіді НАН України. — 2009. — № 9. — С. 27–31.

[12] *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. — 1967. — **176**, № 4. — С. 774–777.

[13] *Шин Д.* Теорема существования квазидифференциального уравнения n-го порядка // Докл. АН СССР. — 1938. — **18**, № 8. — С. 515–518.

[14] *Шин Д.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. — 1940. — **7(49)**, № 3. — С. 479–532.

[15] *Шин Д.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Матем. сборник. — 1943. — **13(55)**, № 1. — С. 39–70.