Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 193–203

УДК 517.927

Г. О. Маслюк

(Національний технічний університет України "КПІ", Київ)

Багатоточкові крайові задачі з параметром для диференціальних рівнянь високого порядку на просторах Гельдера

masliukgo@ukr.net

We establish sufficient conditions for continuous dependence on the parameter of solutions to multipoint linear boundary-value problems for systems of differential equations of order $r \geq 2$ in the norms of Hölder spaces $C^{n+r,\alpha}([a,b])$.

Знайдено достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язків багатоточкових лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ за нормами просторів Гельдера $C^{n+r,\alpha}([a,b])$.

1. Вступ

Питання, пов'язані з граничним переходом у системах диференціальних рівнянь, виникають у багатьох задачах. Ці питання найкраще досліджено стосовно задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Більш складний випадок загальних лінійних крайових задач вивчався І. Т. Кігурадзе [1 – 3] та його послідовниками. Суттєві узагальнення цих результатів отримано у роботах Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця і Н. В. Реви [4 – 6]. Вони стосуються рівномірної неперервності за параметром розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Для систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків ці питання досліджено В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [7].

Ці результати були узагальнені на досить широкий клас лінійних крайових задач — тотальних щодо просторів Соболєва [8 – 11] та просторів неперервно диференційовних функцій [12 – 15]. Доведено фредгольмовість таких задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.

Щодо комплексних просторів Гельдера, найбільш широкий клас лінійних крайових задач введено і досліджено В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем та В. О. Солдатовим [16], для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r = 1$. У випадку $r \geq 2$ вказані результати досліджено у роботі [17].

У роботах В. А. Михайлеця та його учнів ці результати перенесено на важливий клас багатоточкових крайових задач щодо соболєвських просторів та просторів $C^{(n)}[a, b]$ для рівнянь і систем як першого [18 – 20], так і високих порядків [14, 21, 22]. У цих роботах припускається, що кожна точка (в якій розглядаються крайові умови) або не залежить від малого параметра $\varepsilon > 0$ [18, 20 – 22], або має граничне значення при $\varepsilon \to 0+$ [14, 19]. Окрім того, допускається існування додаткових точок, що входять у крайовий вираз, нехтуваний при $\varepsilon \to 0+$.

За нормами просторів неперервно диференційовних функцій знайдено [23] достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язків багатоточкових лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$. Відмітимо, що у зазначеній роботі запропоновано нову постановку багатоточкової крайової задачі, де умови на коефіцієнти при похідних шуканої функції у крайових операторах ставляться окремо для цілої серії точок, які залежать від $\varepsilon > 0$ і мають спільну граничну точку при $\varepsilon \to 0+$.

Мета даної роботи — перенести результати роботи [17] на клас багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ щодо просторів Гельдера $C^{n+r,\alpha}([a,b])$.

2. Постановка задачі

Нехай задано скінченний відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$, цілі числа $n \geq 0$, $m \geq 1$ та дійсне число α таке, що $0 < \alpha \leq 1$. Будемо використовувати комплексні банахові простори Гельдера $(C^{n,\alpha})^m := C^{n,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^m)$ та $(C^{n,\alpha})^{m\times m} := C^{n,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$. Вони складаються відповідно з усіх вектор-функцій і матриць-функцій порядку m, елементи яких належать до простору $C^{n,\alpha} := C^{n,\alpha}([a,b],\mathbb{C})$ і наділені нормами, що є сумою норм у $C^{n,\alpha}$ усіх компонентів цих функцій.

Банахів простір $C^{(l)} := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C})$ усіх l разів неперервно диференційовних функцій $x : [a,b] \to \mathbb{C}$, де ціле $l \geq 0$, наділений нормою

$$\|x\|_l := \sum_{j=0}^{l} \max\{|x^{(j)}(t)| : t \in [a,b]\}.$$

Нагадаємо, що простором Гельдера називається наступний клас комплекснозначних функцій над $[a,b]$:

$$C^{l,\alpha} := \{x \in C^{(l)} : \sup_{t_1,t_2\in[a,b],\, t_1\neq t_2} \frac{|x^{(l)}(t_2) - x^{(l)}(t_1)|}{|t_2 - t_1|^{\alpha}} < +\infty,$$

де $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. Цей простір є банаховим відносно норми

$$\|x\|_{l,\alpha} := \|x\|_l + \|x^{(l)}\|'_{\alpha}.$$

Нехай задано цілі числа $r \geq 2$, $m \geq 1$, $n \geq 0$ і $p \geq 2$. Розглянемо на відрізку $[a, b]$ сім'ю лінійних багатоточкових крайових задач для систем m диференціальних рівнянь порядку r, залежних від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$B_j(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=1}^{q_j}\sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon) = c_j(\varepsilon), \tag{2}$$

де число $\varepsilon_0 > 0$ є фіксованим. Тут є невідомою вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$, а усі $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$, $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$, вектор $c_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ та числа $q_j \in \mathbb{N}$, матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm\times rm}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a,b]$ є заданими. Вектори і вектор-функції вважаємо поданими у вигляді стовпців.

Використання у багатоточковій крайовій умові (2) повторної суми за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра j. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого $j \in \{1,\ldots,p\}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

Зауважимо, що крайова умова (2) охоплює як класичні багатоточкові задачі, так і некласичні, що містять похідні шуканої функції, порядок яких більший, ніж порядок рівняння (1). За аналогією з роботою [17] задачу (1), (2) називаємо тотальною щодо простору $C^{n+r,\alpha}$. (У цій роботі поняття тотальної крайової задачі введено щодо просторів Гельдера для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$).

Враховуючи, що багатоточкова крайова задача (1), (2) залежить від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, закономірно виникає важливе питання про неперервну залежність розв'язку $y = y(\cdot,\varepsilon)$ такої задачі за параметром ε у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$.

Мета роботи полягає у знаходженні достатніх умов для однозначної розв'язності цієї задачі і виконання граничної властивості

$$\|y(\cdot,\varepsilon)-y(\cdot,0)\|_{n+r,\alpha}\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{3}$$

3. Основний результат

Перейдемо до формулювання основного результату.

Надалі вважаємо, що виконується

Припущення. *Однорідна гранична крайова задача*

$$y^{(r)}(t,0)+\sum_{j=1}^{r}A_{r-j}(t,0)y^{(r-j)}(t,0)=0,\ t\in[a,b],$$

$$B_j(0)y(\cdot,0)=0,\ j\in\{1,\dots,r\}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Умови, достатні для однозначної розв'язності багатоточкової крайової задачі (1), (2) і неперервної залежності її розв'язку за малим параметром дає

Теорема. *Нехай виконується припущення і при* $\varepsilon\to 0+$ *та* $j\in\{1,\dots,p\}$ *умови:*

(a) $\|A_k(\cdot,\varepsilon)-A_k(\cdot,0)\|_{n,\alpha}\to 0$ для кожного $k\in\{0,\dots,r-1\}$;

(b1) $t_{j,k}(\varepsilon)\to t_j(0)$ для усіх $k\in\{1,\dots,q_j\}$;

(b2) $\sum\limits_{k=1}^{q_j}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\to\beta_j^{(l)}(0)$ для усіх $l\in\{0,\dots,n+r\}$;

(b3) $\beta_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon)=O(1)$ для усіх $k\in\{1,\dots,q_j\}$;

(b4) $\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\|\cdot|t_{j,k}(\varepsilon)-t_j(0)|\to 0$ для усіх $k\in\{1,\dots,q_j\}$, $l\in\{0,\dots,n+r-1\}$;

(b5) $\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \to 0$ для усіх $k \in \{1, \dots, q_0\}$, $l \in \{0, \dots, n+r\}$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *оборотний.*

Якщо, окрім цього,

(c) $\|f(\cdot, \varepsilon) - f(\cdot, 0)\|_{n,\alpha} \to 0$;

(d) $c_j(\varepsilon) \to c_j(0)$,

то при малих ε *єдиний розв'язок* $y(\cdot, \varepsilon)$ *крайової задачі* (1), (2) *задовольняє граничну властивість* (3).

В умові (b4) і надалі під нормою числової матриці (зокрема, вектора) розуміємо суму модулів усіх її елементів.

4. Доведення

Розглянемо на скінченному відрізку $[a, b]$ лінійну крайову задачу для систем m диференціальних рівнянь r-го порядку

$$L(\varepsilon)y(t, \varepsilon) \equiv y^{(r)}(t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t, \varepsilon) y^{(r-j)}(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad t \in [a, b], \tag{4}$$

$$B_j(\varepsilon) y(\cdot, \varepsilon) = c_j(\varepsilon), \ j \in \{1, \dots, r\}, \tag{5}$$

де $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, а число $\varepsilon_0 > 0$ є фіксованим. Тут є невідомою вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$, а усі $A_{r-j}(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m \times m}$, $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$, лінійний неперервний оператор $B_j(\varepsilon) : (C^{n+r,\alpha})^m \to C^{rm}$ і $c_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ є заданими.

Основний результат нашої роботи є прямим наслідком наступного твердження (див. [17], теорема 3).

Твердження. *Нехай виконується припущення і при* $\varepsilon \to 0+$ *та* $j \in \{1, \dots, r\}$ *умови* (a) *і*

(b) $B_j(\varepsilon)y \to B_j(0)y$ для кожного $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *оборотний. Якщо, окрім цього, виконуються умови* (c) *і* (d), *то при малих* ε *єдиний розв'язок* $y(\cdot, \varepsilon)$ *крайової задачі* (4), (5) *задовольняє граничну властивість* (3).

Для доведення основної теореми достатньо показати, що умова (b) твердження є наслідком умов (b1) – (b5) теореми.

У припущенні, що умови (b1) – (b5) виконуються, доведемо властивість (b). Для довільної функції $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$ і достатньо малого $\varepsilon > 0$ запишемо:

$$\|B_j(\varepsilon)y - B_j(0)y\| =$$

$$= \left\| \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{q_j} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j(0)) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{q_0} \sum_{l=0}^{n+r} \|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j(0)) \right\| \tag{6}$$

Тут на підставі умови (b5) маємо:

$$\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| \leq \|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y\|_{n+r,\alpha} \to 0 \tag{7}$$

для усіх допустимих значень індексів k і l. Ця і всі інші границі у доведенні розглядаються за умови, що $\varepsilon \to 0+$.

Дослідимо останній доданок в (6). Запишемо:

$$\left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j(0)) \right\| =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j(0)) + \right.\\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j(0)) - \beta_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j(0)) \right\| \le \\
&\le \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \cdot \Big(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j(0)) \Big) \right\| + \\
&\quad + \left\| \left(\sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}(0) \right) \cdot y^{(l)}(t_j(0)) \right\| \le \\
&\le \sum_{k=1}^{q_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j(0))\| + \\
&\quad + \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}(0) \right\| \cdot \|y\|_{n+r,\alpha}.
\end{aligned}
$$

Тут на підставі умови (b2) маємо:

$$
\left\| \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)}(0) \right\| \cdot \|y\|_{n+r,\alpha} \to 0. \tag{8}
$$

Окрім того,

$$
\sum_{k=1}^{q_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j(0))\, \| \to 0. \tag{9}
$$

Справді, якщо $l = n+r$, то це є прямим наслідком умов (b1), (b3) і неперервності функції $y^{(l)}$. Якщо $l \le n + r - 1$, то це випливає з теореми Лагранжа і умови (b4):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{q_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j(0))\, \| \le \\
&\le \|y\|_{n+r,\alpha} \sum_{k=1}^{q_j} \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j(0)| \to 0.
\end{aligned}
$$

Із формул (10), (8), (9) випливає, що

$$\left\|\sum_{k=1}^{q_j}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon))-\beta_{j}^{(l)}(0)y^{(l)}(t_j(0))\right\|\to 0 \qquad (10)$$

Тепер властивість (b) є прямим наслідком формул (6), (7) і (10).

Теорему доведено.

Література

[1] *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. пробл. мат. Новейшие достижения. – Москва: ВИНИТИ – 1987. – **30**. – С. 3–103.

[2] *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.

[3] *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Диф. уравн. – 2003. – **39**, № 2. – С. 198–209

[4] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 227–239.

[5] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23–27.

[6] *Kodliuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77–90.

[7] *Mikhailets V. A. Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sciences. – 2015. – **204**, № 3.

[8] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28–30.

[9] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sciences. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589–599.

[10] *Кодлюк Т. И.* Матрицы Грина одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 191–199.

[11] *Gnyp E. V., Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev space // Ukrainian Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 658-667.

[12] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 268–273.

[13] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24–28.

[14] *Чеханова Г. О.* Граничний перехід в одновимірних лінійних крайових задачах з параметром: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ: 2014. – 122 с.

[15] *Soldatov V. A.* On the continuity in a parameter for the solutions of boundary-value problems total with respect to the spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ // Ukrainian Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 785-794.

[16] *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V. A.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems, arXiv:1604.07029.

[17] *Маслюк Г. О.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Гельдера // Укр. мат. журн. (прийнято до друку).

[18] *Рева Н. В.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ: 2009. – 148 с.

[19] *Кодлюк Т. И.* Предельный переход в классе многоточечных краевых задач //Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 203–216.

[20] *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доп. НАН України. – 2012. — № 11. – С. 15–19.

[21] *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 260–279.

[22] *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач //Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4–5. – С. 532–541.

[23] *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 327–337.