Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 125–174

УДК 510.22 + 51-71 + 517.983
MSC 03E75; 83A05; 47B37

Я. І. Грушка

(Інститут математики НАН України, Київ)

Про часозворотність тахіонових кінематик

grushka@imath.kiev.ua

In the present paper we analyze the violation of the principle of causality (i. e. the possibility of returning to the own past) in the currently known mathematically strict models of tachyon kinematics, associated with the generalized Lorentz-Poincare transformations in the sense of E.Recami, using the recently developed mathematical apparatus of the theory of kinematic changeable sets.

У даній роботі, спираючись на розвинутий в останні роки математичний апарат теорії кінематичних мінливих множин, проведено аналіз порушення принципу причинності (тобто наявності можливості повернення у власне минуле) у відомих на даний час математично строгих моделях тахіонових кінематик, пов'язаних з узагальненими перетвореннями Лоренца-Пуанкаре в сенсі E. Recami.

1. Вступ

Тематика побудови теорії надсвітлового руху була започаткована в роботах [1, 2] понад 50 років тому назад. І, незважаючи на те, що тахіони (тобто об'єкти, які рухаються зі швидкістю, більшою за швидкість світла) на сьогодні експериментально не виявлені, дана тематика залишається актуальною.

Загальновідомо, що в середовищі фізиків поширена думка про те, що гіпотеза про існування тахіонів веде до часових парадоксів, пов'язаних з наявністю теоретичної можливості змінити власне минуле. Умови виникнення подібних часових парадоксів детально проаналізовані в роботі [3]. На жаль, в роботі [3] дозволеним є лише надсвітловий рух для частинок або сигналів, а надсвітловий рух для систем відліку — заборонений. Ця обставина не дає можливості прив'язати до тахіонової частинки власну систему відліку і власний час, а отже, коректно визначити справжній напрямок її руху. В роботі [4] для тахіонових частинок аксіоматично вводяться власні системи відліку у випадку, коли простір геометричних змінних є одновимірним, а у випадку, більшої розмірності простору геометричних змінних до тахіонових частинок прив'язується лише власний час. Такий підхід дозволяє більш коректно визначити справжній напрямок руху тахіонової частинки, а отже отримати більш точні результати, зокрема показати, що гіпотеза про існування матеріальних об'єктів, що рухаються з надсвітловими швидкостями, взагалі кажучи, не приводить до можливості повернення у власне минуле. Слід зауважити, що в цій роботі надсвітлові системи відліку вводяться лише для випадку, коли простір геометричних змінних є одновимірним, в той час, як в роботах E. Recami (див. [5]), а пізніше в роботі J. Hill та B. Cox [6] були отримані узагальнені перетворення Лоренца для систем відліку, що рухаються із швидкістю, більшою за швидкість світла, для випадку тривимірного простору геометричних змінних. В роботі [7] було показано, що зазначені вище узагальнені перетворення Лоренца в сенсі E. Recami легко можна поширити на випадок довільної (зокрема нескінченної) розмірності простору геометричних змінних, а в роботі [8], базуючись на перетвореннях з [7], було побудовано математично строгі моделі кінематик, які дозволяють надсвітловий рух не лише для частинок, але і для інерційних систем відліку в гільбертовому просторі довільної розмірності. Отже, тахіонові кінематики в сенсі E. Recami є цілком математично строгими об'єктами. Але, в силу сказаного вище, ці кінематики неможливо проаналізувати на часонезворотність (тобто відсутність можливості повернення у власне минуле), використовуючи математичний апарат роботи [4]. Саме тому в даній роботі для розв'язання поставленої задачі побудовано більш загальний математичний апарат, ніж у роботі [4], завдяки якому встановлено достатні ознаки часозворотності для універсальних кінематик. Використовуючи ці ознаки, показано, що всі тахіонові кінематики, побудовані в роботі [8] є (умовно) часозворотними. З отриманих результатів не випливає відсутність часонезворотних тахіонових розширень для класичної спеціальної теорії відносності. Тому результати даної роботи не суперечать результатам роботи [4], а лише показують, що часонезворотність тої чи іншої тахіонової кінематики істотно залежить від структури перетворень координат цієї кінематики для інерційних систем відліку у надсвітловій області.

2. Елементарно-часові стани і мінливі системи чітко видимих мінливих та кінематичних множин

Дана робота використовує математичний апарат теорій мінливих множин, кінематичних множин та універсальних кінематик, розвинених в роботах [9, 10], [11], [8] та ін. В зазначених роботах можна знайти означення понять та опис позначень, що будуть використовуватись далі. Множину $\mathcal{Z}$ будемо називати об'єктом ***типу чітко видимої мінливої множини*** (скорочено — ***чі-***

тко видимим об'єктом, або ***чв-об'єктом***), якщо $\mathcal{Z}$ є чітко видимою мінливою множиною, або чітко видимою кінематичною множиною, або універсальною кінематикою.

Означення 1. *Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ — довільна система відліку*[1] *$\mathcal{Z}$ і $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ — довільний елементарно-часовий стан в системі відліку $\mathfrak{l}$. Множину:*

$$\omega^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} = \{(\mathfrak{m}, \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) \mid \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})\}$$

(де $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$ — упорядкована пара, складена з x і y) будемо називати ***елементарно-часовим станом чв-об'єкта*** *$\mathcal{Z}$, породженим ω у системі відліку $\mathfrak{l}$.*

Зауваження 1. У випадку, коли наперед відомо, про який чв-об'єкт $\mathcal{Z}$ йде мова, замість позначення $\omega^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$ будемо використовувати позначення $\omega^{\{\mathfrak{l}\}}$.

Твердження 1. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$. Тоді для елементарно-часових станів $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$, $\omega_1 \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{m})$ наступні твердження рівносильні:*

1) $\omega^{\{\mathfrak{l}\}} = \omega_1^{\{\mathfrak{m}\}}$;

2) $\omega_1 = \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega$.

Доведення. **1.** Доведемо, що з твердження 2) випливає твердження 1). Нехай $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$, $\omega_1 \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{m})$ і $\omega_1 = \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega$. Тоді, використовуючи означення 1 та [12, властивість 5(3)][2] отримуємо:

$$\begin{aligned}
\omega_1^{\{\mathfrak{m}\}} &= \{(\mathfrak{p}, \langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})\} = \\
&= \{(\mathfrak{p}, \langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})\} = \\
&= \{(\mathfrak{p}, \langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})\} = \omega^{\{\mathfrak{l}\}}.
\end{aligned}$$

[1] У випадку, коли $\mathcal{Z}$ є мінливою множиною, в роботах [9, 10] та інших роботах, присвячених теорії мінливих множин, поряд з терміном "система відліку" вживається синонімічний термін "область сприймання".

[2] Посилання на властивість 5(3) означає посилання на властивість 3 з групи властивостей "властивості 5".

2. Навпаки, нехай $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, $\omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ і $\omega^{\{\mathfrak{l}\}} = \omega_1^{\{\mathfrak{m}\}}$. Тоді, за означенням 1:

$$\begin{aligned}\{(\mathfrak{p}, \langle !\, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\} = \\ = \{(\mathfrak{p}, \langle !\, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \omega_1) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\}\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

Згідно з [12, властивість 5(1)], $\langle !\, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega = \omega$. Отже, згідно з (1), для елемента $(\mathfrak{l}, \omega) = (\mathfrak{l}, \langle !\, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega) \in \{(\mathfrak{p}, \langle !\, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\}$ мусить виконуватись умова $(\mathfrak{l}, \omega) \in \{(\mathfrak{p}, \langle !\, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \omega_1) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\}$. Тому існує система відліку $\mathfrak{p}_0 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ така, що $(\mathfrak{l}, \omega) = (\mathfrak{p}_0, \langle !\, \mathfrak{p}_0 \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \omega_1)$. Звідси отримуємо $\mathfrak{l} = \mathfrak{p}_0$, а також, $\omega = \langle !\, \mathfrak{p}_0 \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \omega_1 = \langle !\, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \omega_1$. Тому, на основі [12, властивості 5(1,3)], робимо висновок, що $\omega_1 = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \omega_1 = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \langle !\, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \omega_1 = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega$. □

З твердження 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт. Тоді для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:*

$$\omega^{\{\mathfrak{l}\}} = \left(\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega\right)^{\{\mathfrak{m}\}}. \qquad (2)$$

Твердження 2. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт. Тоді множина:*

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}] = \left\{\omega^{\{\mathfrak{l}, \mathcal{Z}\}} \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\} \qquad (3)$$

не залежить від системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ (тобто $\forall \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}] = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{m}, \mathcal{Z}]$).

Доведення. Використовуючи наслідок 1, отримуємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}] = \left\{\omega^{\{\mathfrak{l}\}} \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\} = \left\{\left(\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega\right)^{\{\mathfrak{m}\}} \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\}.$$

Отже, згідно з [12, твердження 3], маємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}] = \left\{\left(\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega\right)^{\{\mathfrak{m}\}} \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\} =$$

$$= \left\{ \omega_1^{\{\mathfrak{m}\}} \mid \omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m}) \right\} = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left[\mathfrak{m}, \mathcal{Z}\right].$$

□

Означення 2. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт.*

1. *Множину $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}\right]$ $(\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right))$ будемо називати множиною елементарно-часових станів $\mathcal{Z}$.*
2. *Будь-яку підмножину $\widehat{\mathbf{A}} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ будемо називати (загальною) мінливою системою $\mathcal{Z}$.*

Твердження 3. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$. Тоді для довільного елемента $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ існує, причому єдиний елемент $\omega_0 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ такий, що $\hat{\omega} = \omega_0^{\{\mathfrak{l}\}}$*

Доведення. Нехай $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ і $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$. За означенням 2 і твердженням 2 (формула (3)):

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}\right] = \left\{ \omega^{\{\mathfrak{l}\}} \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \right\}.$$

Отже, оскільки $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$, то існує елемент $\omega_0 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ такий, що виконується рівність:

$$\hat{\omega} = \omega_0^{\{\mathfrak{l}\}}. \tag{4}$$

Доведемо, що такий елемент ω_0 — єдиний. Припустимо, що $\hat{\omega} = \omega_1^{\{\mathfrak{l}\}}$, де $\omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Тоді з рівності (4) маємо $\omega_0^{\{\mathfrak{l}\}} = \omega_1^{\{\mathfrak{l}\}}$. Отже, за твердженням 1 і [12, властивість 5(1)], $\omega_1 = \langle !\, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega_0 = \omega_0$. □

Означення 3. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$. Елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ будемо називати **образом** елементарно-часового стану $\hat{\omega}$ **в системі відліку** $\mathfrak{l}$, якщо $\hat{\omega} = \omega^{\{\mathfrak{l}\}}$.*

Згідно з твердженням 3, довільний елементарно-часовий стан $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ в довільній системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ має, причому лише один, образ. Образ елементарно-часового стану $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$

в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ будемо позначати через $\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$ (або через $\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}$ у тих випадках, коли наперед відомо, про який чв-об'єкт $\mathcal{Z}$ йде мова).

Таким чином, згідно з означенням 3, для довільного $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ справедлива рівність:

$$\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right)^{\{\mathfrak{l}\}} = \hat{\omega}. \tag{5}$$

З іншої сторони, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і довільного елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, поклавши $\hat{\omega} := \omega^{\{\mathfrak{l}\}}$, за означенням 3, маємо $\omega = \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}$, тобто:

$$\left(\omega^{\{\mathfrak{l}\}}\right)_{\{\mathfrak{l}\}} = \omega \quad \left(\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\ \forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right). \tag{6}$$

З рівностей (5) і (6) отримуємо такий наслідок:

Наслідок 2. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт. Тоді для $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ маємо:*

1. *Відображення $(\cdot)^{\{\mathfrak{l}\}}$ є бієкцією з $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$.*
2. *Відображення $(\cdot)_{\{\mathfrak{l}\}}$ є бієкцією з $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$.*
3. *Відображення $(\cdot)_{\{\mathfrak{l}\}}$ обернене до відображення $(\cdot)^{\{\mathfrak{l}\}}$.*

Твердження 4. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільні системи відліку $\mathcal{Z}$. Тоді для довільного $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ справедлива рівність:*

$$\hat{\omega}_{\{\mathfrak{m}\}} = \langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}.$$

Доведення. Нехай $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$. Застосовуючи наслідок 1 до елементарно-часового стану $\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ і використовуючи рівність (5), отримуємо:

$$\left(\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right)^{\{\mathfrak{m}\}} = \left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right)^{\{\mathfrak{l}\}} = \hat{\omega}.$$

Звідси, використовуючи рівність (6), маємо:

$$\hat{\omega}_{\{\mathfrak{m}\}} = \left(\left(\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}} \right)^{\{\mathfrak{m}\}} \right)_{\{\mathfrak{m}\}} = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}.$$

□

Твердження 5. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільні системи відліку $\mathcal{Z}$. Тоді для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:*

$$\left(\omega^{\{\mathfrak{l}\}} \right)_{\{\mathfrak{m}\}} = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega.$$

Доведення. Нехай $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Застосовуючи наслідок 1 і використовуючи рівність (6), отримуємо:

$$\left(\omega^{\{\mathfrak{l}\}} \right)_{\{\mathfrak{m}\}} = \left(\left(\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega \right)^{\{\mathfrak{m}\}} \right)_{\{\mathfrak{m}\}} = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega.$$

□

Означення 4. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт.* **Образом мінливої системи** $\widehat{\mathbf{A}} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ *у системі відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ *будемо називати множину,* $\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} = \left\{ \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} \mid \hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}} \right\}$. *Зокрема* $\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} = \emptyset$, *якщо* $\widehat{\mathbf{A}} = \emptyset$.

Будь-яка мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *в системі відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ *породжує (загальну) мінливу систему,* $A^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} := \left\{ \omega^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} \mid \omega \in A \right\}$. *Зокрема* $A^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} = \emptyset$, *якщо* $A = \emptyset$.

Зауваження 2. У тих випадках, коли наперед відомо, про який чв-об'єкт йде мова, замість позначень $\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$ і $A^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$ будемо використовувати позначення $\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l}\}}$ і $A^{\{\mathfrak{l}\}}$відповідно.

Використовуючи рівності (5) і (6), для довільного чв-об'єкта $\mathcal{Z}$ отримуємо такі рівності:

$$\left(\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l}\}} \right)^{\{\mathfrak{l}\}} = \widehat{\mathbf{A}}. \quad \left(\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\ \forall \widehat{\mathbf{A}} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z}) \right); \tag{7}$$

$$\left(A^{\{\mathfrak{l}\}} \right)_{\{\mathfrak{l}\}} = A \quad \left(\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\ \forall A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \right). \tag{8}$$

3. Ланцюгові шляхи універсальних кінематик і означення часонезворотності

Нагадаємо, що в роботі [13, означення 4] (див. також [9, стор. 28,29], [14, стор. 1209,1210]) для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ було введено множину $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$ всіх ланцюгів на множині елементарно-часових станів $\mathcal{B}$, а також множину $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$ всіх ліній долі $\mathcal{B}$. Тому, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ довільного чв-об'єкта $\mathcal{Z}$ можна покласти:

$$\mathbb{L}l\,(\mathfrak{l}) := \mathbb{L}l\,(\mathfrak{l}^{\wedge})\,, \qquad \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l}) = \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l}^{\wedge})\,.$$

де $\mathfrak{l}^{\wedge}$ — базова мінлива множина, пов'язана із системою відліку $\mathfrak{l}$ в сенсі [9, стор. 34], [10, стор. 209]. Враховуючи [13, означення 4], означення ланцюга і лінії долі в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ можна переформулювати наступним чином:

Означення 5. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$. Непорожня підмножина $N \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ називається* ***транзитивною*** *в $\mathfrak{l}$, якщо для довільних $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in N$ з умов $\omega_3 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_2$ і $\omega_2 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_1$ випливає $\omega_3 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_1$.*

Транзитивна підмножина $L \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ називається ***ланцюгом*** *в $\mathfrak{l}$, якщо для довільних $\omega_1, \omega_2 \in L$ має місце хоч одне із співвідношень $\omega_2 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_1 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_2$. Множину всіх ланцюгів $\mathfrak{l}$ позначаємо через $\mathbb{L}l\,(\mathfrak{l})$:*

$$\mathbb{L}l\,(\mathfrak{l}) = \{\mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \mid \mathcal{L} \text{ є ланцюгом } \mathfrak{l}\}\,.$$

Ланцюг $L \in \mathbb{L}l\,(\mathfrak{l})$ називається ***лінією долі*** *$\mathfrak{l}$, якщо він є максимальним ланцюгом, тобто якщо не існує ланцюга $L_1 \in \mathbb{L}l\,(\mathfrak{l})$ такого, що $L \subset L_1$, де символ "$\subset$" означає строге включення множин. Множину всіх ліній долі $\mathfrak{l}$ позначаємо через $\mathbb{L}d\,(\mathfrak{l})$:*

$$\mathbb{L}d\,(\mathfrak{l}) = \{\mathcal{L} \in \mathbb{L}l\,(\mathfrak{l}) \mid \mathcal{L} \text{ є лінією долі } \mathfrak{l}\}\,.$$

Означення 6. *Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт. Мінливу систему $\widehat{\mathbf{A}} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ будемо називати* ***кусково-ланцюговою****, якщо існують послідовності мінливих систем $\widehat{\mathbf{A}}_1, \cdots, \widehat{\mathbf{A}}_n \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ і систем відліку $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_n \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ $(n \in \mathbb{N})$ такі, що:*

(а) $\left(\widehat{\mathbf{A}}_k\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}} \in \mathbb{L}l(\mathfrak{l}_k) \quad \left(\forall k \in \overline{1,n}\right)$; [3]

(б) $\bigcup_{k=1}^{n} \widehat{\mathbf{A}}_k = \widehat{\mathbf{A}}$;

і при цьому у випадку $n \geq 2$ виконуються такі додаткові умови:

(в) $\widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k+1} \neq \emptyset \quad \left(\forall k \in \overline{1,n-1}\right)$;

(г) *для довільного $k \in \overline{1,n-1}$ і для довільних $\omega_1 \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$ і $\omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$ виконується нерівність $\mathsf{tm}(\omega_1) <_{\mathfrak{l}_k} \mathsf{tm}(\omega_2)$;*

(д) *для довільного $k \in \overline{2,n}$ і для довільних $\omega_1 \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_{k-1} \cap \widehat{\mathbf{A}}_k\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$ і $\omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k-1}\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$ виконується нерівність $\mathsf{tm}(\omega_1) <_{\mathfrak{l}_k} \mathsf{tm}(\omega_2)$.*

При цьому упорядкований набір з $n+1$ елементів виду, $\mathscr{A} = \left(\widehat{\mathbf{A}}, \left(\widehat{\mathbf{A}}_1, \mathfrak{l}_1\right), \cdots \left(\widehat{\mathbf{A}}_n, \mathfrak{l}_n\right)\right)$ будемо називати ***ланцюговим шляхом*** *чв-об'єкта $\mathcal{Z}$.*

Зауваження 3. Підкреслимо, що коли в умовах (г) або (д) означення 6 $\widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k+1} = \emptyset$ або $\widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k-1} = \emptyset$, то, користуючись правилами формальної логіки, відповідну умову будемо вважати виконаною.

Означення 7. *Нехай $\mathfrak{C}$ — довільна кінематична множина або універсальна кінематика.*

[3] Надалі через $\overline{m,n}$ $(m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n)$ будемо позначати множину, $\overline{m,n} = \{m, \cdots, n\}$.

(а) *Мінливу систему* $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *будемо називати* ***геометрично-стаціонарною*** *в системі відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$, *якщо* $A \in \mathbb{L}l(\mathfrak{l})$ *і для довільних* $\omega_1, \omega_2 \in A$ *виконується рівність* $\mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega_1)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega_2)\right)$.

(б) *Множину всіх геометрично-стаціонарних мінливих систем у системі відліку* $\mathfrak{l}$ *будемо позначати через* $\mathbb{L}g(\mathfrak{l}, \mathfrak{C})$. *У тих випадках, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину або універсальну кінематику* $\mathfrak{C}$ *йде мова, будемо використовувати позначення* $\mathbb{L}g(\mathfrak{l})$.

(в) *Ланцюговий шлях* $\mathscr{A} = \left(\widehat{\mathbf{A}}, \left(\widehat{\mathbf{A}}_1, \mathfrak{l}_1\right), \cdots, \left(\widehat{\mathbf{A}}_n, \mathfrak{l}_n\right)\right)$ *в* $\mathfrak{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ *будемо називати* ***кусково геометрично-стаціонарним***, *якщо* $\forall k \in \overline{1,n}$ $\left(\widehat{\mathbf{A}}_k\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}} \in \mathbb{L}g\left(\mathfrak{l}_k\right)$.

З фізичної точки зору кусково геометрично-стаціонарний шлях можна трактувати як процес "мандрів" спостерігача (або якоїсь матеріальної частинки), що рухається, "перескакуючи" скінченну кількість разів з однієї системи відліку в іншу.

Означення 8. *Нехай* $\mathcal{Z}$ *— довільний чв-об'єкт і* $\mathscr{A} = \left(\widehat{\mathbf{A}}, \left(\widehat{\mathbf{A}}_1, \mathfrak{l}_1\right), \cdots, \left(\widehat{\mathbf{A}}_n, \mathfrak{l}_n\right)\right)$ *довільний ланцюговий шлях в* $\mathcal{Z}$.

1. *Елемент* $\hat{\omega}_s \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ *будемо називати* ***початковим*** *елементом шляху* $\mathscr{A}$, *якщо* $\hat{\omega}_s \in \widehat{\mathbf{A}}_1$ *і для довільного* $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_1$ *справедлива нерівність* $\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)$.

2. *Елемент* $\hat{\omega}_f \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ *будемо називати* ***кінцевим*** *елементом шляху* $\mathscr{A}$, *якщо* $\hat{\omega}_f \in \widehat{\mathbf{A}}_n$ *і для довільного* $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_n$ *справедлива нерівність* $\mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_n\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_n} \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_f\right)_{\{\mathfrak{l}_n\}}\right)$.

3. *Ланцюговий шлях, що має (хоча б один) початковий і (хоча б один) кінцевий елемент, будемо називати* ***замкнутим***.

Твердження 6. *Будь-який ланцюговий шлях $\mathscr{A}$ довільного чв-об'єкта $\mathcal{Z}$ може мати не більш, ніж один початковий і не більш, ніж один кінцевий елемент.*

Доведення. **(a)** Нехай, $\hat{\omega}_s$, $\hat{\omega}_x$ — два початкових елементи ланцюгового шляху $\mathscr{A} = \left(\widehat{\mathbf{A}}, \left(\widehat{\mathbf{A}}_1, \mathfrak{l}_1\right), \cdots, \left(\widehat{\mathbf{A}}_n, \mathfrak{l}_n\right)\right)$. Тоді, за означенням 8, $\hat{\omega}_s, \hat{\omega}_x \in \widehat{\mathbf{A}}_1$, $\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_s)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_x)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)$ і $\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_x)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_s)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)$. Отже:

$$\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_s)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right) = \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_x)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right). \tag{9}$$

Оскільки $\hat{\omega}_s, \hat{\omega}_x \in \widehat{\mathbf{A}}_1$, то $(\hat{\omega}_s)_{\{\mathfrak{l}_1\}}, (\hat{\omega}_x)_{\{\mathfrak{l}_1\}} \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}$, де, за означенням 6 (підпункт (a)), $\left(\widehat{\mathbf{A}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}} \in \mathbb{L}l(\mathfrak{l}_1)$. Тобто, згідно з [14, твердження 3.5 (пункт 1)], $\left(\widehat{\mathbf{A}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}$ є функцією з $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}_1)$ в $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}_1)$. Тому, використовуючи рівність $\omega = (\mathsf{tm}(\omega), \mathsf{bs}(\omega))$ ($\omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}_1)$) і формулу (9), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{bs}\left((\hat{\omega}_s)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right) &= \left(\widehat{\mathbf{A}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\left(\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_s)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)\right) = \\ &= \left(\widehat{\mathbf{A}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\left(\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_x)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)\right) = \mathsf{bs}\left((\hat{\omega}_x)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right).\end{aligned}$$

З останньої рівності і рівності (9) маємо:

$$\begin{aligned}(\hat{\omega}_s)_{\{\mathfrak{l}_1\}} &= \left(\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_s)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right), \mathsf{bs}\left((\hat{\omega}_s)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)\right) = \\ &= \left(\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_x)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right), \mathsf{bs}\left((\hat{\omega}_x)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)\right) = (\hat{\omega}_x)_{\{\mathfrak{l}_1\}}.\end{aligned}$$

Отже, згідно з формулою (5), маємо, $\hat{\omega}_s = \left((\hat{\omega}_s)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)^{\{\mathfrak{l}_1\}} = \left((\hat{\omega}_x)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)^{\{\mathfrak{l}_1\}} = \hat{\omega}_x$.

(б) Аналогічно доводиться, що ланцюговий шлях $\mathscr{A}$ може мати не більш, ніж один кінцевий елемент. $\square$

Початковий елемент ланцюгового шляху $\mathscr{A}$ чв-об'єкта $\mathcal{Z}$ (якщо він існує) будемо позначати через $\mathsf{po}\,(\mathscr{A},\mathcal{Z})$, або через $\mathsf{po}\,(\mathscr{A})$. Кінцевий елемент ланцюгового шляху $\mathscr{A}$ будемо позначати через $\mathsf{ki}\,(\mathscr{A},\mathcal{Z})$, або через $\mathsf{ki}\,(\mathscr{A})$. При цьому позначення $\mathsf{po}\,(\mathscr{A})$ і $\mathsf{ki}\,(\mathscr{A})$ використовуються у випадках, коли це не викликає непорозумінь. Таким чином, для довільного замкнутого ланцюгового шляху $\mathscr{A}$ завжди існує $\mathsf{po}\,(\mathscr{A})$ і $\mathsf{ki}\,(\mathscr{A})$.

Означення 9. *Замкнутий ланцюговий шлях $\mathscr{A}$ чітко видимої кінематичної множини або універсальної кінематики $\mathfrak{C}$ будемо називати **геометрично-циклічним** відносно системи відліку $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$, якщо* $\mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\mathsf{po}\,(\mathscr{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right)=\mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\mathsf{ki}\,(\mathscr{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right)$.

Зауваження 4. Нехай $\mathfrak{C}$ — кінематична множина або універсальна кінематика. За означенням координат Мінковського (див. [8, формула (2)]), для довільної системи відліку $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ і довільного елементарно-часового стану $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ мають місце такі рівності:

$$\begin{aligned}\mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right)&=\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(\mathsf{bs}\,(\omega))\,;\\ \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right)&=\mathsf{tm}\,(\omega)\,.\end{aligned}\tag{10}$$

Звідси випливає, що замкнутий ланцюговий шлях $\mathscr{A}$ чітко видимої кінематичної множини або універсальної кінематики $\mathfrak{C}$ є геометрично-циклічним відносно системи відліку $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(\mathsf{po}\,(\mathscr{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right)=\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(\mathsf{ki}\,(\mathscr{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right).$$

Означення 10. *Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати **часонезворотною**, якщо для довільної системи відліку $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ і для довільного геометрично-циклічного відносно $\mathfrak{l}$*

кусково геометрично-стаціонарного в $\mathcal{F}$ ланцюгового шляху $\mathscr{A}$ справедлива нерівність $\mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\left(\mathscr{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\left(\mathscr{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)$.

Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати ***часозворотною****, якщо вона не є часонезворотною.*

Фізичний зміст поняття часонезворотної кінематики полягає в тому, що в таких кінематиках реально відсутні "часозворотні" об'єкти або процеси, що потрапляють у власне минуле, "мандруючи" між системами відліку. Навпаки, в часозворотних кінематиках "часозворотні" об'єкти або процеси існують.

Нагадаємо, що в роботі [15, означення 6] було введено поняття еквівалентних відносно перетворень координат універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ $(\mathcal{F}_1 \,[\equiv]\, \mathcal{F}_2)$.

Означення 11. *Будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є* ***безумовно часонезворотною****, якщо часонезворотною є довільна кінематика $\mathcal{F}_1$ така, що $\mathcal{F} \,[\equiv]\, \mathcal{F}_1$. В протилежному випадку будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є* ***умовно часозворотною****.*

Оскільки, згідно з [15, твердження 3], для довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ справедливе співвідношення $\mathcal{F} \,[\equiv]\, \mathcal{F}$, то отримуємо наступний наслідок з означення 11:

Наслідок 3. *Будь-яка безумовно часонезворотна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є часонезворотною.*

Можна довести, що твердження, обернене до наслідку 3 — не правильне, тобто існують часонезворотні універсальні кінематики, які не є безумовно часонезворотними (тобто є умовно часозворотними).

Фізичний зміст поняття безумовно часонезворотної кінематики полягає в тому, що в таких кінематиках, в принципі, неможливі "часові парадокси", що полягають в існуванні потенційної можливості вплинути на власне минуле. Навпаки, в умовно часозворотних кінематиках існує потенційна можливість "прийти" на початок власного шляху у минулому часі, а отже і змінити власне минуле, хоча, в часонезворотних, але умовно часозворотних кінематиках така можливість реально не реалізована у тому сценарії еволюції, що діє у відповідній кінематиці.

4. Про напрямок часу між системами відліку універсальних кінематик

У цьому розділі будуть введені певні допоміжні поняття, необхідні для того, щоб сформулювати достатню ознаку умовної часозворотності для універсальних кінематик.

Означення 12. *Нехай $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика.*

1. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **часоневід'ємною** в $\mathcal{F}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (позначення $\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з умов $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає нерівність: $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_2)$.*

2. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **часододатною** в $\mathcal{F}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (позначення $\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з умов $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає нерівність $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_2)$.*

3. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **часонедодатною** в $\mathcal{F}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (позначення $\mathfrak{m} \Downarrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з умов $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає нерівність: $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1) \geq_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_2)$.*

4. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **часовід'ємною** в $\mathcal{F}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (позначення $\mathfrak{m} \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з*

умов $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ *і* $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ *випливає нерівність* $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) >_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.

Твердження 7. *Нехай* $\mathcal{F}$ *— універсальна кінематика.*

1) Якщо $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *і* $\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$, *то* $\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$.

2) Якщо $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *і* $\mathfrak{m} \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$, *то* $\mathfrak{m} \Downarrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$.

(Іншими словами, з часододатності випливає часоневід'ємність, а з часовід'ємності — часонедодатність).

Доведення.

1) Справді, нехай $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і $\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$. Тоді для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ таких, що $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, маємо:

(а) У випадку $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, за означенням 12, пункт 2, $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.

(б) У випадку $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, з умови $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ маємо $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$, а отже $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.

2) Другий пункт твердження доводиться аналогічно. □

5. Достатня ознака умовної часозворотності

Корисною для встановлення умовної часозворотності тахіонових кінематик, пов'язаних з узагальненими перетвореннями Лоренца в сенсі E. Recami, є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай в універсальній кінематиці* $\mathcal{F}$ *існують системи відліку* $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *і елементи* $\mathrm{w}_0 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_0) \cap \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1)$, $\mathrm{w}_1 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1) \cap \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_2)$, $\mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_2)$, $\mathrm{w}'_0 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_0)$, *що задовольняють такі умови:*

1. $\mathfrak{l}_0 \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_1$ *і* $\mathfrak{l}_0 \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_2$.
2. $[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0]\,\mathrm{w}_0 = \mathrm{w}_0$; $[\mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_1$; $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_2 = \mathrm{w}'_0$.
3. $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_0) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}'_0)$.

4. $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_0) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$*, і при цьому має місце хоч одна із (строгих) нерівностей* $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_0) <_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1)$ *або* $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$.

Тоді універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є умовно часозворотною.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Покладемо:

$$\mathbf{r}_1 := \{[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w} \mid \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1),\, \mathsf{bs}(\mathrm{w}) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0),\; \mathsf{tm}(\mathrm{w}_0) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1)\}; \tag{11}$$

$$\mathbf{r}_2 := \{[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w} \mid \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_2),\, \mathsf{bs}(\mathrm{w}) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1),\; \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}(\mathrm{w}) \leq_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)\}; \tag{12}$$

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2. \tag{13}$$

Для доведення теореми нижче буде встановлено деякі властивості множин $\mathbf{r}$,$\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$

r1^0) $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r} \subseteq \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_0)$.

Справді, дана властивість випливає з формул (11), (12), (13) та означень універсальних кінематик і універсальних перетворень координат (див. [8]).

r2^0) $\mathbf{r}_1$ *і* $\mathbf{r}_2$ *є абстрактними траєкторіями з* $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_0)$ *в* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}_0)$ (в сенсі [9, definition 6.1] або [14, означення 1.4]).

Справді, нехай $\mathrm{w}_1', \mathrm{w}_2' \in \mathbf{r}_1$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1') = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2')$. Доведемо, що $\mathrm{w}_1' = \mathrm{w}_2'$. Припустимо супротивне, $\mathrm{w}_1' \neq \mathrm{w}_2'$. За означенням $\mathbf{r}_1$ (див. (11)), існують $\mathrm{w}_1^\sim, \mathrm{w}_2^\sim \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1)$ такі, що $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1^\sim) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2^\sim) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0)$ і $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_i^\sim = \mathrm{w}_i'$ $(i \in \overline{1,2})$. Оскільки, за припущенням, $\mathrm{w}_1' \neq \mathrm{w}_2'$ і, згідно з [8, формули (6),(7)], відображення $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]$ є бієкцією з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1)$ на $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}_0)$, то $\mathrm{w}_1^\sim \neq \mathrm{w}_2^\sim$. І оскільки $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1^\sim) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2^\sim)$, то отримуємо $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1^\sim) \neq \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2^\sim)$. Отже, можливі лише два випадки: $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1^\sim) <_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2^\sim)$ або $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_2^\sim) <_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1^\sim)$. Але, оскільки $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{l}_1$ і $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1^\sim) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2^\sim)$, то, за означенням 12 (пункт 4), в обох випадках отримуємо співвідношення

$\mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1^{\sim}\right) \neq \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_2^{\sim}\right)$, тобто $\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1'\right) \neq \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2'\right)$, що суперечить умові $\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1'\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2'\right)$, сформульованій на початку доведення даної властивості. Отже, припущення про те, що $\mathrm{w}_1' \neq \mathrm{w}_2'$ — помилкове, тому для довільних $\mathrm{w}_1', \mathrm{w}_2' \in \mathbf{r}_1$ з умови $\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1'\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2'\right)$ випливає рівність $\mathrm{w}_1' = \mathrm{w}_2'$. Таким чином, враховуючи властивість $\mathrm{r}1^0$), отримуємо, що $\mathbf{r}_1$ є функцією з множини $\mathfrak{D}\left(\mathbf{r}_1\right) = \left\{\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}'\right) \mid \mathrm{w}' \in \mathbf{r}_1\right\} \subseteq \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ в множину $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}_0\right)$, тобто абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ в $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}_0\right)$. Аналогічно доводиться, що $\mathbf{r}_2$ є траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ в $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}_0\right)$.

r3^0) $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1 \in \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2$.

З рівності (11) та умов 3 і 4 даної теореми випливає, що $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1 \in \mathbf{r}_1$. Використовуючи рівність (12), маємо $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\, \mathrm{w}_1 \in \mathbf{r}_2$. Згідно з [8, формула (7)], $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\, \mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\, \mathrm{w}_1$. Звідси, використовуючи умову даної теореми (пункт 2) і [8, формули (6) та (7)], отримуємо: $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\, \mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\, [\mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1$. Таким чином,

$$[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\, \mathrm{w}_1 \in \mathbf{r}_2, \tag{14}$$

що й необхідно було довести.

r4^0) *Для довільного елемента* $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_1$ *справедлива нерівність* $\mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_1\right) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1\right)$. *При цьому, якщо* $\mathrm{u}_1 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1$, *то виконується строга нерівність* $\mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_1\right) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1\right)$.

Нехай $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_1$. Тоді, згідно з (11), існує елемент $\mathrm{u}_1^{\sim} \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_1\right)$ такий, що $\mathsf{bs}\left(\mathrm{u}_1^{\sim}\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_0\right)$,

$$\mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_1^{\sim}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right) \tag{15}$$

і $\mathrm{u}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{u}_1^{\sim}$. І, оскільки за умовою теореми (пункти 3 і 1)

$$\mathsf{bs}\left(\mathrm{u}_1^{\sim}\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_0\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1\right) \tag{16}$$

і $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{l}_1$, то, згідно з твердженням 7 і означенням 12 (пункт 3), з нерівності (15) отримуємо нерівність:

$$\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1) = \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{u}_1^{\sim}) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1)\,. \tag{17}$$

Якщо ж додатково $\mathrm{u}_1 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$, то нерівність (15) перетворюється в строгу[4], і замість нерівності (17), використовуючи означення 12 (пункт 4), отримаємо строгу нерівність $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1)$, що й необхідно було довести.

r5^0) *Для довільного елемента* $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2$ *справедлива нерівність* $\mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_2)$. *При цьому, якщо* $\mathrm{u}_2 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$, *то виконується строга нерівність* $\mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_2)$.

Нехай $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2$. Тоді, згідно з (12), існує елемент $\mathrm{u}_2^{\sim} \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_2)$ такий, що $\mathsf{bs}\,(\mathrm{u}_2^{\sim}) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1)$,

$$\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_2^{\sim}) \tag{18}$$

і $\mathrm{u}_2 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{u}_2^{\sim}$. І оскільки, за умовою теореми (пункт 1), $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{l}_2$, то, згідно з твердженням 7 і означенням 12 (пункт 3), з нерівності (18) отримуємо нерівність $\mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_1) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{u}_2^{\sim}) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_2)$. Звідси, враховуючи (14), отримуємо нерівність:

$$\mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_2)\,. \tag{19}$$

Якщо ж додатково $\mathrm{u}_2 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$, то нерівність (18) перетворюється в строгу і, використовуючи означення 12 (пункт 4), замість нерівності (19) отримаємо строгу нерівність $\mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_2)$, що й необхідно було довести.

r6^0) $\mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2 = \{[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\}$.

[4] Справді, якщо припустити рівність $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1^{\sim}) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1)$, то з рівності (16) отримаємо рівність $\mathrm{u}_1^{\sim} = \mathrm{w}_1$, а отже і рівність $\mathrm{u}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{u}_1^{\sim} = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$.

Справді, згідно з властивістю r3^0), $\{[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1\} \subseteq \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2$. Нехай $\mathrm{u} \in \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2$. Тоді, на основі властивостей r4^0) і r5^0), отримуємо нерівності $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1)$ і $\mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{u})$. Отже, $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}) = \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1)$. Звідси, на основі властивості r2^0) робимо висновок, що $\mathrm{u} = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1$.

r7^0) $\mathbf{r}$ *є абстрактною траєкторією з* $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l}_0)$ *в* $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}_0)$.

Нехай $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \in \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2$ і $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_2)$. У випадку, коли $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_1$ або $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2$, згідно з властивістю r$2^0$) отримуємо $\mathrm{u}_1 = \mathrm{u}_2$. Отже, залишилось розглянути випадки $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_1 \setminus \mathbf{r}_2$, $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2 \setminus \mathbf{r}_1$ і $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_1 \setminus \mathbf{r}_2$, $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_2 \setminus \mathbf{r}_1$. У випадку $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_1 \setminus \mathbf{r}_2$, $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2 \setminus \mathbf{r}_1$ маємо $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \notin \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2$, а отже, за властивістю r6^0), $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1$. Тому, згідно з властивостями r4^0) і r5^0), маємо нерівності $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1)$ і $\mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_1) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_2)$. Отже, $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_2)$, що суперечить умові $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_2)$. Таким чином, випадок $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_1 \setminus \mathbf{r}_2$, $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2 \setminus \mathbf{r}_1$ — неможливий. Аналогічно неможливим є випадок $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_1 \setminus \mathbf{r}_2$, $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_2 \setminus \mathbf{r}_1$. Отже, у всіх можливих випадках із співвідношень $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}$ і $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_2)$ випливає рівність $\mathrm{u}_1 = \mathrm{u}_2$. Це, враховуючи властивість r1^0), означає, що $\mathbf{r}$ є функцією з $\mathfrak{D}\,(\mathbf{r}) = \{\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}') \mid \mathrm{w}' \in \mathbf{r}\} \subseteq \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}_0)$ в множину $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}_0)$, тобто абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l}_0)$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}_0)$.

r8^0) $\mathrm{w}_0 \in \mathbf{r}_1$; $\mathrm{w}_0' \in \mathbf{r}_2$.

Використовуючи умову 2 теореми та [8, формули (6), (7)], отримуємо, $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, \mathrm{w}_0 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\, [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0]\, \mathrm{w}_0 = \mathrm{w}_0$, де, згідно з умовою 4 даної теореми, $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1)$. Отже, згідно з (11), $\mathrm{w}_0 \in \mathbf{r}_1$. Далі, згідно з умовами 2, 3, 4 даної теореми, маємо $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\, \mathrm{w}_2 = \mathrm{w}_0'$, де $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1)$ і $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2)$. Отже, згідно з (12), $\mathrm{w}_0' \in \mathbf{r}_2$.

Таким чином, властивості r1^0)–r8^0) доведено.

Оскільки, згідно з властивістю r7^0), $\mathbf{r}$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l}_0)$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}_0)$, то, згідно з [16, лема 2], існує еволюційно видима універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ така, що $\mathcal{F}_1$ диз'юнктна з $\mathcal{F}$ і траєкторія $\mathbf{r}$ є траєкторією елементарного процесу (тобто лінії долі) в системі відліку $\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l}_0)}(\mathcal{F}_1)$. Отже, $\exists L \in \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1})\left(\mathbf{r} = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}}[L, \mathcal{F}_1]\right)$. За означенням лінії долі (див. означення 5), L є мінливою системою в системі відліку $\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}$, тобто $L \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1})$. За означенням траєкторії мінливої системи (див. [16, формула (2)]), маємо:

$$\mathbf{r} = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}}[L, \mathcal{F}_1] = \left\{\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}(\omega; \mathcal{F}_1) \mid \omega \in L\right\}. \tag{20}$$

Надалі для систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ будемо використовувати скорочені позначення:

$$\left.\begin{array}{rl}
\omega^{\left\{\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} & := \omega^{\left\{\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\right\}} \ (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \rfloor_{\mathcal{F}_1}))\,; \\
(\hat{\omega})_{\left\{\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} & := (\hat{\omega})_{\left\{\mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\right\}} \ (\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{F}_1))\,; \\
\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \rfloor\, \mathcal{F}_1 \rangle & := \langle \mathfrak{m} \rfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \rfloor_{\mathcal{F}_1},\, \mathcal{F}_1 \rangle\,; \\
\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \rfloor\, \mathcal{F}_1 \rangle & := \langle !\, \mathfrak{m} \rfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \rfloor_{\mathcal{F}_1},\, \mathcal{F}_1 \rangle\,; \\
\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}(\omega) & := \mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}\rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}(\omega; \mathcal{F}_1) \ (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \rfloor_{\mathcal{F}_1}))\,; \\
[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \rfloor\, \mathcal{F}_1] & := [\mathfrak{m} \rfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \rfloor_{\mathcal{F}_1},\, \mathcal{F}_1]\,.
\end{array}\right\} \tag{21}$$

З урахуванням скорочених позначень (21) формула (20) набуває вигляду:

$$\mathbf{r} = \left\{\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}(\omega) \mid \omega \in L\right\}. \tag{22}$$

Покладемо:

$$\widehat{\mathbf{L}} := L^{\left\{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}, \tag{23}$$

де $A^{\left\{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} = A^{\left\{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\right\}} = \left\{\omega^{\left\{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \mid \omega \in A\right\}$ $(A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}))$.

Розглянемо відображення $\boldsymbol{f} : \widehat{\mathbf{L}} \mapsto \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1})$, що діє за формулою:

$$\boldsymbol{f}(\hat{\omega}) := \mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\hat{\omega}_{\left\{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right), \quad \omega \in \widehat{\mathbf{L}}. \tag{24}$$

Встановимо деякі властивості відображення $\boldsymbol{f}$.

$\boldsymbol{f}\mathbf{1}^0$) $\boldsymbol{f}$ *є бієкцією з* $\widehat{\mathbf{L}}$ *на* $\mathbf{r}$.

Відображення $\boldsymbol{f}$ можна розкласти на композицію двох відображень:

$$\boldsymbol{f}(\hat{\omega}) = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{f}_1(\hat{\omega})), \quad \omega \in \widehat{\mathbf{L}}, \quad \text{де}$$
$$\boldsymbol{f}_1(\hat{\omega}) = \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}, \quad \omega \in \widehat{\mathbf{L}};$$
$$\boldsymbol{f}_2(\omega) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega), \quad \omega \in L.$$

З формули (23), наслідка 2 (пункт 2) та формули (8) випливає, що $\boldsymbol{f}_1$ є бієкцією з $\widehat{\mathbf{L}}$ на $\widehat{\mathbf{L}}_{\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} = \left(L^{\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right)_{\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} = L$ (тобто з $\widehat{\mathbf{L}}$ на L). Отже, для доведення твердження $\boldsymbol{f}1^0$) досить показати, що $\boldsymbol{f}_2$ бієктивно відображає L на $\mathbf{r}$. З формули (22) випливає, що $\mathfrak{R}(\boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{f}_2(L) = \mathbf{r}$, де $\mathfrak{R}(\boldsymbol{f}_2)$ — область значень відображення $\boldsymbol{f}_2$. Отже, залишається довести, що відображення $\boldsymbol{f}_2$ — взаємнооднозначне.

Нехай $\omega_1, \omega_2 \in L$ і $\omega_1 \neq \omega_2$. Оскільки $L \in \mathbb{L}d(\mathbb{L}d(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}))$, то, за означенням 5, $L \in \mathbb{L}l(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1})$. Отже, за означенням 5, мусить виконуватись хоча б одна з умов $\omega_2 \underset{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}}{\longleftarrow} \omega_1$ або $\omega_1 \underset{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}}{\longleftarrow} \omega_2$. Звідси, оскільки $\omega_1 \neq \omega_2$, згідно з [8, властивість 2(1)], маємо, $\mathsf{tm}(\omega_1) <_{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}(\omega_2)$ або $\mathsf{tm}(\omega_2) <_{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}(\omega_1)$, тобто $\mathsf{tm}(\omega_1) \neq \mathsf{tm}(\omega_2)$. Звідси, згідно з (10), маємо, $\mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega_1)\right) \neq \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega_2)\right)$. Отже, $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega_1) \neq \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega_2)$, тобто $\boldsymbol{f}_2(\omega_1) \neq \boldsymbol{f}_2(\omega_2)$, що й треба було довести.

Для того, щоб сформулювати наступну властивість, введемо додаткові позначення. Покладемо:

$$\widehat{\mathbf{L}}_1 := \left\{\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{L}} \mid \boldsymbol{f}(\hat{\omega}) \in \mathbf{r}_1\right\}; \tag{25}$$
$$\widehat{\mathbf{L}}_2 := \left\{\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{L}} \mid \boldsymbol{f}(\hat{\omega}) \in \mathbf{r}_2\right\}.$$

Тоді, згідно з (13), маємо:

$$\widehat{\mathbf{L}} = \widehat{\mathbf{L}}_1 \cup \widehat{\mathbf{L}}_2, \tag{26}$$

а, згідно з властивостями r6^0) і $\boldsymbol{f}1^0$), отримуємо:

$$\widehat{\mathbf{L}}_1 \cap \widehat{\mathbf{L}}_2 = \left\{ \boldsymbol{f}^{[-1]} \left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}] \, \mathrm{w}_1 \right) \right\}, \tag{27}$$

де $\boldsymbol{f}^{[-1]}$ — відображення, обернене до $\boldsymbol{f}$. Оскільки кінематика $\mathcal{F}_1$ — диз'юнктна з $\mathcal{F}$, то, згідно з [15, означення 12], маємо:

$$\mathcal{F}_1 \, [\equiv] \, \mathcal{F}. \tag{28}$$

$\boldsymbol{f}2^0$) *Для довільних $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_1$ наступні твердження рівносильні:*

- **($\mathbf{i}_1$)** $(\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1\}} \underset{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1}{\longleftarrow} (\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1\}}$;
- **($\mathbf{i}_2$)** $\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1\}} \right) \leq_{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1} \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1\}} \right)$;
- **($\mathbf{i}_3$)** $\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2 \right) \right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1 \right) \right)$.

Підкреслимо, що нерівність (i_3) *слід розуміти в системі відліку* $\mathfrak{l}_0$ *кінематики* $\mathcal{F}$.

$\boxed{(\mathrm{i}_1) \Rightarrow (\mathrm{i}_2)}$ Імплікація $(\mathrm{i}_1) \Rightarrow (\mathrm{i}_2)$ випливає з [8, властивість 2(1)].
$\boxed{(\mathrm{i}_2) \Rightarrow (\mathrm{i}_3)}$ Нехай $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_1$ і

$$\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1\}} \right) \leq_{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1} \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1\}} \right). \tag{29}$$

Використовуючи твердження 4 та [8, формула (5)], для $i \in \overline{1,2}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1 \rangle} \left((\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1\}} \right) &= \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1 \rangle} \left(\langle ! \, \mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \downharpoonleft \mathcal{F}_1 \rangle \, (\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_0 \mid \mathcal{F}_1\}} \right) = \\ &= [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \downharpoonleft \mathcal{F}_1] \, \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \mid \mathcal{F}_1 \rangle} \left((\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_0 \mid \mathcal{F}_1\}} \right) = \\ &= [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \downharpoonleft \mathcal{F}_1] \, \boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_i \right). \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи співвідношення (28) та [15, означення 6 (пункт 3)], маємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1 \rangle} \left((\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1\}} \right) = [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}] \, \boldsymbol{f}(\hat{\omega}_i), \quad i \in \overline{1,2}.$$

З останньої рівності, враховуючи формулу (10), отримуємо:

$$\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1\}} \right) = \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}] \, \boldsymbol{f}(\hat{\omega}_i) \right), \quad i \in \overline{1,2}. \tag{30}$$

Згідно з формулою (25), $\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_i) \in \mathbf{r}_1$ ($i \in \overline{1,2}$). Отже, за формулою (11), $\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_i)$ можна подати у вигляді:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f}(\hat{\omega}_i) = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}] \, \mathrm{v}_i, \quad \text{де} \\ \mathsf{bs}(\mathrm{v}_i) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0), \quad i \in \overline{1,2}. \end{gathered} \tag{31}$$

Отже, згідно з [8, формули (6) і (7)], для $i \in \overline{1,2}$ маємо:

$$[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}] \, \boldsymbol{f}(\hat{\omega}_i) = [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}] \, [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}] \, \mathrm{v}_i = \mathrm{v}_i. \tag{32}$$

З формул (30) і (32) випливає, що $\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1\}} \right) = \mathsf{tm}(\mathrm{v}_i)$. Отже, враховуючи (29), маємо $\mathsf{tm}(\mathrm{v}_1) \leq_{\mathfrak{l}_1 \mid \mathcal{F}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{v}_2)$. Звідси, враховуючи співвідношення (28) та [15, означення 6 (пункт 2, формула (10))], отримуємо, $\mathsf{tm}(\mathrm{v}_1) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{v}_2)$, де, згідно з (31), $\mathsf{bs}(\mathrm{v}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{v}_2) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0)$. Тому, оскільки за умовою теореми $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{l}_1$, використовуючи твердження 7 і означення 12 (пункт 3), маємо $\mathsf{tm}([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}] \, \mathrm{v}_1) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}] \, \mathrm{v}_2)$. Звідси, використовуючи рівність (31), маємо $\mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1)) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2))$, що й необхідно було довести.

$\boxed{(\mathrm{i}_3) \Rightarrow (\mathrm{i}_1)}$ Нехай $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_1$ і

$$\mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2)) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1)). \tag{33}$$

Розглянемо спочатку випадок $\mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1)) = \mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2))$. Оскільки, згідно з властивістю r7^0), $\mathbf{r}$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_0)$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}_0)$ (тобто функцією з $\mathfrak{D}(\mathbf{r}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}_0)$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}_0)$), і, згідно з властивістю $\boldsymbol{f}1^0$), $\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1), \boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2) \in \mathbf{r}$, то з умови $\mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1)) = \mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2))$ випливає рівність $\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1) = \boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2)$. Отже, за властивістю $\boldsymbol{f}1^0$), маємо, $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2$. Тому, $(\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}} = (\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$. Звідси, враховуючи [8, властивість 1(1)], отримуємо бажане співвідношення $(\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \underset{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}}{\longleftarrow} (\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$.

Отже, надалі будемо вважати, що $\mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1)) \neq \mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2))$. Тоді, згідно з (33), маємо строгу нерівність:

$$\mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2)) <_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1)). \tag{34}$$

Звідси, використовуючи доведену вище імплікацію (i$_2$) $\Rightarrow$ (i$_3$), отримуємо нерівність:

$$\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right) <_{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right). \tag{35}$$

(Справді, в протилежному випадку, коли $\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right) \geq_{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right)$, користуючись імплікацією (i$_2$) $\Rightarrow$ (i$_3$), ми б отримали нерівність $\mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1)) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2))$, яка суперечить нерівності (34)).

Оскільки, за умовою $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_1$, то, згідно з (26), $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}$. Отже, враховуючи (23) та (8), маємо:

$$(\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}, (\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \in \widehat{\mathbf{L}}_{\{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}} = L.$$

Оскільки $L \in \mathbb{L}d(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1})$, то, за означенням 5, $L \in \mathbb{L}l(\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1})$. Тому елементарно-часові стани $(\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}, (\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \in L$ мусять бути об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}$ (тобто виконується хоча б одна з умов $(\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \underset{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}}{\longleftarrow} (\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$ або $(\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \underset{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}}{\longleftarrow} (\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$). Оскільки кінематика $\mathcal{F}_1$ — еволюційно видима і, згідно з (35), $\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right) \neq \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right)$, то, згідно з твердженням 4 та [15, твердження 23], елементарно-часові стани $(\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}} = \langle !\, \mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \rfloor\, \mathcal{F}_1 \rangle (\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_0\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$ і $(\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}\}} =$

$\langle ! \, \mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \downharpoonright \mathcal{F}_1 \rangle \, (\hat{\omega}_2)_{\left\{\mathfrak{l}_0 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}}$ мусять бути об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{l}_1 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}$. Тому повинне виконуватись хоча б одне із співвідношень:

$$(\hat{\omega}_2)_{\left\{\mathfrak{l}_1 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}} \xleftarrow[\mathfrak{l}_1 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}]{} (\hat{\omega}_1)_{\left\{\mathfrak{l}_1 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}} \quad \text{або} \tag{36}$$

$$(\hat{\omega}_1)_{\left\{\mathfrak{l}_1 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}} \xleftarrow[\mathfrak{l}_1 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}]{} (\hat{\omega}_2)_{\left\{\mathfrak{l}_1 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}} . \tag{37}$$

Але, співвідношення (37) — неможливе, оскільки в цьому випадку, за доведеною вище імплікацією $(\mathrm{i}_1) \Rightarrow (\mathrm{i}_3)$, ми б отримали нерівність $\mathsf{tm}\,(\boldsymbol{f}\,(\hat{\omega}_1)) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\boldsymbol{f}\,(\hat{\omega}_2))$, яка суперечить нерівності (34). Отже, єдино можливим є співвідношення (36), що й треба було довести.

Аналогічно доводиться наступна властивість:

$\boldsymbol{f}$3^0) *Для довільних $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_2$ наступні твердження рівносильні:*

- **(j$_1$)** $(\hat{\omega}_2)_{\left\{\mathfrak{l}_2 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}} \xleftarrow[\mathfrak{l}_2 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}]{} (\hat{\omega}_1)_{\left\{\mathfrak{l}_2 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}}$;
- **(j$_2$)** $\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_1)_{\left\{\mathfrak{l}_2 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_2 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_2)_{\left\{\mathfrak{l}_2 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right)$;
- **(j$_3$)** $\mathsf{tm}\,(\boldsymbol{f}\,(\hat{\omega}_2)) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\boldsymbol{f}\,(\hat{\omega}_1))$.

Покладемо:

$$\mathscr{L} = \left(\widehat{\mathbf{L}}, \left(\widehat{\mathbf{L}}_1, \mathfrak{l}_1 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right), \left(\widehat{\mathbf{L}}_2, \mathfrak{l}_2 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right)\right). \tag{38}$$

Встановимо деякі властивості упорядкованого набору $\mathscr{L}$ та його компонентів.

$\mathscr{L}$1^0) $\left(\widehat{\mathbf{L}}_i\right)_{\left\{\mathfrak{l}_i \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}} \in \mathbb{L}l\,(\mathfrak{l}_i \downharpoonright_{\mathcal{F}_1})$ *($i \in \overline{1,2}$).*

Розглянемо спочатку випадок $i = 1$. Для $\omega \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}}$ покладемо:

$$\boldsymbol{g}(\omega) := \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\omega^{\left\{\mathfrak{l}_1 \downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right)\right).$$

З властивості $\boldsymbol{f}2^0$) (рівносильність (i$_1$) $\Leftrightarrow$ (i$_3$)) та формули (6) випливає, що для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$ має місце рівносильність:

$$\omega_2 \xleftarrow[\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}]{} \omega_1 \ \Leftrightarrow \boldsymbol{g}\left(\omega_2\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \boldsymbol{g}\left(\omega_1\right). \tag{39}$$

Згідно з [8, властивість 1(2)], відношення $\leq_{\mathfrak{l}_0}$ є транзитивним на $\mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ і для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ має місце хоч одна з умов $t_1 \leq_{\mathfrak{l}_0} t_2$ або $t_2 \leq_{\mathfrak{l}_0} t_1$. Звідси, використовуючи рівносильність (39), отримуємо, що $\left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$ є ланцюгом в системі відліку $\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}$. Аналогічно, з використанням властивості $\boldsymbol{f}3^0$) доводиться, що $\left(\widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_2 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$ є ланцюгом в системі відліку $\mathfrak{l}_2 \rfloor_{\mathcal{F}_1}$.

$\mathscr{L}\mathbf{2}^0$) *Якщо* $\omega_1 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1 \setminus \widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$ *і* $\omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1 \cap \widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$, *то* $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) <_{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$.

Нехай $\omega_1 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1 \setminus \widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$, $\omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1 \cap \widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$. Тоді, за означенням 4, існують $\hat{\omega}_1 \in \widehat{\mathbf{L}}_1 \setminus \widehat{\mathbf{L}}_2$ і $\hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_1 \cap \widehat{\mathbf{L}}_2$ такі, що:

$$\omega_i = \left(\hat{\omega}_i\right)_{\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \qquad \left(i \in \overline{1,2}\right). \tag{40}$$

Із співвідношення (27) випливає, що $\hat{\omega}_2 = \boldsymbol{f}^{[-1]}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}\right] \mathrm{w}_1\right)$, крім того, оскільки $\hat{\omega}_1 \in \widehat{\mathbf{L}}_1 \setminus \widehat{\mathbf{L}}_2$, то $\hat{\omega}_1 \in \widehat{\mathbf{L}}_1$ і $\hat{\omega}_1 \neq \boldsymbol{f}^{[-1]}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}\right] \mathrm{w}_1\right)$. Отже, використовуючи властивість $\boldsymbol{f}1^0$) і формулу (25), маємо $\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right), \boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right) \in \mathbf{r}_1$, $\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right) = \left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}\right] \mathrm{w}_1$, $\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right) \neq \left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}\right] \mathrm{w}_1$. Тому, згідно з властивістю r4^0):

$$\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right) = \mathsf{tm}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}\right] \mathrm{w}_1\right) <_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right). \tag{41}$$

Звідси, враховуючи властивість $\boldsymbol{f}2^0$) (рівносильність (i$_2$) $\Leftrightarrow$ (i$_3$)), отримуємо:

$$\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right) <_{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right), \tag{42}$$

оскільки в протилежному випадку, згідно з рівносильністю $(\mathrm{i}_2) \Leftrightarrow (\mathrm{i}_3)$, ми б отримали нерівність $\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right)$, яка суперечить нерівності (41).

Враховуючи (40), нерівність (42) набуває бажаного вигляду $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) <_{\mathfrak{l}_1\rfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$.

Аналогічно з використанням властивостей $\mathrm{r}5^0$) і $\boldsymbol{f}3^0$) замість $\mathrm{r}4^0$) і $\boldsymbol{f}2^0$) доводиться наступна властивість:

$\mathscr{L}\mathbf{3}^0$**)** *Для довільних* $\omega_1 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1 \cap \widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_2\rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}$ *і* $\omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_2 \setminus \widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_2\rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}$ *виконується нерівність* $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) <_{\mathfrak{l}_2\rfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$.

З властивості $\mathscr{L}1^0$), формул (26), (27), а також властивостей $\mathscr{L}2^0$) та $\mathscr{L}3^0$) випливає, що всі пункти означення 6 для упорядкованого набору $\mathscr{L}$, що задається формулою (38), виконані. Отже, ми довели, що:

$\mathscr{L}\mathbf{4}^0$**)** $\mathscr{L}$ *є ланцюговим шляхом кінематики* $\mathcal{F}_1$.

Доведемо наступну властивість:

$\mathscr{L}\mathbf{5}^0$**)** *Ланцюговий шлях* $\mathscr{L}$ *є замкнутим, причому:*

$$\begin{aligned} \mathsf{po}\left(\mathscr{L}, \mathcal{F}_1\right) &= \boldsymbol{f}^{[-1]}\left(\mathrm{w}_0\right); \\ \mathsf{ki}\left(\mathscr{L}, \mathcal{F}_1\right) &= \boldsymbol{f}^{[-1]}\left(\mathrm{w}_0'\right). \end{aligned}$$

Згідно з властивістю $\mathrm{r}8^0$), $\mathrm{w}_0 \in \mathbf{r}_1$. Тому, згідно з властивістю $\boldsymbol{f}\mathbf{1}^0$) та формулою (25), $\boldsymbol{f}^{[-1]}\left(\mathrm{w}_0\right) \in \widehat{\mathbf{L}}_1$. Нехай $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{L}}_1$. Тоді, згідно з (25), $\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}\right) \in \mathbf{r}_1$. Отже, згідно з (11), існує елемент $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_1\right)$ такий, що

$$\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_0\right); \quad \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_0\right) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}\right); \tag{43}$$

$$\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}\right) = \left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}\right]\mathrm{w}. \tag{44}$$

Оскільки (за умовою) $\mathfrak{l}_0 \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_1$, то із співвідношення (43), враховуючи твердження 7 і означення 12 (пункт 3), отримуємо, $\mathsf{tm}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}\right] \mathrm{w}_0\right) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}\right] \mathrm{w}\right)$. Звідси, враховуючи умову 2 теореми і співвідношення (44), маємо, $\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_0\right) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}\right)\right)$. Таким чином, враховуючи властивість $\boldsymbol{f}2^0$) (рівносильність (i_2) $\Leftrightarrow$ (i_3)), отримуємо, що для довільного $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{L}}_1$ справедлива нерівність:

$$\mathsf{tm}\left(\left(\boldsymbol{f}^{[-1]}\left(\mathrm{w}_0\right)\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\left\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right).$$

Тому, за означенням 8 (пункт 1), $\boldsymbol{f}^{[-1]}\left(\mathrm{w}_0\right)$ є початковим елементом шляху $\mathscr{L}$, тобто $\mathsf{po}\left(\mathscr{L}, \mathcal{F}_1\right) = \boldsymbol{f}^{[-1]}\left(\mathrm{w}_0\right)$. Аналогічно доводиться, що шлях $\mathscr{L}$ має кінцевий елемент $\mathsf{ki}\left(\mathscr{L}, \mathcal{F}_1\right) = \boldsymbol{f}^{[-1]}\left(\mathrm{w}_0'\right)$.

$\mathscr{L}6^0$) *Шлях $\mathscr{L}$ є геометрично циклічним відносно системи відліку $\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}$ в кінематиці $\mathcal{F}_1$.*

Справді, використовуючи (24) та властивість $\mathscr{L}5^0$), отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\mathsf{po}\left(\mathscr{L}, \mathcal{F}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) = \boldsymbol{f}\left(\mathsf{po}\left(\mathscr{L}, \mathcal{F}_1\right)\right) = \mathrm{w}_0;$$
$$\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\mathsf{ki}\left(\mathscr{L}, \mathcal{F}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) = \mathrm{w}_0'.$$

При цьому, за умовою 3 теореми, $\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_0\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_0'\right)$. Отже, за означенням 9, шлях $\mathscr{L}$ є геометрично-циклічним відносно $\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}$ в кінематиці $\mathcal{F}_1$.

$\mathscr{L}7^0$) *Шлях $\mathscr{L}$ є кусково геометрично-стаціонарним в кінематиці $\mathcal{F}_1$.*

Для того, щоб довести цю властивість необхідно показати, що $\left(\widehat{\mathbf{L}}_k\right)_{\left\{\mathfrak{l}_k \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \in \mathbb{L}g\left(\mathfrak{l}_k \rfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\right) \quad \left(\forall k \in \overline{1,2}\right)$.

Для прикладу розглянемо випадок $k=1$. Для довільного $\omega = \hat{\omega}_{\left\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}$, згідно з твердженням 4 та [8, формула

(5)], маємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1} \right\rangle}(\omega) &= \mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1} \right\rangle}\left(\hat{\omega}_{\left\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) = \\ &= \mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1} \right\rangle}\left(\langle !\, \mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \rfloor\, \mathcal{F}_1 \rangle\, \hat{\omega}_{\left\{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) = \\ &= [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \rfloor\, \mathcal{F}_1]\, \mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1} \right\rangle}\left(\hat{\omega}_{\left\{\mathfrak{l}_0 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) = \\ &= [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \rfloor\, \mathcal{F}_1]\, \boldsymbol{f}(\hat{\omega}).\end{aligned}$$

Оскільки, згідно з (28), $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}$, то, враховуючи [15, означення 6, пункт 3], з останньої рівності отримуємо рівність $\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1} \right\rangle}(\omega) = [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}]\, \boldsymbol{f}(\hat{\omega})$, де, згідно з (25), $\boldsymbol{f}(\hat{\omega}) \in \mathbf{r}_1$. Тому, враховуючи рівність (11) та [8, формули (6) та (7)], маємо:

$$\mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1} \right\rangle}(\omega)\right) = \mathsf{bs}\left([\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}]\, \boldsymbol{f}(\hat{\omega})\right) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_0)$$

для довільного $\omega \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}$. Звідси, враховуючи властивість $\mathscr{L}1^0$), за означенням 7 маємо $\left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \in \mathbb{L}g\,(\mathfrak{l}_1 \rfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1)$.

Аналогічно доводиться, що $\left(\widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_2 \rfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \in \mathbb{L}g\,(\mathfrak{l}_2 \rfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1)$.

Переходимо до завершення доведення теореми. Згідно з властивістю $\mathrm{r}8^0$), маємо:

$$\mathrm{w}_0 \in \mathbf{r}_1; \quad \mathrm{w}_0' \in \mathbf{r}_2. \tag{45}$$

При цьому з умови 4 даної теореми випливає, що $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) <_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1)$ або $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2)$, тобто що $\mathrm{w}_0 \neq \mathrm{w}_1$ або $\mathrm{w}_1 \neq \mathrm{w}_2$. Звідси, враховуючи [8, рівності (6),(7)], маємо $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_0 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_1$ або $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_1 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_2$. Тому, враховуючи, що, згідно з пунктом 2 умови даної теореми, $[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_0 = \mathrm{w}_0$, $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2, \mathcal{F}]\, [\mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_1$, $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_2 = \mathrm{w}_0'$, маємо, що виконується хоча б одна з умов $\mathrm{w}_0 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_1$ або $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_1 \neq \mathrm{w}_0'$. Отже, враховуючи (45) і властивості $\mathrm{r}4^0$), $\mathrm{r}5^0$), маємо, що

$$\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\, \mathrm{w}_1) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_0'\right),$$

причому має місце хоча б одна із строгих нерівностей $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1)$ або $\mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0')$. Таким чином, $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0')$. Тому, враховуючи співвідношення (28) і [15, означення 6 (формула (10))], маємо нерівність $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) >_{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0')$. Звідси, враховуючи (10), (24) та властивість $\mathscr{L}5^0$), маємо:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\,(\mathscr{L}, \mathcal{F}_1)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) = \\
&\quad = \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\mathsf{po}\,(\mathscr{L}, \mathcal{F}_1)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right)\right) = \\
&\quad = \mathsf{tm}\,(\boldsymbol{f}\,(\mathsf{po}\,(\mathscr{L}, \mathcal{F}_1))) = \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{f}^{[-1]}\,(\mathrm{w}_0)\right)\right) = \\
&\quad = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) >_{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_0'\right) = \mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\,(\mathscr{L}, \mathcal{F}_1)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Отже, $\mathscr{L}$ є кусково геометрично стаціонарним і геометрично циклічним в системі відліку $\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}$ кінематики $\mathcal{F}_1$ ланцюговим шляхом, що задовольняє умову (46). Тому, за означенням 10, кінематика $\mathcal{F}_1$ є часозворотною. Оскільки, згідно з (28), $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1$, то кінематика $\mathcal{F}$ є умовно часозворотною (за означенням 11). $\square$

Означення 13. *Будемо говорити, що система відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *є* ***нерухомою*** *відносно системи відліку* $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *в універсальній кінематиці* $\mathcal{F}$*, якщо для довільних* $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ *з умови* $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2)$ *випливає рівність* $\mathsf{bs}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.

Наслідок 4. *Нехай в універсальній кінематиці* $\mathcal{F}$ *існують системи відліку* $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *такі, що:*

1. *Система відліку* $\mathfrak{l}_1$ *нерухома відносно системи відліку* $\mathfrak{l}_0$ *в кінематиці* $\mathcal{F}$.

2. *Існує елемент* $\mathrm{w}_0 \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_0) \cap \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_1)$ *такий, що* $[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0]\,\mathrm{w}_0 = \mathrm{w}_0$.

3. *Існує момент часу* $t_1 \in \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}_1)$ *такий, що* $t_1 >_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0)$.

4. $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{l}_1$.

Тоді кінематика $\mathcal{F}$ є умовно часозворотною.

Доведення. Покладемо:

$$\begin{aligned} &\mathrm{w}_1 := (t_1, \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0)) \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1); \quad \mathfrak{l}_2 := \mathfrak{l}_1; \\ &\qquad\qquad \mathrm{w}_2 := \mathrm{w}_1; \quad \mathrm{w}_0' := [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_2. \end{aligned} \tag{47}$$

Тоді будемо мати $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0)$. Отже, оскільки система відліку $\mathfrak{l}_1$ є нерухомою відносно $\mathfrak{l}_0$, використовуючи означення 13, другу умову наслідку і [8, формули (6),(7)], маємо:

$$\begin{aligned} \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_0'\right) &= \mathsf{bs}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_2\right) = \mathsf{bs}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_2\right) = \\ &= \mathsf{bs}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_0\right) = \mathsf{bs}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0]\,\mathrm{w}_0\right) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0). \end{aligned}$$

Крім того, згідно з третьою умовою наслідку, $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_0) <_{\mathfrak{l}_1} t_1 = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1)$. Оскільки $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{l}_1$, то, згідно з [8, формула (6)], $[\mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_1$. Таким чином, системи відліку $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2$ і елементи $\mathrm{w}_0, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_0'$ задовольняють всі умови теореми 1. І, згідно із цією теоремою, універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є умовно часозворотною. □

Зауваження 5. Умова 3 наслідку 4 автоматично виконується у випадку, якщо лінійно-упорядкована множина $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_1)$ є необмеженою зверху, зокрема, якщо $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_1) = (\mathbb{R}, \leq)$, де $\leq$ — стандартний порядок поля дійсних чисел.

6. Часозворотність і тахіонові кінематики

6.1. Кінематики, пов'язані з узагальненими перетвореннями Лоренца-Пуанкаре в сенсі E. Recami

Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — гільбертовий простір над полем дійсних чисел такий, що $\dim(\mathfrak{H}) \geq 1$ і $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ — простір лінійних (однорідних) неперервних операторів над $\mathfrak{H}$. Зазначимо, що з умови $\dim(\mathfrak{H}) \geq 1$ слід трактувати таким чином, що простір $\mathfrak{H}$ може бути і нескінченновимірним. Позначимо через $\mathcal{L}^{\times}(\mathfrak{H})$ простір всіх операторів афінних перетворень простору $\mathfrak{H}$, тобто $\mathcal{L}^{\times}(\mathfrak{H}) = \left\{\mathbf{A}_{[\mathbf{a}]} \mid \mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}), \mathbf{a} \in \mathfrak{H}\right\}$, де $\mathbf{A}_{[\mathbf{a}]}x = \mathbf{A}x + \mathbf{a}$, $x \in \mathfrak{H}$. Простором ***Мінковського*** над $\mathfrak{H}$ називається гільбертовий простір $\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \{(t, x) \mid t \in \mathbb{R},\ x \in \mathfrak{H}\}$, оснащений скалярним добутком та нормою: $\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \rangle = \langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \rangle_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = t_1 t_2 + \langle x_1, x_2 \rangle$, $\|\mathrm{w}_1\| = \|\mathrm{w}_1\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = \left(t_1^2 + \|x_1\|^2\right)^{1/2}$ (де $\mathrm{w}_i = (t_i, x_i) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, $i \in \{1, 2\}$) ([7]). В просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ виділимо такі підпростори:

$$\mathfrak{H}_0 := \{(t, \mathbf{0}) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{H}_1 := \{(0, x) \mid x \in \mathfrak{H}\},$$

де $\mathbf{0}$ — нульовий вектор. Тоді $\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$, де $\oplus$ означає ортогональну суму підпросторів. Покладемо: $\mathbf{e}_0 := (1, \mathbf{0}) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Введемо ортопроектори на підпростори $\mathfrak{H}_1$ та $\mathfrak{H}_0$:

$$\begin{gathered}\mathbf{X}\mathrm{w} = (0, x) \in \mathfrak{H}_1; \quad \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} = (t, \mathbf{0}) = \mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 \in \mathfrak{H}_0, \\ \text{де } \mathcal{T}(\mathrm{w}) = t \quad (\mathrm{w} = (t, x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})).\end{gathered} \tag{48}$$

Довільний вектор $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{H}_1$ породжує наступні підпростори в просторі $\mathfrak{H}_1$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_1[\boldsymbol{v}] &= \mathbf{span}\,\{\boldsymbol{v}\}; \\ \mathfrak{H}_{1\perp}[\boldsymbol{v}] &= \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_1[\boldsymbol{v}] = \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \langle x, \boldsymbol{v} \rangle = 0\},\end{aligned}$$

де $\mathbf{span}\,M$ означає лінійну оболонку множини $M \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Позначимо через $\mathbf{X}_1[\boldsymbol{v}]$ та $\mathbf{X}_1^{\perp}[\boldsymbol{v}]$ ортопроектори в $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ на підпростори $\mathfrak{H}_1[\boldsymbol{v}]$ та $\mathfrak{H}_{1\perp}[\boldsymbol{v}]$:

$$\begin{gathered}\mathbf{X}_1[\boldsymbol{v}]\,\mathrm{w} = \begin{cases} \langle \boldsymbol{v}, \mathrm{w} \rangle \|\boldsymbol{v}\|^{-2} \boldsymbol{v}, & \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \end{cases}, \ \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}); \\ \mathbf{X}_1^{\perp}[\boldsymbol{v}] = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\boldsymbol{v}].\end{gathered} \tag{49}$$

Тоді для довільного $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{H}_1$ отримуємо рівність:

$$\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X} = \widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1[\boldsymbol{v}] + \mathbf{X}_1^{\perp}[\boldsymbol{v}] = \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}, \tag{50}$$

де $\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}$ — тотожний (одиничний) оператор на $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.

Позначимо через $\mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$ множину операторів $\boldsymbol{U} \in \mathcal{L}^{\times}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$, що мають неперервний обернений оператор $\boldsymbol{U}^{-1} \in \mathcal{L}^{\times}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$.[5] Оператори $\boldsymbol{U} \in \mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$ будемо називати ***операторами перетворення координат***.

Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Довільна множина $\mathbb{S} \subseteq \mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$, згідно з [8, стор. 112], породжує універсальну кінематику виду $\mathfrak{Ku}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H})$.

Використовуючи [8, властивості 8], отримуємо наступні властивості універсальних кінематик типу $\mathfrak{Ku}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H})$:

Властивості 1. *Нехай* $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H})$. *Тоді:*

1. $\mathcal{L}k(\mathcal{F}) = \{(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}[\mathcal{B}, \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})]) \mid \boldsymbol{U} \in \mathbb{S}\} = \{(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}[\mathcal{B}]) \mid \boldsymbol{U} \in \mathbb{S}\}$.

2. $\mathcal{I}nd(\mathcal{F}) = \mathbb{S}$.

3. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *справедливі рівності:*

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \boldsymbol{U}(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})) = \{\boldsymbol{U}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\};$$
$$\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) = \{\mathsf{bs}(\boldsymbol{U}(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\};$$
$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}); \quad \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathcal{B}).$$

[5] В роботах [8, 10, 11], а також в попередніх розділах даної роботи, використовується позначення $U^{[-1]}$ для оберненого відображення до довільного оборотного відображення U (що не обов'язково є оператором над деяким лінійним простором). У нашому випадку, коли $\boldsymbol{U} \in \mathcal{L}^{\times}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$, обидва позначення еквівалентні, тобто $\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{[-1]}$.

4. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *справедливі рівності:*

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\mathcal{F}) = \mathfrak{H}; \tag{51}$$

$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F}) = \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{H} = \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \mathcal{M}(\mathfrak{H}); \tag{52}$$

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathcal{F}) = \boldsymbol{U}\left(\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}\left(\boldsymbol{U}^{-1}(\omega)\right)\right) = \omega \qquad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})), \tag{53}$$

де $\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ *— тотожне відображення на* $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.[6]

5. *Нехай* $\mathfrak{l} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, *де* $\boldsymbol{U} \in \mathbb{S}$. *Якщо* $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *і* $\mathsf{tm}(\widetilde{\omega}_1) \neq \mathsf{tm}(\widetilde{\omega}_2)$, *то* $\widetilde{\omega}_1$ *і* $\widetilde{\omega}_2$ *є об'єднані долею в* $\mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в* $\mathcal{B}$ *елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *такі, що* $\widetilde{\omega}_1 = \boldsymbol{U}(\omega_1)$, $\widetilde{\omega}_2 = \boldsymbol{U}(\omega_2)$.

6. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, $\mathfrak{m} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathbb{S})$ *справедлива рівність:*

$$\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{F} \rangle\, \omega = \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{U}^{-1}(\omega)\right) \qquad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \boldsymbol{U}(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))).$$

7. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, $\mathfrak{m} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathbb{S})$ *справедлива рівність:*

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{F}]\, \mathrm{w} = \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{U}^{-1}(\mathrm{w})\right) \qquad (\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F}) = \mathcal{M}(\mathfrak{H})).$$

Нагадаємо, що оператор $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ називається ***унітарним*** на $\mathfrak{H}$, якщо існує неперервний обернений оператор $U^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ і $\forall\, x \in \mathfrak{H}\ \|Ux\| = \|x\|$. Покладемо:

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1) := \{U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1) \mid U - \text{унітарний на } \mathfrak{H}_1\};$$
$$\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1) := \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \|x\| = 1\}.$$

[6] Для отримання формули (53) крім властивостей [8, властивості 8], слід також скористатися [8, формула (35)].

Зафіксуємо будь-які $c \in (0,\infty]$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ покладемо:

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]\,\mathrm{w} := \tag{54}$$
$$\begin{cases} \dfrac{\left(s\mathcal{T}(\mathrm{w})-\frac{\lambda}{c^2}\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle\right)}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0+ & \\ \qquad +J\left(\dfrac{\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w})-s\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{n}+\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), & \lambda<\infty,\ c<\infty; \\ -\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0+J\left(c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}+\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), & \lambda=\infty,\ c<\infty; \\ s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0+J\big((\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w})-s\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle)\,\mathbf{n}+ & \\ \qquad +\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\big), & \lambda<\infty,\ c=\infty, \end{cases}$$

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\mathrm{w} := \mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]\,(\mathrm{w}+\mathbf{a}). \tag{55}$$

Зауважимо, що в формулах (54),(55) константа $c \in (0,\infty]$ має фізичний зміст швидкості світла у вакуумі.

У випадку $c<\infty$ оператори виду $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]$ являють собою узагальнені перетворення Лоренца, введені в [7] (а також в роботах [5,6,18], для випадку $\dim(\mathfrak{H})=3$). При накладанні додаткових умов $\lambda<c<\infty$, $\dim(\mathfrak{H})=3$, $s=1$ формула (54) еквівалентна формулі (2.28б) з [19, ст. 37], тобто дає класичні перетворення Лоренца для інерційних систем відліку в найбільш загальній формі запису, з довільною орієнтацією осей координат. Крім того, у випадку $\dim(\mathfrak{H})=3$, $c<\infty$ клас операторів $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c) = \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J] \mid s=1,\ 0\le\lambda<c,\ \mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}$ збігається з повною групою Лоренца в сенсі [20] (більш детально про це див. [10]). Оператори виду $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s,\mathbf{n},J]$ $(\lambda<\infty)$ являють собою перетворення Галілея (неважко довести, що $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s,\mathbf{n},J] = \lim_{c\to\infty}\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]$, де границя існує у рівномірній операторній топології).

Твердження 8 ([8])**.** *Для довільних* $c\in(0,\infty]$*,* $\lambda\in[0,\infty]\setminus\{c\}$*,* $s\in\{-1,1\}$*,* $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$*,* $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ *і* $\mathbf{a}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ *справедливе* *співвідношення* $\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}\right]\in\mathbf{Pk}\left(\mathfrak{H}\right)$.

Позначення 1. *Для* $0<c\le\infty$ *введемо наступні класи операторів над простором* $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$*:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{PT}\left(\mathfrak{H},c\right) &:= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}\right] \mid s\in\{-1,1\}\,,\ \lambda\in[0,\infty]\setminus\{c\},\\ &\qquad \mathbf{n}\in\mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right),\ J\in\mathfrak{U}\left(\mathfrak{H}_1\right),\ \mathbf{a}\in\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)\};\\ \mathfrak{PT}_+\left(\mathfrak{H},c\right) &:= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}\right]\in\mathfrak{PT}\left(\mathfrak{H},c\right) \mid s=1\};\\ \mathfrak{P}\left(\mathfrak{H},c\right) &:= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}\right]\in\mathfrak{PT}\left(\mathfrak{H},c\right) \mid \lambda<c\};\\ \mathfrak{P}_+\left(\mathfrak{H},c\right) &:= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}\right]\in\mathfrak{P}\left(\mathfrak{H},c\right) \mid s=1\}\end{aligned}$$

(очевидно, що $\mathfrak{PT}\left(\mathfrak{H},\infty\right)=\mathfrak{P}\left(\mathfrak{H},\infty\right)$*,* $\mathfrak{PT}_+\left(\mathfrak{H},\infty\right)=\mathfrak{P}_+\left(\mathfrak{H},\infty\right)$*).*

Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})\subseteq\mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})=(\mathbb{R},\le)$, де $\le$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Позначення 2. *Використовуючи введені класи операторів, визначимо такі універсальні кінематики:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{UPT}_0\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right) &:= \mathfrak{Ku}\left(\mathfrak{PT}\left(\mathfrak{H},c\right),\mathcal{B};\,\mathfrak{H}\right);\\ \mathfrak{UPT}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right) &:= \mathfrak{Ku}\left(\mathfrak{PT}_+\left(\mathfrak{H},c\right),\mathcal{B};\,\mathfrak{H}\right);\\ \mathfrak{UP}_0\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right) &:= \mathfrak{Ku}\left(\mathfrak{P}\left(\mathfrak{H},c\right),\mathcal{B};\,\mathfrak{H}\right);\\ \mathfrak{UP}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right) &:= \mathfrak{Ku}\left(\mathfrak{P}_+\left(\mathfrak{H},c\right),\mathcal{B};\,\mathfrak{H}\right).\end{aligned}$$

Зауважимо, що визначені вище універсальні кінематики було введено в роботі [8, стор. 115]. У випадку $\dim(\mathfrak{H})=3$, $c<\infty$ універсальна кінематика $\mathfrak{UP}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$ являє собою математично строгу модель кінематики спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку. Універсальна кінематика $\mathfrak{UP}_0\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$ побудована на основі загальної групи Лоренца-Пуанкаре і містить крім звичайних систем відліку "з додатним напрямком часу", які мають зрозумілу фізичну інтерпретацію, також системи відліку з "від'ємним напрямком часу". Універсальні кінематики $\mathfrak{UPT}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$ і $\mathfrak{UPT}_0\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$ містять крім стандартних ("тардіонних") систем відліку також і "тахіонні" системи відліку, які рухаються відносно “тардіонних” систем відліку зі швидкістю, більшою за швидкість світла c. У випадку $\dim(\mathfrak{H}) = 3$, $c = \infty$ універсальна кінематика $\mathfrak{UP}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, \infty) = \mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, \infty)$ являє собою математично строгу модель класичної кінематики Галілея в інерційних системах відліку.

Серед введених вище кінематик тахіоновими (тобто такими, що дозволяють надсвітловий рух для систем відліку) є кінематики $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ та $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ при $c < \infty$.

6.2. Спеціальний підклас узагальнених перетворень Лоренца-Пуанкаре

Нехай $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $\sigma, \mu \in \{-1, 1\}$. Введемо позначення:

$$\mathbb{I}_{\sigma,\mu}[\mathbf{n}]\, x := \sigma \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\, x + \mu \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\, x, \quad x \in \mathfrak{H}_1. \tag{56}$$

Неважко перевірити, що $\mathbb{I}_{\sigma,\mu}[\mathbf{n}] \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ (для довільних $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\sigma, \mu \in \{-1, 1\}$). Введемо спеціальний підклас узагальнених перетворень Лоренца-Пуанкаре (54)–(55). Зафіксуємо будь-які $c \in (0, \infty]$, $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ покладемо:

$$\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]}\mathrm{w} := \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s, \mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]\right]\mathrm{w} = \tag{57}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\left(s\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\lambda}{c^2}\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + \dfrac{s\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle - \lambda\mathcal{T}(\mathrm{w})}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}, \\ \hfill \lambda < \infty,\ c < \infty; \\ -\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 - c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}, \quad \lambda = \infty,\ c < \infty; \\ s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + \left(s\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle - \lambda\mathcal{T}(\mathrm{w})\right)\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}, \\ \hfill \lambda < \infty,\ c = \infty, \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n};\mathbf{a}]}\mathrm{w} := \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]}(\mathrm{w} + \mathbf{a}) = \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s, \mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]; \mathbf{a}\right]\mathrm{w}. \tag{58}$$

Зауваження 6. Оскільки $\mathbb{I}_{\sigma,\mu}[\mathbf{n}] \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, то, згідно з позначенням 1, враховуючи рівність $\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]} = \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n};\mathbf{0}]}$, маємо

$$\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n};\mathbf{a}]}, \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]} \in \mathfrak{PT}(\mathfrak{H}, c)$$
$$\text{і при } \lambda < c \quad \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n};\mathbf{a}]}, \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{H}, c)\,.$$

(для довільних $c \in (0,\infty]$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$). Крім того, у випадку $s = 1$, отримуємо:

$$\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,\mathbf{n};\mathbf{a}]}, \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,\mathbf{n}]} \in \mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}, c)$$
$$\text{і при } \lambda < c \quad \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,\mathbf{n};\mathbf{a}]}, \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,\mathbf{n}]} \in \mathfrak{P}_+(\mathfrak{H}, c) \tag{59}$$

($c \in (0,\infty]$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$).

Для довільного $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, використовуючи (50), маємо:

$$\mathbf{E}_{0,c}^{[1,\mathbf{n}]}\mathrm{w} = \mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + \langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} =$$
$$= \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} + \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \mathrm{w}.$$

Отже, використовуючи зауваження 6, при довільному $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ отримуємо:

$$\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = \mathbf{E}_{0,c}^{[1,\mathbf{n}]} \in$$
$$\in \mathfrak{P}_+(\mathfrak{H}, c) \cap \mathfrak{P}(\mathfrak{H}, c) \cap \mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}, c) \cap \mathfrak{PT}(\mathfrak{H}, c)\,. \tag{60}$$

Знайдемо обернений оператор до оператора виду $\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]}$ при $c < \infty$. Нехай $0 < c < \infty$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$. Тоді, згідно з [7, ст. 143], оператор $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]$ можна подати у вигляді

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J] = \mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\,, \quad \text{де} \tag{61}$$
$$\theta = \frac{1-\frac{\lambda}{c}}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} \quad \left(\lambda = c\frac{1-\theta\,|\theta|}{1+\theta\,|\theta|}\right),\ -1 \le \theta \le 1,\ \theta \ne 0$$

(при цьому у випадку $\lambda = \infty$ слід вважати, що $\theta = -1$). Отже, згідно з [21, наслідок 5.1], отримуємо:

$$(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J])^{-1} = (\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J])^{-1}$$

$$= \mathbf{U}_{\theta^s,c}\left[s_\theta, s_\theta J\mathbf{n}, J^{-1}\right], \quad \text{де} \tag{62}$$

$$s_\theta = \mathfrak{S}(s,\theta) = \begin{cases} 1, & s,\theta > 0 \\ -1, & s < 0 \text{ або } \theta < 0. \end{cases}$$

При цьому для $|\theta| > 1$ значення операторнозначної функції $\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]$ визначено в [21, формула (4.11)].

У випадку $s = 1$ маємо, $s_\theta = \operatorname{sign}\theta = \operatorname{sign}\left(\frac{1-\frac{\lambda}{c}}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\right) = \operatorname{sign}(c-\lambda)$, де у випадку $\lambda = \infty$ слід вважати, що $\operatorname{sign}(c-\lambda) = -1$. Отже, використовуючи (62), в цьому випадку отримуємо:

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J])^{-1} &= \mathbf{U}_{\theta,c}\left[s_\theta, s_\theta J\mathbf{n}, J^{-1}\right] = \\ &= \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s_\theta, s_\theta J\mathbf{n}, J^{-1}\right] = \\ &= \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[\operatorname{sign}(c-\lambda), \operatorname{sign}(c-\lambda)J\mathbf{n}, J^{-1}\right] \quad (s=1). \end{aligned} \tag{63}$$

Розглянемо тепер випадок $s = -1$ $(\theta^s = \theta^{-1})$. Згідно з (62) і [21, формула (4.11)], в цьому випадку отримуємо:

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J])^{-1} &= \mathbf{U}_{\theta^{-1},c}\left[s_\theta, s_\theta J\mathbf{n}, J^{-1}\right] = \\ &= \mathbf{U}_{\theta,c}\left[s_\theta \operatorname{sign}\theta, -s_\theta(\operatorname{sign}\theta)J\mathbf{n}, J^{-1}\right] = \\ &= \mathbf{U}_{\theta,c}\left[-\operatorname{sign}\theta, (\operatorname{sign}\theta)J\mathbf{n}, J^{-1}\right] = \\ &= \mathbf{U}_{\theta,c}\left[-\operatorname{sign}(c-\lambda), \operatorname{sign}(c-\lambda)J\mathbf{n}, J^{-1}\right] = \\ &= \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[-\operatorname{sign}(c-\lambda), \operatorname{sign}(c-\lambda)J\mathbf{n}, J^{-1}\right] \\ & \qquad (s=-1). \end{aligned} \tag{64}$$

З формул (63) і (64) в обох випадках маємо:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J])^{-1} = \\ &\qquad = \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s\operatorname{sign}(c-\lambda), \operatorname{sign}(c-\lambda)J\mathbf{n}, J^{-1}\right], \end{aligned} \tag{65}$$

$0 < c < \infty$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ (де у випадку $\lambda = \infty$ слід вважати, що $\operatorname{sign}(c-\lambda) = -1$).

Зокрема, використовуючи отриману рівність і формулу (57), при $0 < c < \infty$, $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]}\right)^{-1} &= \left(\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s, \mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]\right]\right)^{-1} = \\ &= \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s \operatorname{sign}(c-\lambda), \operatorname{sign}(c-\lambda)\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}, \left(\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]\right)^{-1}\right] = \\ &= \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s \operatorname{sign}(c-\lambda), -\operatorname{sign}(c-\lambda)\mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]\right] = \\ &= \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s \operatorname{sign}(c-\lambda), -\operatorname{sign}(c-\lambda)\mathbf{n}]}. \end{aligned} \tag{66}$$

З формул (66) та (58), використовуючи нескладні обчислення, отримуємо:

$$\left(\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n};\mathbf{a}]}\right)^{-1} \mathrm{w} = \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s \operatorname{sign}(c-\lambda), -\operatorname{sign}(c-\lambda)\mathbf{n}]} \mathrm{w} - \mathbf{a} \qquad (\mathrm{w}, \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}))\,. \tag{67}$$

6.3. Про умовну часозворотність тахіонових кінематик типу $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ та $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$

Теорема 1 дає можливість встановити умовну часозворотність універсальних кінематик типу $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$, $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$, $\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$. Для отримання основних результатів цього підрозділу (наслідків з теореми 1) необхідно ввести деякі позначення і довести допоміжну лему. Всюди в даному підрозділі, як і в попередньому, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Покладемо:

$$\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} := \left(\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}, \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}[\mathcal{B}]\right) = \left(\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}, \mathcal{B}\right), \tag{68}$$

де рівність $\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}[\mathcal{B}] = \mathcal{B}$ випливає з [8, зауваження 9]. Використовуючи властивість 1(1), співвідношення (60) та позначення 2, отримуємо:

$$\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UP}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)\right) \cap \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UP}_0\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)\right) \cap$$
$$\cap\, \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)\right) \cap \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}_0\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)\right).$$

Згідно з властивістю 1(1) і позначенням 2, $\mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)\right) = \left\{\left(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\left[\mathcal{B}\right]\right) \mid \boldsymbol{U} \in \mathfrak{PT}_+\left(\mathfrak{H},c\right)\right\}$. Покладемо:

$$\mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)\right)_{\mathfrak{T},\mathsf{fin}} := \Big\{\left(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\left[\mathcal{B}\right]\right) \mid$$
$$\boldsymbol{U} = \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[1,\mathbf{n},J;\mathbf{a}\right] \in \mathfrak{PT}_+\left(\mathfrak{H},c\right);\ c<\lambda<\infty\Big\}. \quad (69)$$

Легко бачити, що:

$$\mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)\right)_{\mathfrak{T},\mathsf{fin}} \subseteq \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)\right) \subseteq$$
$$\subseteq \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}_0\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)\right).$$

Лема 1. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)\right)_{\mathfrak{T},\mathsf{fin}}$ *справедливе співвідношення:*

$$\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Downarrow^{-}_{\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}.$$

Доведення. Нехай $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)\right)_{\mathfrak{T},\mathsf{fin}}$. Тоді систему відліку $\mathfrak{l}$, згідно з (69) та позначенням 1, можна подати у вигляді:

$$\mathfrak{l} = \left(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\left[\mathcal{B}\right]\right), \quad \text{де} \quad (70)$$
$$\boldsymbol{U} = \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[1,\mathbf{n},J;\mathbf{a}\right],\ \infty>\lambda>c,$$
$$\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right),\ J \in \mathfrak{U}\left(\mathfrak{H}_1\right),\ \mathbf{a} \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right). \quad (71)$$

З формул (68), (70), за властивостями $1(4,7)$ отримуємо $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}\right) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$, причому:

$$\left[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}\right] \mathrm{w} = \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\boldsymbol{U}^{-1}\mathrm{w} = \boldsymbol{U}^{-1}\mathrm{w}, \quad \mathrm{w} \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}\right) = \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right).$$

Звідси, використовуючи (71), (55) та (65), маємо:

$$\left[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}\right] \mathrm{w} = \left(\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[1,\mathbf{n},J;\mathbf{a}\right]\right)^{-1} \mathrm{w} =$$
$$= \left(\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[1,\mathbf{n},J\right]\right)^{-1} \mathrm{w} - \mathbf{a} =$$

$$= \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[\operatorname{sign}(c-\lambda), \operatorname{sign}(c-\lambda)J\mathbf{n}, J^{-1}\right]\mathrm{w} - \mathbf{a} =$$
$$= \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[-1, -J\mathbf{n}, J^{-1}\right]\mathrm{w} - \mathbf{a}. \qquad (72)$$

Оскільки для $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ справедливі рівності $\mathsf{tm}(\mathrm{w}) = \mathcal{T}(\mathrm{w})$, $\mathsf{bs}(\mathrm{w}) = \mathbf{X}\mathrm{w}$, то для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ таких, що $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) < \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, використовуючи (72), отримуємо:

$$\mathsf{tm}\left(\left[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}\right]\mathrm{w}_2\right) - \mathsf{tm}\left(\left[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}\right]\mathrm{w}_1\right) =$$
$$= \mathcal{T}\left(\left[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}\right]\mathrm{w}_2\right) - \mathcal{T}\left(\left[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}\right]\mathrm{w}_1\right) =$$
$$= \mathcal{T}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[-1, -J\mathbf{n}, J^{-1}\right](\mathrm{w}_2 - \mathrm{w}_1)\right) =$$
$$= \mathcal{T}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[-1, -J\mathbf{n}, J^{-1}\right]\widetilde{\mathrm{w}}\right),$$

де $\quad \widetilde{\mathrm{w}} = \mathrm{w}_2 - \mathrm{w}_1;$

$$\mathbf{X}\widetilde{\mathrm{w}} = \mathbf{X}\mathrm{w}_2 - \mathbf{X}\mathrm{w}_1 = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = 0;$$
$$\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}}) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2) - \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) > 0.$$

Звідси, використовуючи (54), отримуємо:

$$\mathsf{tm}\left(\left[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}\right]\mathrm{w}_2\right) - \mathsf{tm}\left(\left[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}\right]\mathrm{w}_1\right) =$$
$$= \mathcal{T}\left(\frac{-\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}}) - \frac{\lambda}{c^2}\langle -J\mathbf{n}, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + \right.$$
$$\left. + J^{-1}\left(-\frac{\lambda\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}}) + \langle -J\mathbf{n}, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}J\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[-J\mathbf{n}\right]\widetilde{\mathrm{w}}\right)\right) =$$
$$= \frac{-\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}}) - \frac{\lambda}{c^2}\langle -J\mathbf{n}, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} = \frac{-\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}}) + \frac{\lambda}{c^2}\langle \mathbf{X}J\mathbf{n}, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} =$$
$$= \frac{-\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}}) + \frac{\lambda}{c^2}\langle J\mathbf{n}, \mathbf{X}\widetilde{\mathrm{w}}\rangle}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} = -\frac{\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}})}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} < 0.$$

Отже, для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ таких, що $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) < \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2)$, маємо $\mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) > \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$. За властивістю 1(3), $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$. Отже, часовий порядок в системах відліку $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}$ і $\mathfrak{l}$ збігається із стандартним порядком поля дійсних чисел. Тому, за означенням 12 (пункт 4), маємо $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Downarrow^{-}_{\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}$. □

Наслідок 5. *Довільна універсальна кінематика виду $\mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ $(c < \infty)$ є умовно часозворотною.*

Доведення. Розглянемо довільні вектор $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\,(\mathfrak{H}_1)$ і число $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що $\lambda > c$. Покладемо:

$$\mathfrak{l}_1 := \left(\mathbf{E}^{[1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}, \mathbf{E}^{[1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\,[\mathcal{B}]\right);$$
$$\mathfrak{l}_2 := \left(\mathbf{E}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}_{\lambda,c}, \mathbf{E}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}_{\lambda,c}\,[\mathcal{B}]\right), \quad \text{де} \quad \mathbf{a}_1 = \frac{2\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2} - 1}}\mathbf{n}.$$

Із властивості 1(1), співвідношення (59) і позначення 2 випливає, що $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c))$.

Покладемо:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{w}_0 := \mathbf{0}; & \mathrm{w}_1 := (1, 0) = \mathbf{e}_0; \\ \mathrm{w}_2 := 2\mathbf{e}_0; & \mathrm{w}'_0 := -\frac{2}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2} - 1}}\,\mathbf{e}_0. \end{array}\right\} \tag{73}$$

Доведемо, що системи відліку $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}$, $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ і елементи $\mathrm{w}_0, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}'_0 \in \mathcal{M}\,(\mathfrak{H}) = \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}) = \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_1) = \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_2)$ задовольняють умови теореми 1 (для кінематики $\mathcal{F} = \mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$).

1) Згідно з лемою 1, $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Downarrow^{-}_{\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}_1$ і $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Downarrow^{-}_{\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}_2$.

2) Використовуючи властивість 1(7) і формули (57), (58), (66), (67), отримуємо:

$$\begin{aligned}[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}]\,\mathrm{w}_0 &= \mathbf{E}^{[1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\mathbb{I}^{-1}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\mathrm{w}_0 = \\ &= \mathbf{E}^{[1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\mathrm{w}_0 = \mathbf{E}^{[1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathrm{w}_0;\end{aligned} \tag{74}$$

$$
\begin{aligned}
[\mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1 &= \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}\left(\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,\mathbf{n}]}\right)^{-1}\mathrm{w}_1 = \\
&= \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[-1,\mathbf{n}]}\mathbf{e}_0 = \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,-\mathbf{n}]}\left(\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[-1,\mathbf{n}]}\mathbf{e}_0 + \mathbf{a}_1\right) = \\
&= \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,-\mathbf{n}]}\left(\frac{\left(-1\cdot 1 - \frac{\lambda}{c^2}\cdot 0\right)}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{-1\cdot 0 - \lambda\cdot 1}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{n} + \mathbf{0} + \mathbf{a}_1\right) = \\
&= \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,-\mathbf{n}]}\left(-\frac{\mathbf{e}_0 + \lambda\mathbf{n}}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} + \frac{2\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\mathbf{n}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\,\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,-\mathbf{n}]}\left(-\mathbf{e}_0 + \lambda\mathbf{n}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\left(\frac{\left(1\cdot(-1) - \frac{\lambda}{c^2}\cdot(-\lambda)\right)}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\mathbf{e}_0 + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1\cdot(-\lambda) - \lambda\cdot(-1)}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\,(-\mathbf{n}) + \mathbf{0}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\,\frac{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0 = \mathrm{w}_1; \qquad (75) \\
[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_2 &= \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\left(\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}\right)^{-1}(2\mathbf{e}_0) = \\
&= \left(\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}\right)^{-1}(2\mathbf{e}_0) = \\
&= 2\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1\cdot(-1),-(-1)(-\mathbf{n})]}\mathbf{e}_0 - \mathbf{a}_1 = 2\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[-1,-\mathbf{n}]}\mathbf{e}_0 - \mathbf{a}_1 =
\end{aligned}
$$

$$= 2\left(\frac{\left((-1)\cdot 1 - \frac{\lambda}{c^2}\cdot 0\right)}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)\cdot 0 - \lambda\cdot 1}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}(-\mathbf{n}) + \mathbf{0}\right) - \mathbf{a}_1 =$$

$$= -2\left(\frac{\mathbf{e}_0 - \lambda\mathbf{n}}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\right) - \frac{2\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\mathbf{n} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\,\mathbf{e}_0 = \mathrm{w}'_0. \tag{76}$$

З рівностей (74), (75), (76) випливає, що другий пункт умови теореми 1 виконаний.

3) З рівностей (73) випливає виконання третього пункту умови теореми 1 (тобто $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_0) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}'_0)$).

4) З рівностей (73) маємо $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_0) = 0 < 1 = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) < 2 = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$. Згідно з властивістю 1(3) та умовою наслідку, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_1) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_2) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$. Отже, часовий порядок в системах відліку $\mathfrak{l}_1$ і $\mathfrak{l}_2$ співпадає із стандартним порядком поля дійсних чисел. Тому четвертий пункт умови теореми 1 також виконується. Таким чином, згідно із теоремою 1, кінематика $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ є умовно часозворотною. □

Аналогічно до наслідку 5, з допомогою теореми 1 доводиться такий наслідок:

Наслідок 6. *Довільна універсальна кінематика виду $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ $(c < \infty)$ є умовно часозворотною.*

Наслідок 7. *Довільна універсальна кінематика виду $\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ $(c < \infty)$ є умовно часозворотною.*

Доведення. Згідно з (60), $\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{H}, c)$. Оператор $-\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}$ також належить до $\mathfrak{P}(\mathfrak{H}, c)$, згідно з позначенням 1, оскільки $-\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = \mathbf{W}_{0,c}\left[-1, \mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,-1}[\mathbf{n}]\right]$ $(\forall \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1))$. Таким чином:

$$\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}, -\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{H}, c). \tag{77}$$

Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$. Покладемо:

$$\mathfrak{l}_1 := \left(-\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}, \left(-\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\right)[\mathcal{B}]\right).$$

Згідно із (77) і властивістю 1(1), маємо $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}, \mathfrak{l}_1 \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)\right)$. Звідси, використовуючи властивість 1(7), отримуємо:

$$\left[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}_1\right] = \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\left(-\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\right)^{-1} = -\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}.$$

З останньої рівності, за означенням 13, випливає, що система відліку $\mathfrak{l}_1$ — нерухома відносно системи відліку $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}$ в кінематиці $\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$, а за означенням 12 (пункт 4) отримуємо, що $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Downarrow^{-}_{\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}_1$. Крім того, для елемента $\mathrm{w}_0 = \mathbf{0} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1)$, використовуючи властивість 1(7), маємо:

$$\left[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}\right]\mathrm{w}_0 = -\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\mathbb{I}^{-1}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathrm{w}_0.$$

Отже, враховуючи зауваження 5 і властивість 1(3), згідно з якою $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_1) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$ є необмеженою зверху лінійно упорядкованою множиною, бачимо, що системи відліку $\mathfrak{l}_0$ і $\mathfrak{l}_1$ задовольняють всі умови наслідку 4 для універсальної кінематики $\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$.

Тому, згідно з наслідком 4, кінематика $\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ є умовно часозворотною. $\square$

Із наслідків 5 та 6 випливає, що кінематики виду $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ та $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$, тобто всі тахіонові кінематики, побудовані в роботі [8], які допускають рух з надсвітловою швидкістю для систем відліку, є умовно часозворотними. У зв'язку з цим виникає запитання:

Чи можна, базуючись на узагальнених перетвореннях Лоренца-Пуанкаре в сенсі E. Recami побудувати безумовно часо-незворотну універсальну кінематику, яка допускає для систем відліку рух з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла?

Виявляється, що, використовуючи теорему про неповернення для універсальних кінематик, яку заплановано опублікувати в наступних роботах, можна отримати позитивну відповідь на поставлене запитання.

Література

[1] *Bilaniuk O.-M. P., Deshpande V. K., Sudarshan E. C. G.* "Meta" Relativity // American Journal of Physics. – 1962. – **30**, N 10. – P. 718-723.

[2] *Bilaniuk O.-M. P., Sudarshan E. C. G.* Particles beyond the Light Barrier // Physics Today. – 1969. – **22**, N 5. – P. 43-51.

[3] *Іляшевич В. І., Медведєв С. Ю.* Тахіонні акаузальні петлі // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2010. – **2010**, N 27. – С. 103–111.

[4] *Andrēka H., Madarász J. X., Németi I., Stannett M., Székely G.* Faster than light motion does not imply time travel // Classical and Quantum Grav. – 2014. – **31**, N 9. – DOI: 10.1088/0264-9381/31/9/095005.

[5] *Recami E.* Classical Tachyons and Possible Applications // Riv. Nuovo Cim. – 1986. – **9**, s. 3, N 6. – P. 1–178.

[6] *Hill J. M. , Cox B. J.* Einstein's special relativity beyond the speed of light // Proc. of the Royal Society A. – 2012. – **468**, 2148. – P. 4174–4192.

[7] *Grushka Ya. I.* Tachyon Generalization for Lorentz Transforms // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2013. – **20**, N 2. – P. 127–145.

[8] *Грушка Я. І.* Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – **12**, N 1. – C. 74–118.

[9] *Grushka Ya. I.* Abstract concept of changeable set. – Preprint: arXiv:1207.3751v1 – 2012. – 54 p.

[10] *Грушка Я. І.* Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2014. – **11**, N 1. – C. 192–227.

[11] *Grushka Ya. I.* Abstract Coordinate Transforms in Kinematic Changeable Sets and their Properties. – Preprint: arXiv:1504.02685v2. – 2015. – 31 p.

[12] *Грушка Я. І.* Критерій існування універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах // Буковинський математичний журнал. – 2014 – **2**, N 2–3. C. 59–71.

[13] *Грушка Я. І.* Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2014. – **11**, N 2. – C. 66–99.

[14] *Грушка Я. І.* Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, N 9. – C. 1198–1218.

[15] *Грушка Я. І.* Еволюційні розширення кінематичних множин та універсальних кінематик // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – **12**, N 2. – C. 139–204.

[16] *Грушка Я. І.* Теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик // Буковинський математичний журнал. – 2015. – **3**, N 3-4. – C. 67–77.

[17] *Грушка Я. І.*Видимість у мінливих множинах // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2012. – **9**, N 2. – C. 122–145.

[18] *Vieira R. S.* An Introduction to the Theory of Tachyons // Rev. Bras. Ensino Fis. – 2012. – **34**, N 3. – P. 1–15 (доступно як arXiv:1112.4187v2).

[19] *Мёлер К.* Теория Относительности. – М.: Атомиздат. – 1975. – 400 с.

[20] *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца // УМН. – 1954. – **IX**, вып. 4 (62). – С. 19–93.

[21] *Грушка Я. І.* Алгебраїчні властивості тахіонних перетворень Лоренца // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2013. – **10**, N 2. – С. 138–169.