

Група неперервних перетворень відрізка $[0;1]$, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа

Р. Ю. Осауленко¹

¹ Інститут математики НАН України;
Roman.Osaulyenko@gmail.com

In the paper, we propose to solve the problem of construction a set of a continuous transformation of the segment $[0;1]$, which keeps the figure frequency of a Q_s real number representation for any natural $s > 1$. The group properties of that set are studied in the article. Sets of functions which keeps figure frequency and functions which keeping tails of the Q_s number representation are presented in the paper.

В работе предлагается решение задачи о построении множества непрерывных преобразований отрезка $[0;1]$, которые сохраняют частоты цифр Q_s -изображения числа для произвольного натурального $s > 1$. Изучаются групповые свойства множеств функций, которые сохраняют хвосты, и функций, которые сохраняют частоты цифр Q_s -изображения числа. Представлено пример функции, которая сохраняет частоты, но не сохраняет хвосты Q_s -изображения чисел.

1 Вступ

Розглядається зображення дійсних чисел з відрізка $[0;1]$ зі скінченним алфавітом, яке є узагальненням класичного s -ого зображення числа. У роботах [1–8] вивчаються властивості Q -зображення та різні математичні об'єкти, з ним пов'язані. Нагадаємо його зміст.

Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ – алфавіт s -ої системи числення, $Q_s \equiv \{q_0, q_1, \dots, q_{s-1}\}$ – заданий набір дійсних чисел, $q_i > 0$, $\sum_{j=0}^{s-1} q_j = 1$, $\beta_0 \equiv 0$, $\beta_k \equiv \sum_{j=0}^{k-1} q_j$, $k = 1, 2, \dots, s-1$.

Відомо [1, 2], що для будь-якого $x \in [0; 1]$ існує нескінченна послідовність (α_n) , $\alpha_n \in A_s$, $n \in \mathbb{N}$, така, що:

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots}^{Q_s}. \quad (1)$$

Подання числа x у вигляді ряду (1) називається Q_s -зображенням числа x , а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots}^{Q_s}$ – його Q_s -зображенням. При цьому $\alpha_k = \alpha_k(x)$ називається k -им Q_s -символом або Q_s -цифрою (далі просто цифрою) числа x .

Якщо цифри утворюють період у Q_s -зображенні числа – записуються у круглих дужках.

Зліченна множина чисел має два Q_s -зображення. Це числа виду:

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k(0)}^{Q_s} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots [\alpha_k - 1](s-1)}^{Q_s},$$

вони називаються Q_s -раціональними, а решта Q_s -ірраціональними.

Зауваження 1.1. Якщо $q_0 = q_1 = \dots = q_{s-1} = \frac{1}{s}$, то Q_s -зображення є звичайним s -ковим розкладом числа. Тому Q_s -зображення є узагальненням s -го зображення числа. При цьому Q_s -символи числа є індексами у його представленні, а не коефіцієнти, як у s -ому розкладі.

Означення 1.1. Циліндром рангу t з основою c_1, c_2, \dots, c_m , $c_i \in A_s$, називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s}$, що складається з усіх чисел $x \in [0; 1]$, що мають Q_s -зображення, у якого перші t Q_s -символів співпадають з c_1, c_2, \dots, c_m відповідно, тобто

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} = \{x : \alpha_j(x) = c_i, i = \overline{1, t}\}.$$

Зазначимо, що циліндром рангу t є відрізок, а саме:

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} = \left[\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(0)}^{Q_s}; \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(s-1)}^{Q_s} \right].$$

Інші властивості циліндрів представлено у монографії [2].

Означення 1.2. Оператором лівостороннього зсуву цифр Q_s -зображення числа (далі оператор лівостороннього зсуву) у просторі зображень називається відображення, означене рівністю:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots}^{Q_s}. \quad (2)$$

При домовленості використовувати лише одне з двох існуючих зображень Q_s -раціональних чисел, а саме: те, що містить період (0) , оператор лівостороннього зсуву породжує коректно означену функцію на $[0;1]$, якщо покласти $\omega(1) = 1$.

Означення 1.3. *Оператором правостороннього зсуву цифр Q_s -зображення числа з параметром $j \in A_s$ (далі оператор правостороннього зсуву з параметром j) називається відображення, означене рівністю:*

$$\delta_j(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_s}) = \Delta_{j\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_s}. \quad (3)$$

Легко довести рівності: $\omega(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots}^{Q_s}) = (x - \beta_{\alpha_1}) q_{\alpha_1}^{-1}$,

$$\delta_j(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_s}) = \beta_j + q_j x,$$

$$\omega(\delta_j(x)) = x, \quad \delta_{\alpha_1(x)}(\omega(x)) = x.$$

Далі: $\omega^2(x) = \omega(\omega(x))$, $\omega^k(x) = \omega(\omega^{k-1}(x))$;

$$\delta_{j_1 j_2 \dots j_k}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_s}) \equiv \delta_{j_1}(\delta_{j_2}(\dots(\delta_{j_k}(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots}^{Q_s})))) = \Delta_{j_1 j_2 \dots j_k \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots}^{Q_s}$$

Надалі ми будемо використовувати лише одне з двох можливих Q_s -зображень чисел.

2 Перетворення, які зберігають хвости Q_s -зображення чисел

Розглядається фіксоване Q_s -зображення чисел відрізка $[0;1]$.

Нагадаємо, що перетворенням відрізка $[0;1]$ називається кожне бієктивне відображення цього відрізка на себе. Неперервні перетворення відрізка $[0;1]$ вичерпуються неперервними строго монотонними функціями f , такими, що: $f(0) = 0$ і $f(1) = 1$ або $f(0) = 1$ і $f(1) = 0$.

Кажуть, що Q_s -зображення $\Delta_{a_1 a_2 \dots}^{Q_s}$ і $\Delta_{b_1 b_2 \dots}^{Q_s}$ двох дійсних чисел мають однаковий хвіст, якщо існують $k, n \in \mathbb{Z}_0$: такі, що $a_{k+j} = b_{n+j}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ (символічно: $\Delta_{a_1 a_2 \dots}^{Q_s} \sim \Delta_{b_1 b_2 \dots}^{Q_s}$).

Кажуть, що функція f , яка визначена на відрізку $[0;1]$ і набуває значень з цього ж відрізка, зберігає хвости Q_s -зображення дійсних чисел, якщо $\forall x \in [0;1]$, $\exists k = k(x), m = m(x) \in \mathbb{N}$: $\alpha_{n+k}(x) = \alpha_{n+m}(f(x))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, де $\alpha_n(x)$ – це n -та цифра Q_s -зображення числа x .

Слід відмітити, що оператори ω , δ_j – зберігають хвости Q_s -зображення числа x .

Прикладом функції, яка зберігає хвости Q_s -зображення, є наступна:

$$f(x) = \begin{cases} \omega(x) \text{ при } 0 \leq x < \Delta_{(0[s-1])}^{Q_s} = \frac{q_0 \beta_{s-1}}{1 - q_0 q_{s-1}} \equiv a; \\ \delta_{s-1}(x) \text{ при } a \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Оскільки розв'язком рівняння $q_0^{-1}x = \beta_{s-1} + q_{s-1}x$ є число $a = \frac{q_0 \beta_{s-1}}{1 - q_0 q_{s-1}}$, то функція (4) є результатом "склеювання" двох функцій $f_1(x) = q_0^{-1}x$ та $f_2(x) = \beta_{s-1} + q_{s-1}x$ у точці, абсциса якої рівна a .

Функцію φ , яка залежить від цілих невід'ємних параметрів n та k , упорядкованого набору цифр (a_1, a_2, \dots, a_n) , $a_j \in A_s$, означимо на відрізьку $[0;1]$ рівністю:

$$\varphi(x, n, (a_1, a_2, \dots, a_n), k) = \begin{cases} x \text{ при } n = 0 = k, \\ \omega^k(x) \text{ при } n = 0 \neq k, \\ \delta_{a_1 a_2 \dots a_n}(x) \text{ при } k = 0 \neq n, \\ \delta_{a_1 a_2 \dots a_n}(\omega^k(x)) \text{ при } n \neq 0 \neq k. \end{cases} \quad (5)$$

Рангом функції (5) називатимемо число $r = n + k$.

Функцією l шарів ($l \in Z_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$) будемо називати функцію типу (5), ранг якої не більший за l .

Розглянемо множину всіх функцій l шарів:

$$\Phi^l = \{\varphi(x, n, (a_1, a_2, \dots, a_n), k) \mid n + k \leq l, a_j \in A_s\}, \quad l \in Z_0. \quad (6)$$

Множина функцій Φ^l , $l \in Z_0$ – скінченна, причому при $l = 0$ складається з однієї функції $e(x) = x$. Будь-яка функція з множини (6) зберігає хвости Q_s -зображення чисел, але жодна, окрім $e(x) = x$, не є неперервним перетворенням відрізка $[0;1]$. Для побудови множини таких неперервних перетворень оберемо $l_0 \in Z_0$. Далі утворюємо сітку, лініями якої є графіки функцій з Φ^{l_0} , а вузлами є точки перетину ліній сітки. Використовуючи утворену сітку, будуємо неперервне перетворення відрізка $[0;1]$.

Зазначимо, що зі зростанням кількості шарів, кількість неперервних перетворень відрізка $[0;1]$, які зберігають хвости Q_s -зображення швидко зростає, наприклад, для Q_2 при $l_0 = 0$ маємо лише одну функцію, при $l_0 = 1$ – це 3 функції, а при $l_0 = 2$ маємо 189 функцій.

Позначимо множину неперервних перетворень $H_{Q_s} = \bigcup_{j \in Z_0} H_{Q_s}^j$,

де $H_{Q_s}^l$ – множина усіх неперервних функцій l шарів, які зберігають хвости Q_s -зображення чисел.

Для вивчення властивостей сітки l шарів розглянемо додаткове твердження.

Лема 2.1. *Відношення $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots}^{Q_s} * \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \beta_{k+1} \beta_{k+2} \dots}^{Q_s} i$
 $\Delta_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots}^{Q_s} * \Delta_{\beta_{k+1} \beta_{k+2} \dots}^{Q_s}$ – рівносильні (символ $*$ $\in \{<, \leq, =, \neq, >, \geq\}$).*

Доведення. Нехай $a = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots}^{Q_s}$, $a_{k+1} = \Delta_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots}^{Q_s}$, $b = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \beta_{k+1} \beta_{k+2} \dots}^{Q_s}$, $b_{k+1} = \Delta_{\beta_{k+1} \beta_{k+2} \dots}^{Q_s}$. Тоді, згідно з означенням Q_s -зображення числа, a, b представимо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} a &= \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \left(\beta_{\alpha_2} + q_{\alpha_2} \left(\dots \beta_{\alpha_k} + q_{\alpha_k} (a_{k+1}) \right) \right), \\ b &= \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \left(\beta_{\alpha_2} + q_{\alpha_2} \left(\dots \beta_{\alpha_k} + q_{\alpha_k} (b_{k+1}) \right) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Використовуючи (7) і враховуючи властивості числових нерівностей, легко показати, що $a * b \Leftrightarrow a_{k+1} * b_{k+1}$.

Твердження 2.1 – 2.4 описують властивості сітки l шарів.

Твердження 2.1. *Координати будь-якого вузла сітки l шарів мають періодичне Q_s -зображення.*

Доведення. Достатньо показати, що абсциси вузлів мають періодичне Q_s -зображення, оскільки абсциса та ордината вузла сітки мають однаковий хвіст.

Лініями сітки l шарів є графіки функцій l шарів. Оберемо дві різні функції $f_1(x) = \delta_{a_1 a_2 \dots a_n} \left(\omega^k(x) \right)$ та $f_2(x) = \delta_{b_1 b_2 \dots b_m} \left(\omega^r(x) \right)$, $m \geq n$. Розглянемо два випадки: $m = n$ та $m > n$.

У першому випадку $m = n$, але $r \neq k$ (оскільки $f_1(x) \neq f_2(x)$). Згідно з лемою 2.1: $a_j = b_j$, а отже, рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ і $\omega^k(x) = \omega^r(x)$ – рівносильні. Розв'язками останнього рівняння будуть усі числа x , Q_s -зображення яких задовольняє рівності: $\alpha_{k+t+1}(x) = \alpha_{r+t+1}(x)$, $t \in N$, тобто розв'язки мають періодичне Q_s -зображення.

Аналогічно до першого, у другому випадку при $m > n$ рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ можна представити у вигляді:

$$\omega^k(x) = \delta_{b_{n+1} \dots b_m} \left(\omega^r(x) \right). \quad (8)$$

Покажемо, що розв'язки рівняння (8) мають періодичне Q_s -зображення. Нехай $k \geq r$, тоді $x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_r \alpha_{r+1} \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots}^{Q_s}$. Перетворимо обидві частини рівняння (8), використовуючи Q_s -зображення числа:

$$\Delta_{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots}^{Q_s} = \Delta_{b_{n+1} \dots b_m \alpha_{r+1} \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots}^{Q_s} \quad (9)$$

У результаті бачимо, що розв'язки рівняння (9) задовольняють наступним рівностям: $\alpha_{k+\tau} = b_{n+\tau}$, де $\tau = 1, 2, \dots, m-n$ та $\alpha_{k+m-n+t} = \alpha_{r+t}$ при $t \in N$, тобто розв'язки мають періодичне Q_s -зображення. Аналогічно проводяться міркування при $k < r$.

Твердження 2.2. *Через будь-який вузол сітки проходить зліченна кількість функцій типу (5).*

Доведення. Розглянемо координати деякого вузла A сітки:

$$A\left(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k (c_1 c_2 \dots c_n)}^{Q_s}; \Delta_{\beta_1 \dots \beta_m (c_1^* c_2^* \dots c_n^*)}^{Q_s}\right),$$

де $c_j^* = c_{[\varsigma(j-1)+1]}$, $\varsigma(t) = (\xi + t) \bmod n$, а ξ – це фіксоване натуральне значення для вузла A , яке використовується для опису зсуву цифр періоду.

Задамо початкові функції ϕ_j ($j = 0, \dots, n-1$):

$$\phi_0(x) = \delta_{\beta_1 \dots \beta_m} \left(\omega^{k+\varsigma(0)}(x) \right), \quad \phi_j(x) = \delta_{\beta_1 \dots \beta_m c_1^* \dots c_j^*} \left(\omega^{k+\varsigma(j)}(x) \right). \quad (10)$$

Введемо додаткове позначення:

$$/p_1 \dots p_h /^n = \underbrace{p_1 \dots p_h p_1 \dots p_h \dots p_1 \dots p_h}_{hn}. \quad (11)$$

За допомогою функції $\phi_0(x)$ задамо множину функцій:

$$\Psi_0 = \left\{ \psi_0(x, t, r) = \delta_{\beta_1 \dots \beta_m / c_1^* \dots c_n^* /^t} \left(\omega^{k+\varsigma(0)+nr}(x) \right) \middle| t, r \in Z_0 \right\}, \quad (12)$$

де $\psi_0(x, t=0, r=0) = \phi_0(x)$. Очевидно, що при різних значеннях параметрів t, r ми отримаємо різні функції.

Покажемо, що множина функцій типу (12) є зліченною. Як бачимо, кожна функція множини (12) залежить від двох невід'ємних цілих параметрів, які можна представити у вигляді цілих невід'ємних координат деякої точки площини. Добре відомо, що множина точок з

цілими невід'ємними координатами – є зліченною, а отже зліченною також є множина функцій Ψ_0 .

Аналогічно, до множини Ψ_0 ми можемо на основі $\phi_j(x)$ утворити зліченні множини Ψ_j :

$$\Psi_j = \left\{ \psi_j(x, t, r) = \delta_{\beta_1 \dots \beta_m / c_1^* \dots c_n^* / t c_1^* \dots c_j^*} \left(\omega^{k+\varsigma(j)+nr}(x) \right) \Big| t, r \in Z_0 \right\}, \quad (13)$$

де $\psi_j(x, t = 0, r = 0) = \phi_j(x)$, $j = 1, \dots, n - 1$.

Із форми запису функцій множин Ψ_j , $j = 0, 1, \dots, n - 1$, очевидно, що ці множини є попарно не перетинними. Нехай $\Psi = \bigcup_{j=0}^{n-1} \Psi_j$, тоді Ψ є зліченною множиною як об'єднання скінченної кількості злічених множин. Також вона містить усі можливі функції, які проходять через вузол A .

Зауваження 2.1. При доведенні властивості 2 ми встановили ще один факт: будь-яка точка площини $B(0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1)$, координати якої мають однаковий хвіст та періодичне Q_s -зображення, є вузлом сітки.

Твердження 2.3. Зі зростанням шарів кількість вузлів зростає, а відстань між сусідніми вершинами сітки зменшується.

Доведення. Очевидно, що будь-яка функція l шарів між двома сусідніми вузлами є функцією типу (5) рангу не більшого ніж l . Розглянемо довільну функцію $f(x) \in H^l$.

Оскільки функції $\omega^{l+1}(x)$ та $f(x)$ набувають значень з $[0; 1]$, при $x \in \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha_{l+1}}^{Q_s}$ для $\omega^{l+1}(x)$ та при $x \in [0; 1]$ для $f(x)$, то очевидно, що у кожному циліндрі існує хоча б одна вузлова точка $l + 1$ шару. Аналогічно $\omega^{l+2}(x)$ на кожному циліндрі $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l+1} \alpha_{l+2}}^{Q_s}$ має спільну точку з $f(x)$. Враховуючи те, що $|\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{l+1} \alpha_{l+2}}^{Q_s}| < |\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha_{l+1}}^{Q_s}|$, а функції $\omega^{l+1}(x)$ та $\omega^{l+2}(x)$ є функціями $l + 1$ та $l + 2$ шарів, то ми отримали, що для довільної функції l шарів кількість вузлових точок зі зростанням шару зростає і відстань між ними зменшується. Оскільки ми розглядали довільну функцію $f(x) \in H^l$, графік якої складається лише з ліній сітки l шарів, то цей результат можна застосувати до всієї сітки.

Твердження 2.4. Для будь-яких двох функцій $f(x)$ та $g(x)$ з множини $H_{Q_s}^l$ завжди існує відмінна від $f(x)$ та $g(x)$ функція $\tau(x)$ з

множини $H_{Q_s}^{l'}$, де $l' > l$ така, що: $|f(x) - g(x)| = |f(x) - \tau(x)| + |g(x) - \tau(x)|$.

Доведення. Позначимо x_1 та x_2 – абсциси відповідних точок перетину функцій $f(x)$, $g(x)$ з функцією $\omega^{l'}(x)$, де $l' > l$, на одному такому фіксованому циліндрі рангу l' , який міститься між двома найближчими спільними вузлами функцій $f(x)$ та $g(x)$, щоб $x_1 \neq x_2$. Існування таких точок випливає з доведення попередньої властивості та з способу побудови функцій $f(x)$ та $g(x)$.

Утворимо функцію $\tau(x)$:

- якщо $x_1 < x_2$, то $\tau(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x < x_1; \\ \omega^{l'}(x) & \text{при } x_1 \leq x < x_2; \\ g(x), & \text{при } x > x_2. \end{cases}$
- якщо $x_1 > x_2$, то $\tau(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x < x_2; \\ \omega^{l'}(x) & \text{при } x_2 \leq x < x_1; \\ f(x), & \text{при } x > x_1. \end{cases}$

Покажемо правильність рівності

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - \tau(x)| + |g(x) - \tau(x)|.$$

Розглянемо перший випадок, коли $x_1 < x_2$, тоді для $x < x_1$: $\tau(x) \equiv f(x)$, для $x > x_2$: $\tau(x) \equiv g(x)$ виконання рівності стає очевидним. Згідно з побудовою функції $\tau(x)$ графік функції $\omega^{l'}(x)$ на проміжку $[x_1; x_2]$ буде лежати між графіками $f(x)$ та $g(x)$, тобто $f(x) \leq \omega^{l'}(x) \leq g(x)$, що забезпечує виконання рівності. Аналогічно доводиться правильність твердження для другого випадку, коли $x_1 > x_2$.

3 Група перетворень, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа

Означення 3.1. Якщо існує границя

$$\nu_j(x) = \nu_j^{Q_s}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_j^{Q_s}(x, n),$$

то її значення називається частотою цифри j в Q_s -зображенні числа x , де $N_j^{Q_s}(x, n)$ – це кількість цифр j серед перших n цифр Q_s -зображення числа $[0; 1] \ni x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{Q_s}$.

Множину всіх чисел $x \in [0; 1]$, які мають частоти всіх цифр відповідного Q_s -зображення, позначатимемо через E . Добре відомо [2, 8], що міра Лебега цієї множини рівна 1.

Кажуть, що функція $y = f(x)$ зберігає частоти цифр Q_s -зображення числа, якщо для $\forall x \in E$ виконується система рівностей: $\nu_j(f(x)) = \nu_j(x)$, $j \in A_s$. У джерелах [9, 10] вивчалися розривні функції, які зберігають частоти та асимптотичне середнє значення цифр.

Теорема 3.1. *На множині $x \in [0; 1]$ множина H_{Q_s} – утворює некомутативну групу G_H відносно операції композиції ($f(g(x)) = g \circ f$).*

1. Множина H_{Q_s} – замкнена і визначена на множині $[0; 1]$. Оскільки функції множини H_{Q_s} у кожній конкретній точці будуються на основі функцій, які змінюють кількість цифр, але не змінюють їх частоту, то їх композиція також буде змінювати кількість цифр запису, але не змінюватиме частоту, а отже, $(g \circ f) \in H_{Q_s}$.
2. Операція \circ - асоціативна (для неперервних функцій завжди виконується асоціативність відносно їх композиції).
3. Існує одиничний(нейтральний) елемент $e(x) = x: e \circ f = f \circ e = f$.
4. Існує обернений елемент $f^{-1}(x)$ – функція симетрична до функції $f(x)$ відносно $e(x)$: $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e$.
5. Не виконується комутативність: $f \circ g \neq g \circ f$. Розглянемо дві функції з множини H_{Q_s} :

$$f(x) = \begin{cases} \delta_0(x) & \text{при } 0 \leq x < c = \Delta_{([s-1]0)}^{Q_s}, \\ \omega(x) & \text{при } c \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (14)$$

$$g(x) = \begin{cases} \omega^2(x) & \text{при } 0 \leq x < b = \Delta_{(00[s-1])}^{Q_s}, \\ \delta_{[s-1]}(x) & \text{при } b \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (15)$$

Розглянемо точку $x_0 = \Delta_{[s-1](0)}^{Q_s}$ та обчислимо значення функцій $f(g(x_0))$ та $g(f(x_0))$:

$$f(g(x_0)) = f\left(g\left(\Delta_{[s-1](0)}^{Q_s}\right)\right) = f\left(\Delta_{[s-1][s-1](0)}^{Q_s}\right) = \Delta_{[s-1](0)}^{Q_s},$$

$$g(f(x_0)) = g\left(f\left(\Delta_{[s-1](0)}^{Q_s}\right)\right) = g\left(\Delta_{0[s-1](0)}^{Q_s}\right) = \Delta_{[s-1]0[s-1](0)}^{Q_s}.$$

отже, $f(g(x_0)) \neq g(f(x_0)) \Rightarrow f(g(x)) \neq g(f(x))$, що і потрібно було довести.

Наслідок 3.1. *Будь-який елемент $f_j(x) \neq x$ з множини H_{Q_n} є твірним для нескінченної циклічної підгрупи групи G_H відносно операції композиції.*

Наслідок 3.2. *На множині $x \in [0; 1]$ множина F_{Q_s} функцій, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа x - утворює неабелеву групу G_F відносно операції композиції ($f(g(x)) = g \circ f$).*

Залишається відкритим питання: чи є група G_H скінченнопорядженою і яка потужність множини H_{Q_s} ?

4 Приклад функції, яка зберігає частоти, але не зберігає хвости зображення Q_s -іраціональних чисел

Розглянемо приклад неперервної функції, яка зберігає частоти цифр, але не зберігає хвости зображення Q_s -іраціональних чисел. Для цього послідовність допоміжних функцій v_m означимо рівністю:

$$v_m(x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m \dots}^{Q_s}) = \begin{cases} \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} 0 \alpha_m \alpha_{m+1} \dots}^{Q_s} & \text{при } \omega^{m-1}(x) \leq \Delta_{([s-1]0)}^{Q_s}; \\ \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m \alpha_{m+1} \dots}^{Q_s} & \text{при } \omega^{m-1}(x) > \Delta_{([s-1]0)}^{Q_s}. \end{cases} \quad (16)$$

Лема 4.1. *Функція v_m , означена рівністю (16), є неперервною функцією, що зберігає хвости Q_s -зображення чисел.*

Доведення. Представимо $v_m(x)$ у іншій формі:

$$v_m(x) = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}(0)}^{Q_s} + g(\omega^{m-1}(x)) \prod_{k=1}^{m-1} q_{\alpha_k}, \quad (17)$$

де

$$g(x) = \begin{cases} \delta_0(x) & \text{при } 0 \leq x \leq \Delta_{([s-1]0)}^{Q_s}; \\ \omega(x) & \text{при } \Delta_{([s-1]0)}^{Q_s} < x \leq 1. \end{cases} \quad (18)$$

Функція $g(x)$ є неперервним перетворенням $[0; 1]$, яке зберігає хвости Q_s -зображення числа.

Легко показати, що $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}(0)}^{Q_s} = x - \omega^{m-1}(x) \prod_{k=1}^{m-1} q_{\alpha_k}$, тоді функцію (17) можна представити у вигляді:

$$v_m(x) = x + \left(g(\omega^{m-1}(x)) - \omega^{m-1}(x) \right) \prod_{k=1}^{m-1} q_{\alpha_k}. \quad (19)$$

З (19) отримуємо, що $v_m(x)$ є неперервною функцією на кожному інтервалі виду: $\left(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}(0)}^{Q_s}; \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}(s-1)}^{Q_s} \right)$, оскільки функції $\omega^{m-1}(x)$ та $\prod_{k=1}^{m-1} q_{\alpha_k}$ є неперервними на кожному з вказаних інтервалів.

Для кожної точки виду $x_0 \equiv \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}(0)}^{Q_s}$ перевіримо неперервність, для цього достатньо, щоб були рівними права та ліва границі функції (19), що легко показати, враховуючи, що $\lim_{n \rightarrow x_{0+}} \omega^{m-1}(x) = 0$, а $\lim_{n \rightarrow x_{0-}} \omega^{m-1}(x) = 1$. Забігаючи наперед, зазначимо справедливості рівності $v_m(x_0) = x_0$, що дозволяє досить легко показати той факт, що функція (21) зберігає хвости зображення Q_s -раціональних чисел.

Виберемо строго зростаючу послідовність натуральних $m_j = j^2 + 1$ та побудуємо послідовність функцій (f_j) :

$$f_{j+1}(x) = v_{m_j}(f_j(x)), \quad f_0(x) = x. \quad (20)$$

Основну функцію f означимо рівністю:

$$f(x) \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \quad (21)$$

Теорема 4.1. *Функція f , означена рівністю (21), є неперервною функцією, яка зберігає частоти цифр, але не зберігає хвости зображення Q_s -іраціональних чисел.*

Доведення. Для того, щоб показати, що границя (21) існує і є неперервною функцією, побудуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \quad (22)$$

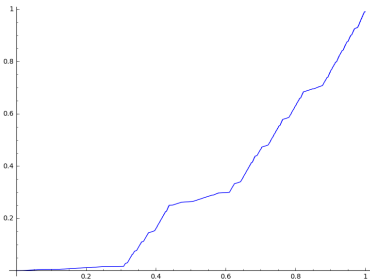


Рис 1. Графік функції, яка задається виразом (21).

та перетворимо його:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) &= \sum_{n=1}^{\infty} (v_{n^2+1}(f_n(x)) - f_n(x)) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + (g(\omega^{n^2}(f_n(x))) - \omega^{n^2}(f_n(x))) \prod_{k=1}^{n^2} q_{\alpha_k} - f_n(x)) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (g(\omega^{n^2}(f_n(x))) - \omega^{n^2}(f_n(x))) \prod_{k=1}^{n^2} q_{\alpha_k}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Оскільки $|g(\omega^{n^2}(f_n(x))) - \omega^{n^2}(f_n(x))| \leq 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f_{n+1}(x) - f_n(x))| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n^2} q_{\alpha_k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n^2} q = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}, \tag{24}$$

де $q = \max_{t \in A_s} q_t$.

Ми отримали, що ряд (22) є абсолютно збіжним. Добре відомо, що коли члени функціонального ряду за модулем не перевищують відповідних членів збіжного додатного числового ряду, то такий ряд рівномірно збіжний (ознака Вейерштрасса), тому ряд (22) – рівномірно збіжний, і оскільки всі члени ряду (22) є неперервними функціями, то його сума – неперервна функція. Легко показати, що

$$f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{k+1}(x) = f(x). \tag{25}$$

Покажемо, що функція (21) зберігає частоти. Нехай $\Psi(f(x), n)$ – функція, яка підраховує, скільки цифр було вставлено або вилучено серед перших n цифр запису числа x . При $m_j = j^2 + 1$ маємо:

$$\nu_i(f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} (N_i(x) - \Theta(x, n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} N_i(x) = \nu_i(x), \quad (26)$$

де $|\Theta(x, n)| \leq \Psi(f(x), n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \Psi(f(x), n) = 0$.

Для всіх Q_s -іраціональних чисел x очевидно, що значення $\omega^m(x)$, $m \in \mathbb{Z}$, також буде Q_s -іраціональним числом, а раз так, то воно буде міститись в інтервалі $(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m(0)}^{Q_s}; \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m(s-1)}^{Q_s})$. Згідно з побудовою функції (21), маємо, що на нескінченній кількості місць цифр запису числа x відбудуться зміни, а тому хвости не збережуться.

З доведення теореми 4.1 випливає справедливність твердження:

$$\left| f(x) - f_j(x) \right| \leq \sum_{n=j}^{\infty} \prod_{k=1}^{n^2} q_{\alpha_k} \leq \sum_{n=j}^{\infty} q^{n^2}, \quad (27)$$

де $q = \max_{\tau=0, s-1} q_{\tau}$, що, є оцінкою наближення $f(x)$ функцією $f_j(x)$.

На завершення статті автор висловлює вдячність М. В. Працьовитому за допомогу в написанні статті.

- [1] *Працьовитий Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2 -символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92-102.
- [2] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: Вид-но НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
- [3] *Працьовитий М. В.* Поліосновне \tilde{Q} -представлення і фрактальні математичні об'єкти з ним пов'язані // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – К.: ІМ НАН України – НПУ ім. Драгоманова. – 1998. – №2. – С. 14-35.
- [4] *Pratsiovytyi M.* Random variables determined by polybasic Q -representation digits distributions and their fractal properties // Voronoi Conference on Analytic Number Theory and Space Tilings: Abstract. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1998. – P. 48-50.
- [5] *Замрій І. В.* Сингулярність інверсора цифр Q_3 -зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості/ *Замрій І. В., Працьовитий М. В.* // Нелінійні коливання (ISSN 1562-3076)/ – **18**, 1. – Інститут математики НАН України. – 2015. – С. 55-70.

- [6] *Замрій І. В.* Неперервні функції, які зберігають цифру 1 в Q_3 -зображенні числа / *Працьовитий М. В., Замрій І. В.* // Буковинський математичний журнал – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2015. – 3, 3-4. – С. 142-159.
- [7] *Pratovytii M., Makarchuk O., Skrypnyc S.* Rational and algebraic Q_2 -representations of real numbers // *Siauliai Math. Sem.* – 2015. – Vol. **10(18)**. – P. 199-211.
- [8] *Працьовитий М. В., Феценко О. Ю.* Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і Q -представлення чисел // *Наук. записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки.* – 2003. – №4. – С. 260-269.
- [9] *Працьовитий М. В., Климчук С. О., Макарчук О. П.* Перетворення і функції, які зберігають середнє значення цифр трійкового зображення числа // *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1 : Фіз.-мат. науки.* – 2013. – № 15. – С. 87-99. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nchnpu_01_2013_15_9.
- [10] *Працьовитий М.В., Климчук С.О., Макарчук О.П.* Частота цифри у зображенні числа і його асимптотичне середнє значення цифр // *Укр. мат. журн.* – 2014. – No 3. – С. 302–310.