

## О внутренних резонансах колебаний жидкости в подвижных соосных резервуарах конической формы\*

*А. В. Солодун*

*Институт математики НАН Украины, Киев;  
solodun@imath.kiev.ua*

Employing the secondary (internal) resonance condition for steady-state sloshing in a conical tank that appears due to resonant excitation of the lowest natural frequency, the paper establishes a set of input geometric parameters (semi-apex angle of outer and inner conus) for which the secondary resonance phenomenon can lead to amplification of higher modes. A series of recommendation regarding the forthcoming development of nonlinear modal methods for the indicated tank shape are formulated.

Використовуючи умову виникнення внутрішніх резонансів для усталених рухів рідини у соосних конічних баках, що виникають при резонансному збуренні першої власної частоти, у роботі визначається набір геометричних вхідних параметрів (кут розчину зовнішнього та внутрішнього конуса), для яких за рахунок внутрішніх резонансів може збурюватись ряд вищих власних форм. Сформульовано рекомендації щодо подальшого розвитку нелінійних модальних методів для баків вказаної геометрії.

### Введение

В предыдущих работах автора [3, 9] развивались нелинейные асимптотические модальные методы, которые сводят задачу описания гидродинамического отклика жидкости в конических баках к построению и анализу малоразмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (модальных систем), относительно обобщённых координат, характеризующих возмущённое движение жидкости. Практическая важность такого рода исследований связывается, прежде

---

\*Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015.

всего, с задачей описания силового взаимодействия между жидкостью и мегалитровыми водонапорными башнями с коническими баками, которое происходит вследствие ветровых нагрузок или сейсмических воздействий. Прикладные инженерные аспекты этой проблемы, а также типичные геометрические и физические параметры можно найти в работах [7, 13].

Общая идеология нелинейных модальных методов, а также история их возникновения детально изложена в монографии [1]. Достаточно полный обзор этих методов можно также найти в недавних статьях [3, 5, 8, 9], где основное внимание уделено асимптотике третьего порядка Нариманова–Моисеева, которая получила наиболее широкое распространение при практической реализации нелинейных модальных методов.

Как проиллюстрировано в [5] на случае кругового вертикального срезанного конического бака, для осесимметричных сосудов такая асимптотика неизбежно приводит к нелинейным модальным системам, связывающим бесконечное число обобщённых координат второго и третьего порядка малости. Это увеличивает вероятность возникновения комбинаторных внутренних резонансов в системе, когда порождаемые квадратичными и кубическими нелинейными членами, возникают супергармоники, близкие к одной из собственных частот.

Феномену внутренних резонансов в задачах об установившихся резонансных колебаниях жидкости посвящена обширная литература. Детальный её обзор можно найти в главах 8 и 9 книги [10]. На возможность возникновения внутренних резонансов для сосудов кругового сечения, когда собственные формы колебания жидкости (в цилиндрической системе координат  $(r, z, \theta)$ ) можно представить в виде

$$\varphi_{m,n}(r, z, \theta) = f_{m,n}(r, z) \frac{\sin}{\cos} (m\theta), \quad (1)$$

было обращено внимание в работах [6, 14]. В этих работах, в частности, было установлено, что для вертикального кругового цилиндрического бака критическими безразмерными глубинами (отношениями глубина–радиус бака), когда возникают внутренние резонансы при резонансном возбуждении первой основной частоты, являются 0.831 (для двух собственных форм, отвечающих  $\varphi_{2,2}$ ), 0.279 (для  $\varphi_{3,2}$ ), 0.455 для ( $\varphi_{3,3}$ ) и 0.748 (для  $\varphi_{3,4}$ ), а также остальные вплоть до мод пятого порядка, но не рассматривался случай  $m = 0$ , тоже имеющий второй порядок малости. Как видно, это практически реа-

лизуемые глубины. Это означает, что при построении нелинейных модальных систем нельзя пренебрегать обобщёнными координатами, отвечающими собственным формам  $\varphi_{2,2}$ ,  $\varphi_{3,2}$ ,  $\varphi_{3,3}$  и  $\varphi_{3,4}$  при переходе от бесконечномерной модальной системы Нариманова–Моисеева к ее конечномерному приближению.

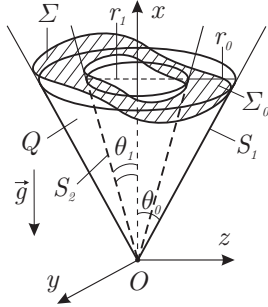
Более того, для глубин, близких к указанным значениям, результаты, полученные с помощью нелинейной асимптотической модальной системы типа Нариманова–Моисеева, должны быть подкреплены результатами экспериментов, поскольку сама асимптотика Нариманова–Моисеева предполагает, что гидродинамическая система не претерпевает внутренних резонансов.

Несмотря на то, что сам вопрос возникновения внутренних резонансов для конических баков поднимался в работе [8], ответ на вопрос, при каких значениях глубин заполнения и углов раствора такие резонансы возможны, был получен только в работе [4]. В данной работе предполагается ответить на аналогичный вопрос для соосной конической полости путем анализа соотношений между собственными частотами колебаний жидкости. Высокоточное определение таких частот стало возможным благодаря развитию численно-аналитических методов решения соответствующей спектральной краевой задачи [2].

В линейной теории колебаний можно пренебречь учётом вторичных резонансов, но в нелинейной этого сделать нельзя. Особенно вторичные резонансы могут “сыграть” при “круговых” движениях внутреннего объёма жидкости, так как внутренние резонансы лежат в непосредственной близости от основных (могут даже сливаться), и там идёт более интенсивный обмен энергиями по высшим гармоникам и возникают ситуации, когда вторичные гармоники вносят сопоставимый с основными вклад.

Базируясь на результатах анализа, будут указаны критические значения объемов соосного конического бака для трёх типичных углов раствора внешнего конуса и, используя эту информацию, будут указаны, какие именно обобщенные координаты, в дополнении к семи из работы [3, 9], должны быть обязательно использованы для учёта влияния вторичных резонансов, а также укажем минимальный размер модальных систем для соосной полости, аналогичный работе [5].

### 1 Постановка задачи



**Рис. 1.** Колебания жидкости в вертикальных круговых соосных конических баках. Подвижная жидкость занимает объем  $Q$ , изображенный на рисунке. Смачиваемые боковые стенки сосуда  $S$  ( $S = S_1 \cup S_2$ ) обозначены через  $S_1$  (внешняя) и через  $S_2$  (внутренняя), а невозмущённая (гидростатическая) свободная поверхность жидкости – через  $\Sigma_0$ . Начало Декартовой системы координат  $Oxyz$  размещено в условной вершине конуса  $O$ , причём ось  $Ox$  направлена вертикально вверх.

В качестве характерного линейного размера выбран радиус  $r_0$  внешнего конуса. Соотношение между внутренним и внешним полууглами соосного конуса ( $\theta_1/\theta_0$ ) становится геометрической характеристикой объемного заполнения бака. В частности, предел  $\theta_1/\theta_0 \rightarrow 0$  влечёт  $V_{cc} \rightarrow V_c$ . С другой стороны, при фиксированном  $r_0$  объем бака  $V$  стремится к нулю, если  $\theta_1/\theta_0 \rightarrow 1$ .

Собственные формы колебаний жидкости являются собственными функциями спектральной краевой задачи с параметром в краевом условии (см., например, [1])

$$\Delta\varphi = 0, \quad \vec{r} \in Q_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0, \quad \vec{r} \in S_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \varkappa\varphi, \quad \vec{r} \in \Sigma_0, \quad \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} dS = 0. \tag{2}$$

Данная задача имеет решение вида (1), причём  $\varkappa$ , именуемый частотным параметром, связан с собственной частотой соотношением

$$\varkappa_{m,n} = \sigma_{m,n}^2/g. \tag{3}$$

Целые индексы  $m > 0$  связываются с угловым волновым числом, а возрастающий целый индекс  $n > 1$  упорядочивает стоячие вол-

Рассмотрим безвихревые волновые движения идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей покоящийся абсолютно жёсткий бак, образованный двумя соосными коническими полостями с общей вершиной, как показано на рис. 1. Здесь через угол  $\theta_0$  обозначен угол полураствора внешнего конуса, а через  $\theta_1$  – внутреннего. Вектор ускорения сил гравитации  $\vec{g}$  направлен вниз вдоль оси конуса. Подвижная жидкость занимает объем  $Q$ , изображенный на рисунке. Смачиваемые боковые стенки сосуда  $S$  ( $S = S_1 \cup S_2$ ) обозначены через  $S_1$  (внешняя) и через

ны, соответствующие (1), в порядке уменьшения длины волны в радиальном направлении. За исключением осесимметричных собственных форм ( $m = 0$ ), каждой собственной частоте системы  $\sigma_{m,n}$  соответствуют две собственные формы, а полученные нелинейные модальные уравнения допускают ряд упрощений, связанных с тригонометрической угловой компонентой в представлении собственных форм (1).

Асимптотика третьего порядка Нариманова–Моисеева предполагает, что основной, доминантный вклад в динамику жидкости вносят лишь две первые собственные формы колебания жидкости  $\varphi_{1,1} \sin \theta$  и  $\varphi_{1,1} \cos \theta$ , обладающие одной и той же минимальной собственной частотой  $\sigma_{1,1}$ . Принимают, что эти моды имеют первый порядок малости. Обусловленные тригонометрической угловой компонентой в (1) члены второго порядка малости по отношению к доминантным формам связываются с собственными формами  $\varphi_{0,n}$ ,  $\varphi_{2,n} \sin 2\theta$ ,  $\varphi_{2,n} \cos 2\theta$ ,  $n \geq 1$ . Аналогично, собственные формы  $\varphi_{1,n} \sin \theta$  и  $\varphi_{1,n} \cos \theta$ ,  $n \geq 2$  и  $\varphi_{3,n} \sin 3\theta$  и  $\varphi_{3,n} \cos 3\theta$ ,  $n \geq 1$  характеризуются третьим, высшим для данной асимптотики порядком малости.

Асимптотика Нариманова–Моисеева пренебрегает вкладом собственных форм, которые имеют асимптотический порядок больший трех. Последнее означает, что вклад собственных форм  $\varphi_{m,n} \sin m\theta$  и  $\varphi_{m,n} \cos m\theta$ ,  $m \geq 4$  не учитывается.

Асимптотика Нариманова–Моисеева обязательно требует учёта бесконечного числа собственных форм колебаний. Однако полная нелинейная модальная система, описывающая колебания жидкости в осесимметричных баках, базирующаяся на асимптотике Нариманова–Моисеева и вовлекающая бесконечное число обобщённых координат, соответствующих собственным формам второго и третьего порядка малости, построена лишь недавно и только для вертикального цилиндрического бака [12] сферического [11] и срезанного конического бака [9]. Подобные полные модальные системы отсутствуют для других баков осесимметричной формы.

Базовой задачей, которая исследуется с помощью нелинейных модальных систем, является задача описания установившихся (периодических) режимов движения жидкости в том случае, когда колебания бака совершаются по синусоидальному закону с частотой  $\omega$ , близкой к  $\sigma_{1,1}$ . Для осесимметричных баков простой гармонический анализ резонансных решений показывает, что первые две собственные формы характеризуются доминантным вкладом первой тригоно-

метрической компоненты разложения Фурье периодических (установившихся) решений. Доминантными компонентами для форм второго и третьего порядка будут соответственно  $\cos 2\omega t$ ,  $\sin 2\omega t$  и  $\cos 3\omega t$ ,  $\sin 3\omega t$ . Если  $2\omega$  окажется равной одной из собственных частот, соответствующих формам второго порядка малости, т. е. частотам  $\sigma_{2,i}$  или  $\sigma_{0,i}$ ,  $i \geq 1$ , то может возникнуть так называемый внутренний (вторичный) резонанс второго порядка. Аналогично, внутренний резонанс третьего порядка может возникнуть в случае, когда  $3\omega$  совпадает с одной из собственных частот  $\sigma_{3,i}$ ,  $i \geq 1$  или  $\sigma_{1,i}$ ,  $i \geq 2$ .

Когда частота возбуждения  $\omega$  близка к первой собственной частоте колебаний жидкости  $\sigma_{1,1}$ , тогда имеем  $\omega \sim \sigma_{1,1}$ . Необходимыми условиями внутреннего резонанса второго порядка являются следующие условия:

$$2\omega = \sigma_{0,n}, \quad n \geq 1, \quad (4)$$

$$2\omega = \sigma_{2,n}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Аналогично, для собственных форм третьего порядка  $\varphi_{3,n}$ ,  $n \geq 1$  и  $\varphi_{1,n}$ ,  $n \geq 2$ , возникновение внутренних резонансов связывается с соотношениями

$$3\omega = \sigma_{3,n}, \quad n \geq 1, \quad (6)$$

$$3\omega = \sigma_{1,n}, \quad n \geq 2. \quad (7)$$

Предметом наших исследований будет поиск набора входных параметров, углов полураствора внешней  $\theta_0$  и внутренней  $\theta_1$  конической полости, для которых выполнено одно из соотношений частот (4)-(7) при условии  $\omega \approx \sigma_{1,1}$ .

## 2 Численные результаты

Нас интересуют такие объемы жидкости и углы полураствора  $\theta_0, \theta_1$  соосной конической полости, для которых реализуются такие соотношения частот (4)-(7). Для этого построим функции  $i_{m,n}(\theta_0, \theta_1)$ , зависящие от этих двух параметров, и исследуем их на удовлетворения соответствующих условий ( $i_{m,n} = 1$ ). Ограничимся здесь четырьмя такими функциями  $i_{0,n}$ ,  $i_{2,n}$ ,  $i_{3,n}$  и  $i_{1,n}$

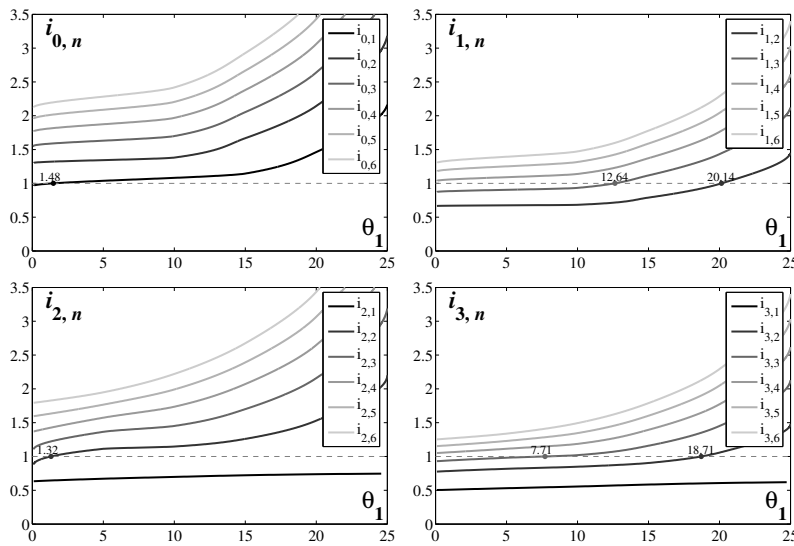
$$i_{0,n}(\theta_0, \theta_1) = \frac{\sigma_{0,n}}{2\sigma_{1,1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varkappa_{0,n}}{\varkappa_{1,1}}}, \quad n \geq 1, \quad (8)$$

$$i_{2,n}(\theta_0, \theta_1) = \frac{\sigma_{2,n}}{2\sigma_{1,1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varkappa_{2,n}}{\varkappa_{1,1}}}, \quad n \geq 1, \quad (9)$$

$$i_{3,n}(\theta_0, \theta_1) = \frac{\sigma_{3,n}}{3\sigma_{1,1}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\varkappa_{3,n}}{\varkappa_{1,1}}}, \quad n \geq 1, \quad (10)$$

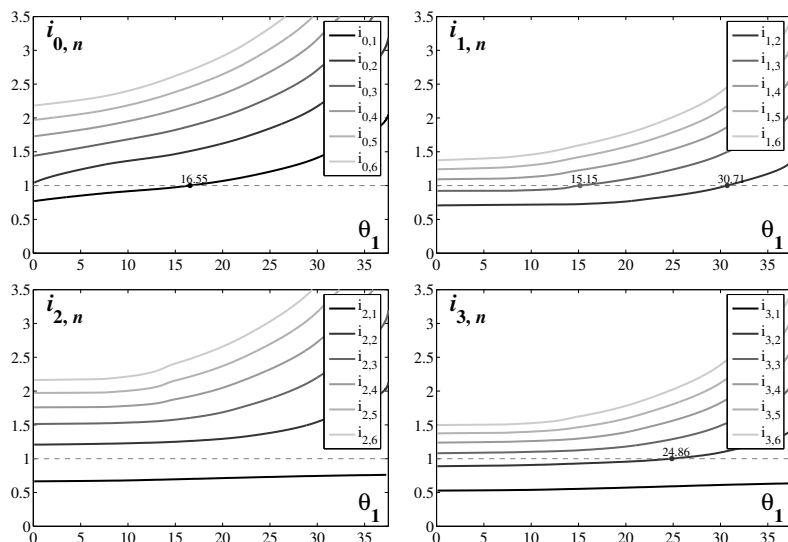
$$i_{1,n}(\theta_0, \theta_1) = \frac{\sigma_{1,n}}{3\sigma_{1,1}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\varkappa_{1,n}}{\varkappa_{1,1}}}, \quad n \geq 2. \quad (11)$$

Эти функции не содержат частоты возбуждения  $\omega$ . Однако легко видеть, что близость значения одной из этих функций к единице, т. е. условие  $i_{m,n}(\theta_0, \theta_1) \approx 1$ , эквивалентно выполнению условия внутреннего резонанса по собственным формам, соответствующим индексам  $(m, n)$ .



**Рис 2.** Графики зависимостей  $i_{m,n}$  для обратного соосного конического резервуара с внешним полууглом  $\theta_0 = 30^\circ$ .

На рис. 2–4 приведены зависимости  $i_{0,n}$ ,  $i_{1,n}$ ,  $i_{2,n}$  и  $i_{3,n}$  от внутреннего полуугла  $\theta_1$  при фиксированном радиусе внешнего конуса  $r_0 = 1$  (случай  $\theta_1 = 0$  соответствует случаю обычного неусеченного конуса, а  $\theta_1 \rightarrow \theta_0$  отвечает нулевому объему) для трех фиксированных углов полураствора внешнего конуса  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$  и  $\theta_0 = 60^\circ$ . Значе-

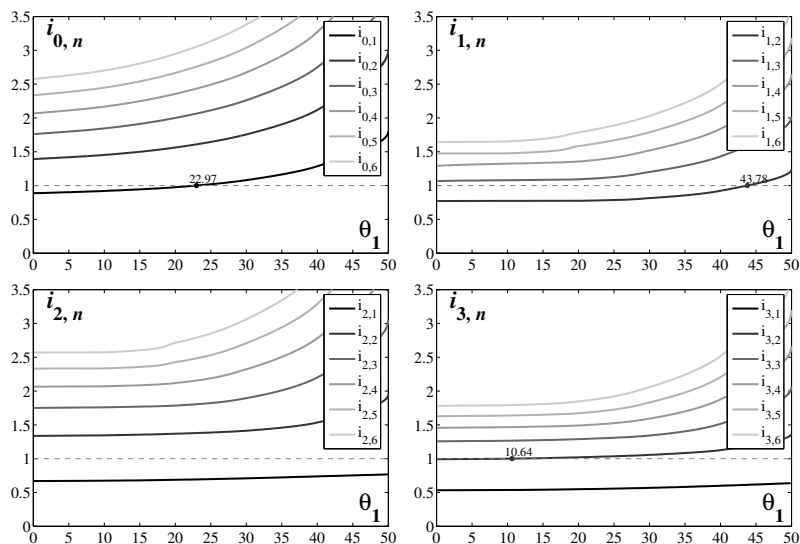


**Рис 3.** Графики зависимостей  $i_{m,n}$  для обратного соосного конического резервуара с внешним полууглом  $\theta_0 = 45^\circ$ .

ния  $i_{m,n}$  отложены вдоль вертикальной оси, а значения внутреннего полуугла  $\theta_1$  – вдоль горизонтальной оси.

Как видно из приведённых рисунков, нестрогое равенство в необходимых условиях внутреннего резонанса выполняется для всех рассматриваемых углов полураствора. Так, для угла полураствора  $\theta_0 = 30^\circ$  (рис. 2), анализируя внутренние резонансы второго порядка, необходимо выделить обязательный учёт собственных форм (0, 1) и (2, 2) для немалых объемов, а для малых объемов важными становятся формы (1, 2) и (3, 2). При этом строгое равенство  $i_{0,1} = 1$  при  $\theta_1 = 1.48^\circ$  означает, что первая осесимметричная форма претерпевает вторичный резонанс вместе с основным резонансом, а равенство  $i_{2,2} = 1$  при  $\theta_1 = 1.32^\circ$  означает, что вторая форма также претерпевает вторичный резонанс вместе с основным резонансом. Что касается внутренних резонансов третьего порядка, то здесь ситуация еще более сложная. Несомненно, немалый вклад в гидродинамический отклик будут вносить формы (3, 2) и (3, 3), причем для  $\theta_1 = 18,71^\circ$  и  $\theta_1 = 7,71^\circ$  собственные формы (3, 2) и (3, 3) соответственно должны характеризоваться резонансным поведением совместно с основным ре-





**Рис 4.** Графики зависимостей  $i_{m,n}$  для обратного соосного конического резервуара с внешним полууглом  $\theta_0 = 60^\circ$ .

зонансом.

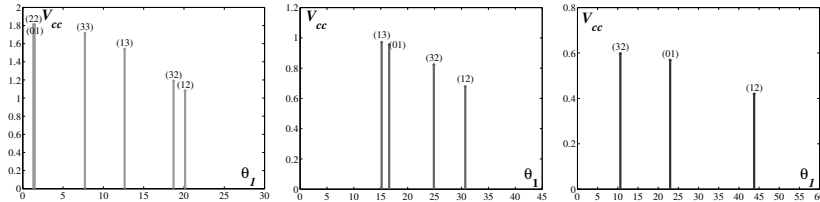
Аналогичный вывод можно сделать для собственной формы (1, 2) при  $\theta_1 = 20.14^\circ$ , а также для собственной формы (1, 3) при  $\theta_1 = 12.64^\circ$ . В целом, для данного угла полураствора можно сделать вывод о том, что асимптотика Нариманова–Моисеева применима для  $2^\circ \lesssim \theta_1 \lesssim 18^\circ$  (за резким исключением внутренних резонансов третьего порядка). Однако ряд высших форм второго и третьего порядка, в частности, (0, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (1, 2) и (1, 3), обязательно должны быть включены в выводимые модальные системы для такой геометрии соосных конических полостей.

Качественно ситуация не претерпевает существенных изменений для угла полураствора  $\theta_0 = 45^\circ$  (рис. 3). Для этого угла полураствора внутренний резонанс имеет место при  $\theta_1 = 16.55^\circ$  (мода (0, 1)),  $\theta_1 = 30.71^\circ$  (мода (1, 2)),  $\theta_1 = 15.15^\circ$  (мода (1, 3)) и  $\theta_1 = 24.86^\circ$  (мода (3, 2)). Для соосных баков  $\theta_1 \lesssim 15^\circ$  сохраняются выводы, сформулированные для угла полураствора  $\theta_0 = 30^\circ$ .

В то же время для угла полураствора  $\theta_0 = 60^\circ$  рис. 4 демонстрирует три значения параметра  $\theta_1$ , для которых можно ожидать внутрен-

ний резонанс одновременно с основным. Эти значения  $\theta_1 = 22.97^\circ$  (внутренний резонанс второго порядка, собственная форма  $(0, 1)$ ),  $\theta_1 = 43.78^\circ$  (внутренний резонанс третьего порядка, собственная форма  $(1, 2)$ ) и  $\theta_1 = 10.64^\circ$  (внутренний резонанс третьего порядка, мода с индексом  $(3, 2)$ ). В целом, для данного угла полураствора можно сделать вывод о том, что асимптотика Нариманова–Моисеева применима для  $0^\circ \lesssim \theta_1 \lesssim 43^\circ$  (за резким исключением (двух) внутренних резонансов второго и третьего порядка).

Приведем здесь рисунки с собирательной информацией по всем внутренним для исследуемых соосных полостей. Как видно из рис. 5,



**Рис 5.** Объемный спектр высших резонансов для обратного соосного конического резервуара относительно внешнего полуугла  $\theta_0$  при фиксированном радиусе внешнего конуса, равном единице.

при уменьшении величины внешнего полуугла  $\theta_0$  внутренних резонансов высших порядков становится больше и они сгущаются. Это обозначает, что при выводе модальных систем Нариманова–Моисеева необходимо учитывать все больше высших форм.

$\theta_0 = \pi/3$	$+\{(12), (32)\}$
$\theta_0 = \pi/4$	$+\{(12), (13), (32)\}$
$\theta_0 = \pi/6$	$+\{(12), (13), (22), (32), (33)\}$

**Таблица 1.** Необходимые добавки к базисному модальному спектру  $\{(01), (11), (21), (31)\}$  относительно внешнего полуугла  $\theta_0$  при фиксированном радиусе внешнего конуса, равном единице.

В таблице 1 представлены добавки к базисному модальному спектру  $\{(01), (11), (21), (31)\}$  относительно внешнего полуугла  $\theta_0$  при фиксировании радиуса внешнего конуса, равном единице. Анализируя данную таблицу, можно видеть, что разные углы внешнего конуса требуют разного количества гармоник. Причем к базисному модаль-

ному спектру, использованному автором для исследования колебаний жидкости в срезанном коническом баке [9], необходимо добавлять ряд высших гармоник, и с уменьшением угла внешнего конуса количество высших гармоник растёт.

## Выводы

Численно проанализированы соотношения между собственными частотами колебания жидкости в соосном коническом баке, которые выражают условие возникновения внутренних резонансов второго и третьего порядка в рамках асимптотики Нариманова–Моисеева. На основе такого численного анализа для углов полураствора внешнего конуса  $\theta_0 = 30^\circ, 45^\circ$  и  $60^\circ$  были определены соотношения между углами полураствора внешнего и внутреннего конического бака, для которых, в связи с внутренними резонансами, ряд высших обобщённых координат второго и третьего порядков может давать значительный вклад в гидродинамический отклик. Число таких критических значений растёт с уменьшением внешнего угла полураствора. Для всех исследуемых углов полураствора отмечается важность собственных форм с индексами  $(0, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (1, 2), (1, 3)$ , которые обязательно должны быть учтены при построении приближённых нелинейных модальных систем типа Нариманова–Моисеева.

С другой стороны, рассмотрев задачу о внутренних резонансах в соосных конических баках, можно сделать (готовы) выводы о задаче минимального набора нелинейной модальной системы для резонансных движений жидкости, которые нужно удерживать в бесконечных нелинейных модальных системах типа [5].

Это свидетельствует о том, что модальная теория ещё не исчерпала своих возможностей, но требует некоторой доработки и уточнения с тем, чтобы в полной мере и во всех диапазонах описывать нелинейные волновые движения жидкости в соосных конических полостях.

- [1] *Луковский И. А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. – Киев: Наук. думка, – 2010, – 408 с.
- [2] *Луковский И. А., Солодун А. В.* Вариационный метод исследования спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости в соосных конических резервуарах// Прикладна гідромеханіка. – 2013. **10**, 3. – С. 88–112.

- [3] *Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н.* Нелинейная асимптотическая модальная теория резонансных колебаний жидкости в срезуемых конических баках // Акустический вестник. – 2011. – **14**, 4. – С. 128–134.
- [4] *Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н.* О внутренних резонансах колебания жидкости в конических баках// Прикладна гідромеханіка. – 2013. **15**, 2. – С. 46–52.
- [5] *Солодун А. В.* Нелинейные модальные модели третьего порядка малости, описывающие колебание жидкости в усеченных конических резервуарах // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, 4. – С. 280–307.
- [6] *Brayant P. J.* Nonlinear progressive free waves in a circular basin// J . Fluid Mech.. – 1989. – **205**. – P. 453-467.
- [7] *El Damatty A. A., Saafan M. S., Sweedan A. M. I.* Experimental study conducted on a liquid-filled combined conical tank model // Thin-Walled Structures. – 2005. – **43**. – P. 1398–1417.
- [8] *Gavrilyuk I., Lukovsky I., Timokha A.* Linear and nonlinear sloshing in a circular conical tank// Jour. Fluid Dynamic Research. – 2005, **35**. – P. 399–429.
- [9] *Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A.* Weakly nonlinear sloshing in a truncated circular conical tank// Fluid Dyn. Res. – 2013. **45**. 055512. – P. 1–30.
- [10] *Faltinsen O. M., Timokha A. N.* Sloshing Cambridge. Cambridge University Press. – 2009. – 608 p.
- [11] *Faltinsen O. M., Timokha A. N.* Multimodal analysis of weakly nonlinear sloshing in a spherical tank // – 2013. – **719**. – P. 129–164.
- [12] *Lukovsky I. A., Ovchinnikov D. V., Timokha A. N.* Asymptotic nonlinear multimodal method for liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank. Part 1: Modal equations // Nonlinear Oscillations. – 2012. – **14**, 4. – P. 512–525.
- [13] *Moslemi M., Kianoush M. R., Pogorzelski W.* Seismic response of liquid-filled elevated tanks // Engineering Structures. – 2011. – **33**. – P. 2074–2084.
- [14] *Takahara H., Kimura K.* Frequency response of sloshing in an annular cylindrical tank subjected to pitching excitation // Journal of Sound and Vibration. – 2012. – **331**. – P. 3199–3212.