Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 47–68

УДК 517.983.27

# Апроксимації типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних

***Г. М. Веселовська***

*Інститут математики НАН України, Київ; anaweseka@gmail.com*

Two–dimensional Padé type approximants are constructed and studied for some special power series using method of generalized moment representations.

С помощью метода обобщенных моментных изображений построены и изучены двумерные аппроксимант типа Паде для некоторых специальных степенных рядов

У статтях [3], [4], [5], [6], [10] на основі поширення методу узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика [2], [7] на випадок двовимірних числових послідовностей побудовано апроксиманти типу Паде для низки спеціальних рядів двох змінних. В основі вказаних досліджень лежить наступний результат.

**Теорема 1.** *( [3]) Нехай для коефіцієнтів формального степеневого ряду двох змінних вигляду*

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m \tag{1}$$

*має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ за білінійною формою $\langle .,. \rangle$*

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k,j,m,n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

*Тоді, якщо при деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ існує узагальнений поліном*

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} x_{k,m} \tag{3}$$

*з відмінним від нуля старшим коефіцієнтом $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)}$, для якого виконуються умови біортогональності*

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n} \rangle = 0 \tag{4}$$

*при $(j + N_1, n + N_2) \in \mathbb{Z}_+ \cap D_\Phi$, де $D_\Phi = \{(u,t) \in \mathbb{R}_+^2 : \Phi(u,t) \le 0\}$, а функція $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ має такі властивості:*

1. *$D_\Phi$ — обмежена множина в $\mathbb{R}_+^2$;*
2. *потужність множини $D_\Phi \cap \{(u,t) \in \mathbb{Z}_+^2 : u \ge N_1, t \ge N_2\}$ дорівнює $(N_1+1)(N_2+1) - 1$;*
3. *рівняння $\Phi(u,t) = 0$ можна однозначно розв'язати відносно $t$ при $u \le N_1$ та відносно $u$ при $t \le N_2$. При цьому для відповідних розв'язків $t = \varphi(u)$ та $u = \psi(t)$ мають місце нерівності $\varphi(u) \ge N_2 \quad \forall\, u \le N_1$ та $\psi(t) \ge N_1 \quad \forall\, t \le N_2$,*

*то раціональна функція*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}, \tag{5}$$

*де*

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1-k,N_2-m}^{(N_1,N_2)} z^k w^m, \tag{6}$$

*а*

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{N}}(z,w) = {} & \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} + \\ & + z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{[\psi(m)]-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} + \\ & + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{[\varphi(k)]-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n} \end{aligned} \tag{7}$$

*де* $[\rho]$ — *ціла частина від числа* $\rho$, *матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (1) для* $\forall (k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 \cap D_\Phi$.

Нагадаємо, що для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку деяких лінійних просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ за білінійною формою $\langle .,. \rangle$, якщо у просторі $\mathcal{X}$ вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ , а у просторі $\mathcal{Y}$ — двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k,j,m,n \in \mathbb{Z}_+. \tag{8}$$

Як відомо (див. [3]), двовимірні узагальнені моментні зображення можуть бути записані у операторному вигляді. А саме, у випадку коли простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — нормовані і у просторі $\mathcal{X}$ існують обмежені лінійні оператори $A_1, A_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, які комутують між собою, і такі, що:

$$A_1 x_{k,m} = x_{k+1,m},$$

$$A_2 x_{k,m} = x_{k,m+1},$$

для всіх $k, m \in \mathbb{Z}_+$, а у просторі $\mathcal{Y}$ існують лінійні обмежені оператори $A_1^*, A_2^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ такі, що

$$\langle A_1 x, y \rangle = \langle x, A_1^* y \rangle,$$

$$\langle A_2 x, y \rangle = \langle x, A_2^* y \rangle,$$

для $\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}$, то зображення (8) можна подати в операторному вигляді:

$$s_{k,m} = \langle A_1^k A_2^m x_{0,0}, y_{0,0} \rangle, k,m \in \mathbb{Z}_+. \tag{9}$$

Поставимо у відповідність двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ формальний степеневий ряд від двох змінних:

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m. \tag{10}$$

Зображення коефіцієнтів $s_{k,m}$ у вигляді (9) дає змогу модифікувати подання функції (10):

$$f(z,w) = \langle \mathcal{R}_z(A_1) \mathcal{R}_w(A_2) x_{0,0}, y_{0,0} \rangle, \tag{11}$$

де резольвентна функція $\mathcal{R}_w$ оператора $A$ визначається рівністю $\mathcal{R}_w(A) = (I - wA)^{-1}$.

Нехай $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — нормовані простори. І нехай простори $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, білінійна форма $< .,. >$ на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, елементи $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{X}$ та $\widetilde{y}_0 \in \mathcal{Y}$ є такими, що системи елементів $\{\widetilde{x}_k = A^k \widetilde{x}_0\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{\widetilde{y}_j = A^{*j} \widetilde{x}_0\}_{j=0}^{\infty}$ є лінійно незалежними в просторах $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ відповідно і допускають невироджену біортогоналізацію відносно форми $< .,. >$, так що існують системи елементів $\{\widetilde{X}_N\}_{N=0}^{\infty}$ та $\{\widetilde{Y}_M\}_{M=0}^{\infty}$, для яких виконуються наступні умови

$$\widetilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \widetilde{c}_k^{(N)} \widetilde{x}_k, \quad \widetilde{c}_k^{(N)} \neq 0, N = \overline{0, \infty},$$

$$\widetilde{Y}_M = \sum_{j=0}^{M} \widetilde{c}_j^{(M)} \widetilde{y}_j, \quad \widetilde{c}_j^{(N)} \neq 0, M = \overline{0, \infty},$$

$$\langle \widetilde{X}_N, \widetilde{Y}_M \rangle = \delta_{N,M}, \quad N, M = \overline{0, \infty},$$

Розглянемо в просторі $\mathcal{X}$ лінійні оператори

$$A_1 = A, \quad A_2 = A^2 + \alpha A, \tag{12}$$

де $\alpha$ – деяке дійсне число, а $A$ – обмежений оператор.

І нехай двовимірна числова послідовність $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k, m, j, n \in \mathbb{Z}_+,$$

де

$$x_{k,m} = A_1^k A_2^m \widetilde{x}_0, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+,$$
$$y_{j,n} = A_1^{*j} A_2^{*n} \widetilde{y}_0, \quad j, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Для того, щоб отримати для вище означених операторів представлення функцій у вигляду (11), використаємо наступні леми.

**Лема 1.** *Нехай $\mathcal{X}$ – лінійний нормований простір, $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ – обмежений лінійний оператор. Тоді в усіх точках регулярності резольвентних функцій $\mathcal{R}_z(A)$ та $\mathcal{R}_w(A^2 + \alpha A)$ справджується рівність*

$$\mathcal{R}_z(A)\mathcal{R}_w(A^2 + \alpha A) =$$
$$= \frac{1}{\alpha z w - z^2 + w} \left( -z^2 \mathcal{R}_z(A) + w(\alpha z + zA + 1)\mathcal{R}_w(A^2 + \alpha A) \right). \tag{13}$$

*Доведення.* Якщо до обох частин (13) застосувати оператор

$$\left(\alpha zw - z^2 + w\right)(I - zA)\left(I - w(A^2 + \alpha A)\right),$$

то отримаємо

$$\alpha zw - z^2 + w = -z^2\left(I - w(A^2 + \alpha A)\right) + w(\alpha z + zA + 1)(I - zA) =$$

$$= \alpha zw - z^2 + w.$$

Оскільки отримана рівність є очевидною, а $z$ та $w$ є регулярними точками відповідних резольвентних функцій, то і початкова рівність має місце. □

**Лема 2.** *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді у всіх точках регулярності резольвентної функції* $\mathcal{R}_w(A^2 + \alpha A)$ *справджується рівність*

$$\mathcal{R}_w(A^2 + \alpha A) =$$

$$= -\frac{2}{w\sqrt{\alpha^2 + 4/w}}\left(\frac{\mathcal{R}_{\alpha_1}(A)}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4/w}} + \frac{\mathcal{R}_{\alpha_2}(A)}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4/w}}\right), \tag{14}$$

*де* $\alpha_{1,2} = \frac{2}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4/w}}$.

Використовуючи леми 1 та 2 і співвідношення (11),

$$f(z, w) = \frac{1}{\alpha zw - z^2 + w}\left(-z^2\langle\mathcal{R}_z(A)x_{0,0}, y_{0,0}\rangle + \right.$$

$$+\frac{2(\alpha z + 1)}{\sqrt{\alpha^2 + 4/w}}\left(\frac{\langle\mathcal{R}_{\alpha_1}(A)x_{0,0}, y_{0,0}\rangle}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4/w}} + \frac{\langle\mathcal{R}_{\alpha_2}(A)x_{0,0}, y_{0,0}\rangle}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4/w}}\right) + \tag{15}$$

$$\left. + \frac{2z}{\sqrt{\alpha^2 + 4/w}}\left(\frac{\langle A \cdot \mathcal{R}_{\alpha_1}(A)x_{0,0}, y_{0,0}\rangle}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4/w}} + \frac{\langle A \cdot \mathcal{R}_{\alpha_2}(A)x_{0,0}, y_{0,0}\rangle}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4/w}}\right)\right).$$

Визначимо співвідношення для елементів $x_{k,m}$ при вказаному виборі операторів $A_1$ та $A_2$.

$$x_{k,m} = {A_1}^k {A_2}^m x_{0,0} = A^k (A^2 + \alpha A)^m x_{0,0} =$$

$$= A^k \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (A^2)^{m-l} (\alpha A)^l x_{0,0} = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \alpha^l A^{2m+k-l} x_{0,0}. \tag{16}$$

Аналогічне представлення буде справедливе для елементів $y_{j,n}$.

Згідно з теоремою 1 для побудови апроксимант типу Паде функції $f$, зображуваної рядом

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m,$$

потрібно побудувати біортогональні поліноми

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{N_1,N_2} x_{k,m},$$

такі що

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n} \rangle = 0$$

для $(j,n) \in ([0,N_1] \times [0,N_2]) \setminus \{(N_1,N_2)\}$.

Легко бачити, що з точністю до постійного множника

$$X_{N_1,N_2} = \widetilde{X}_{N_1+2N_2}.$$

З цієї рівності коефіцієнти полінома $X_{N_1,N_2}$ можуть бути знайдені неоднозначно.

Для визначеності будемо, наприклад, покладати

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = 0, \quad \text{при } (k,m) \in [0, N_1-2] \times [1, N_2].$$

Тоді отримаємо

$$\sum_{k=0}^{N_1-2} c_{k,0}^{(N_1,N_2)} A^k + A^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1-1,m}^{(N_1,N_2)} (A^2 + \alpha A)^m +$$

$$+A^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} (A^2 + \alpha A)^m = \sum_{r=0}^{N_1+2N_2} \widetilde{c}_r^{(N_1+2N_2)} A^r.$$

Звідси,

$$c_{k,0}^{(N_1,N_2)} = \widetilde{c}_r^{(N_1+2N_2)} \quad \text{при } k = \overline{0, N_1-1}.$$

І далі маємо

$$\sum_{m=1}^{N_2} c_{N_1-1,m}^{(N_1,N_2)} (A^2 + \alpha A)^m +$$

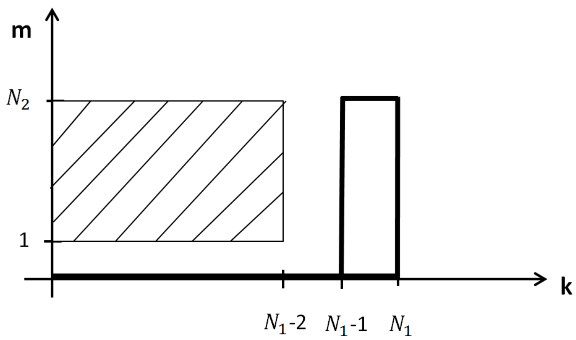


**Рис 1.** Область $\mathcal{D}$.

$$+A\sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)}(A^2+\alpha A)^m = \sum_{r=N_1}^{N_1+2N_2} \widetilde{c}_r^{(N_1+2N_2)} A^{r-N_1+1}.$$

Отримуємо

$$A(A+\alpha)\sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1-1,m+1}^{(N_1,N_2)} A^m (A+\alpha)^m +$$

$$+A\sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} A^m (A+\alpha)^m = A\sum_{r=0}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} A^r$$

Звідси,

$$(A+\alpha)\sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1-1,m+1}^{(N_1,N_2)} A^m (A+\alpha)^m +$$

$$+\sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} A^m (A+\alpha)^m = \sum_{r=0}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} A^r.$$

Отриману рівність можна розглядати як формальне співвідношення, що виконується за умови співпадання відповідних коефіцієнтів при степенях оператора $A$ в лівій та правій частині рівності.

Введемо позначення $A^2+\alpha A = B$.

Тоді

$$A = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+4B}.$$

Тому, якщо у отриману рівність замість $A$ поставити $-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+4B}$, то вона повинна бути також справедливою в розумінні співпадання коефіцієнтів при степенях $B$.

$$(A+\alpha)\sum_{m=0}^{N_2-1} c_{N_1-1,m+1}^{(N_1,N_2)} B^m +$$

$$+\sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} B^m = \sum_{r=0}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} A^r.$$

Позначимо

$$E_{N_2-1}(B) \;=\; \sum_{m=0}^{N_2-1} c_{N_1-1,m+1}^{(N_1,N_2)} B^m, \quad D_{N_2}(B) \;=\; \sum_{m=0}^{N_2} c_{N_1-1,m}^{(N_1,N_2)} B^m.$$

Будемо мати

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+4B}\right) E_{N_2-1}(B) + D_{N_2}(B) = \\
&\quad = \sum_{r=0}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} \frac{1}{2^r} (\alpha^2+4B)^{l/2} (-\alpha)^{r-l} = \\
&\quad = \sum_{l=0}^{2N_2} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^l (\alpha^2+4B)^{l/2} \sum_{r=l}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{l} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r = \\
&\quad = \sum_{l=0}^{N_2} \frac{1}{\alpha^{2l}} (\alpha^2+4B)^l \sum_{r=2l}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r - \\
&- \sqrt{\alpha^2+4B} \sum_{l=0}^{N_2-1} \frac{1}{\alpha^{2l+1}} (\alpha^2+4B)^l \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r .
\end{aligned}$$

Отже,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2}E_{N_2-1}(B)+D_{N_2}(B)=\\
&\qquad=\sum_{l=0}^{N_2}\frac{1}{\alpha^{2l}}(\alpha^2+4B)^l\sum_{r=2l}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r,\\
&\quad\frac{\alpha}{2}E_{N_2-1}(B)=-\sum_{l=0}^{N_2-1}\frac{1}{\alpha^{2l+1}}(\alpha^2+4B)^l\sum_{r=2l+1}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\times\\
&\qquad\qquad\times\binom{r}{2l+1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r.
\end{aligned}
$$

Друга з цих рівностей дає можливість визначити коефіцієнти полінома $E_{N_2-1}(B)$.

$$
\begin{aligned}
&E_{N_2-1}(B)=\\
&\quad=-2\sum_{l=0}^{N_2-1}\frac{1}{\alpha^{2l+1}}(\alpha^2+4B)^l\sum_{r=2l+1}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l+1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r=\\
&\qquad=-2\sum_{l=0}^{N_2-1}\frac{1}{\alpha^{2l+1}}\sum_{p=0}^{l}\binom{l}{p}(4B)^p\alpha^{2(l-p)}\times\\
&\qquad\times\sum_{r=2l+1}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l+1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r=\\
&=-2\sum_{p=0}^{N_2-1}(4B)^p\frac{1}{\alpha^{2p+1}}\sum_{l=p}^{N_2-1}\binom{l}{p}\sum_{r=2l+1}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l+1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r.
\end{aligned}
$$

З першої рівності отримуємо вигляд полінома $D_{N_2}(B)$.

$$\begin{gathered}
D_{N_2}(B) = -\frac{\alpha}{2} E_{N_2-1}(B) + \\
+ \sum_{l=0}^{N_2} \frac{1}{\alpha^{2l}} (\alpha^2 + 4B)^l \sum_{r=2l}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r = \\
= \alpha \sum_{p=0}^{N_2-1} (4B)^p \frac{1}{\alpha^{2p+1}} \sum_{l=p}^{N_2-1} \binom{l}{p} \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r + \\
+ \sum_{l=0}^{N_2} \frac{1}{\alpha^{2l}} \sum_{p=0}^{l} \binom{l}{p} (4B)^p \alpha^{2(l-p)} \sum_{r=2l}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r = \\
= \sum_{p=0}^{N_2-1} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2p} B^p \sum_{l=p}^{N_2-1} \binom{l}{p} \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r + \\
\sum_{p=0}^{N_2} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2p} B^p \sum_{l=p}^{N_2} \binom{l}{p} \sum_{r=2l}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r .
\end{gathered}$$

Отже,

$$\begin{gathered}
c_{N_1-1,m}^{(N_1,N_2)} = -\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2m-1} \sum_{l=m-1}^{N_2-1} \binom{l}{m-1} \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \times, \\
\times \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r, \quad m = \overline{1, N_2}, \\
c_{N_1,m}^{(N_1,N_2)} = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2m} \left( \sum_{l=m}^{N_2-1} \binom{l}{m} \sum_{r=2l+1}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l+1} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r + \right. \\
\left. + \sum_{l=m}^{N_2} \binom{l}{m} \sum_{r=2l}^{2N_2} \widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)} \binom{r}{2l} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r \right). \quad (17)
\end{gathered}$$

Загалом, ми отримаємо наступні співвідношення для коефіцієнтів $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$:

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)}=\begin{cases} 0, \qquad \text{при } (k,m)\in[0,N_1-2]\times[1,N_2]; \\ \widetilde{c}_k^{N_1+2N_2}, \qquad \text{при } k=\overline{0,N_1-1}, m=0; \\ -\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2m-1}\sum_{l=m-1}^{N_2-1}\binom{l}{m-1}\sum_{r=2l+1}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\times \\ \times\binom{r}{2l+1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r, \text{ при } \quad k=N_1-1,\ m=\overline{1,N_2}; \\ \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2m}\left(\sum_{l=m}^{N_2-1}\binom{l}{m}\sum_{r=2l+1}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l+1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r+\right. \\ \left.+\sum_{l=m}^{N_2}\binom{l}{m}\sum_{r=2l}^{2N_2}\widetilde{c}_{r+N_1}^{(N_1+2N_2)}\binom{r}{2l}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^r\right), \\ \text{при} \quad k=N_1,\ m=\overline{1,N_2}. \end{cases} \tag{18}$$

Тоді застосування теореми 1 з $\Phi(u,t)=u+2t-2N_1-4N_2+1$ до функції вигляду (15) дасть наступний результат.

**Теорема 2.** *Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — банахові простори, $\langle .,. \rangle$ — роздільно неперервна білінійна форма, визначена на декартовому добутку $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, $A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ — обмежений лінійний оператор.*

*Тоді для функції аналітичної функції $f$ вигляду (15) при $N_1\geq 1$, $N_2\geq 0$ раціональна функція*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w)=\frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}, \tag{19}$$

*де*

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w)=w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1}\widetilde{c}_{N_1-k}^{(N_1+2N_2)}z^k+\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{l=0}^{k+2m}(-1)^l\alpha^l\times$$
$$\times\binom{N_2-(k+m)+l}{l}\widetilde{c}_{N_1+2N_2-(k+2m)+l}^{(N_1+2N_2)}z^kw^m, \tag{20}$$

$$P_{\mathcal{N}}(z,w)=\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m}\sum_{l=0}^{j+2n}(-1)^l\alpha^l\binom{N_2-(j+n)+l}{l}\times$$
$$\times\widetilde{c}_{N_1+2N_2-(j+2n)+l}^{(N_1+2N_2)}s_{k-j,m-n}+z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{N_1+4N_2-2m-1}z^kw^m\sum_{j=N_1-1}^{N_1}\sum_{n=0}^{m}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{N_1-j+2n}(-1)^l\alpha^l\binom{j+N_2+l-(N_1+n)}{l}\widetilde{c}_{j+2(N_2-n)+l}^{(N_1+2N_2)}s_{k+j,m-n}+$$

$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-j-1)/2}z^k w^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=1}^{N_2}\sum_{l=0}^{2N_2+j-2n}(-1)^l\alpha^l\binom{2n-j+l}{l}\times$$

$$\times\,\widetilde{c}_{N_1-j+2n+l}^{N_1+2N_2}s_{k-j,m+n}+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-j-1)/2]}z^k w^m\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{k}\widetilde{c}_{N_1-j}^{(N_1+2N_2)}s_{k-j,m}, \quad (21)$$

*де коефіцієнти* $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$ *визначаються рівністю (18), матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть із коефіцієнтами розвинення функції (15) для всіх* $(k,m)\in\{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2:$ $k+2m\le 2N_1+4N_2-1\}$.

Нехай тепер $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=L_2([0,1],d\mu)$ — простір функцій, сумовних з квадратом за мірою $d\mu$, де $\mu$ — неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на [0,1]. Розглянемо в цьому просторі оператор множення на незалежну змінну

$$(A\varphi)(t)=t\varphi(t), \quad \varphi\in\mathcal{X}.$$

Білінійну форму на добутку просторів $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ визначимо наступним чином

$$\langle x,y\rangle=\int_0^1 x(t)y(t)d\mu.$$

Також будемо вважати, що

$$x_{0,0}(t)=y_{0,0}(t)\equiv 1.$$

Тоді

$$(\mathcal{R}_z(A)\varphi)(t)=\frac{\varphi(t)}{1-zt},$$

а

$$x_{k,m}(t)=y_{k,m}(t)=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\alpha^l t^{2m+k-l},\ k,m\in\mathbb{Z}_+,$$

та

$$s_{k,m}=\int_0^1\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\alpha^l t^{2m+k-l}d\mu(t)=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\alpha^l\int_0^1 t^{2m+k-l}d\mu(t).$$

Функція $f$ в даному випадку буде представлена таким чином

$$f(z,w)=\frac{1}{\alpha zw-z^2+w}\left(-z^2\int_0^1\frac{d\mu(t)}{1-zt}+\right.$$
$$\left.+w\int_0^1\frac{\alpha z+zt+1}{1-w(t^2+\alpha t)}d\mu(t)\right). \quad (22)$$

Узагальнений поліном (3) буде алгебраїчним многочленом степеня $N_1+2N_2$ і співпадатиме з точністю до постійного множника з многочленом, ортонормованим на [0,1] за вагою $d\mu$.

Таким чином, для функції вигляду (22) згідно з теоремою 2 можуть бути побудовані апроксиманти типу Паде вигляду (19)–(21), в яких коефіцієнти $\widetilde{c}_k^{(N_1+2N_2)}$ є коефіцієнтами відповідного ортонормованого многочлена.

Зокрема, при

$$d\mu(t)=t^{\nu}(1-t)^{\sigma}dt, \quad \nu,\sigma>-1$$

будемо мати

$$s_{k,m}=\int_0^1\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\alpha^l t^{2m+k-l+\nu}(1-t)^{\sigma}dt=$$

$$=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\alpha^l\frac{\Gamma(2m+k-l+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2m+k-l+\nu+\sigma+2)}.$$

Тоді функція $f$ матиме вигляд

$$f(z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}s_{k,m}z^k w^m=$$
$$=\sum_{k,m=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\alpha^l\frac{\Gamma(2m+k-l+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2m+k-l+\nu+\sigma+2)}\right)z^k w^m. \quad (23)$$

Слід зауважити, що при $\alpha=0$

$$s_{k,m}=C\frac{(\nu+1)_{k+2m}}{(\nu+\sigma)_{k+2m}}.$$

Згідно з означенням Горна $f(z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m$ буде гіпергеометричним рядом двох змінних [8], оскільки

$$\frac{s_{k+1,m}}{s_{k,m}} = h(k,m) = \frac{\nu+k+2m+1}{\nu+\sigma+k+2m+2},$$

$$\frac{s_{k,m+1}}{s_{k,m}} = g(k,m) = \frac{(\nu+k+2m+1)(\nu+k+2m+2)}{(\nu+\sigma+k+2m+2)(\nu+\sigma+k+2m+3)}$$

є раціональними функціями від $k$ та $m$ (див. [1, с. 218]).

Оскільки $h$ можна зобразити у вигляді

$$h(k,m) = \frac{(k+1)(\nu+k+2m+1)}{(k+1)(\nu+\sigma+k+2m+2)},$$

а $g$ у вигляді

$$g(k,m) = \frac{(m+1)(\nu+k+2m+1)(\nu+k+2m+2)}{(m+1)(\nu+\sigma+k+2m+2)(\nu+\sigma+k+2m+3)},$$

то це буде гіпергеометричний ряд третього порядку.

При $\alpha=-1$

$$s_{k,m} = C(-1)^m \frac{(\nu+1)_{k+m}(\sigma+1)_m}{(\nu+\sigma+2)_{k+2m}},$$

де символ Похгаммера визначається співвідношенням

$$(a)_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ a(a+1)\ldots(a+k-1), & k=1,2,\ldots \end{cases}$$

Тому будемо мати

$$h(k,m) = \frac{s_{k+1,m}}{s_{k,m}} = \frac{\nu+k+m+1}{\nu+\sigma+k+2m+2} = \frac{(k+1)(\nu+k+m+1)}{(k+1)(\nu+\sigma+k+2m+2)},$$

$$g(k,m) = \frac{s_{k,m+1}}{s_{k,m}} = -\frac{(\nu+k+m+1)(\sigma+m+1)}{(\nu+\sigma+k+2m+2)(\nu+\sigma+k+2m+3)} = \frac{(m+1)(\nu+k+m+1)(\sigma+m+1)}{(m+1)(\nu+\sigma+k+2m+2)(\nu+\sigma+k+2m+3)},$$

і отже, відповідна функція $f$ також буде гіпергеометричним рядом третього порядку.

При цьому поліноми $\widetilde{X}_N$ будуть зсунутими ортогональними на [0,1] многочленами Якобі, коефіцієнти яких (див. [9, с. 581]) дорівнюють

$$\widetilde{c}_k^{(N)} = (-1)^{N-k} \binom{N}{k} \frac{\Gamma(N+k+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}, \quad k = \overline{1, N}. \tag{24}$$

Звідси та з формули (18) маємо

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = \begin{cases} 0, \qquad \text{при } (k,m) \in [0, N_1-2] \times [1, N_2]; \\ (-1)^{N_1+2N_2-k}\binom{N_1+2N_2}{k}\frac{\Gamma(N_1+2N_2+k+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}, \\ \text{при } k = \overline{0, N_1-1}, m = 0; \\ \sum_{l=0}^{N_1+2N_2-(k+2m)} (-1)^{N_1+2N_2-(k+2m)} \alpha^l \binom{k+m+l-N_1}{l} \times \\ \times \binom{N_1+2N_2}{k+2m+l} \frac{\Gamma(N_1+2N_2+k+2m+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(k+2m+l+\nu+1)}, \\ \text{при } (k,m) \in ([N_1-1, N_1] \times [0, N_2]) \setminus \{(N_1-1, 0)\}. \end{cases} \tag{25}$$

**Теорема 3.** *Для функцій вигляду (23) при при* $N_1 \geq 1,\ N_2 \geq 0$ *раціональна функція вигляду*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}, \tag{26}$$

*де*

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{D}}(z,w) &= \\ = w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1} &(-1)^{2N_2+k} \binom{N_1+2N_2}{N_1-k} \frac{\Gamma(2(N_1+N_2)-k+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-k+\nu+1)} z^k + \\ &+ \sum_{k=0}^{1} \sum_{m=0}^{N_2-1} (-1)^{k+2m} \sum_{l=0}^{k+2m} \alpha^l \binom{N_2-(k+m)+l}{l} \times \\ &\times \binom{N_1+2N_2}{N_1+2N_2-(k+m)+l} \times \\ &\times \frac{\Gamma(2(N_1+2N_2)-(k+2m)+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1+N_2-(k+m)+l+\nu+1)} z^k w^m, \end{aligned} \tag{27}$$

а

$$P_{\mathcal{N}}(z,w)=\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m}(-1)^{j+2n}\sum_{l=0}^{j+2n}\alpha^l\times$$
$$\times\binom{N_2-(j+n)+l}{l}\binom{N_1+2N_2}{N_1+2N_2-(j+n)+l}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(2(N_1+2N_2)-(k+2m)+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1+N_2-(k+m)+l+\nu+1)}s_{k-j,m-n}+$$
$$+z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{N_1+4N_2-2m-1}z^kw^m\sum_{j=N_1-1}^{N_1}\sum_{n=0}^{m}(-1)^{N_1-j+2n}\sum_{l=0}^{N_1-j+2n}\alpha^l\times$$
$$\times\binom{N_2-N_1+j-n+l}{l}\binom{N_1+2N_2}{j+2(N_2-n)+l}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(N_1+4N_2+j-2n+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(j+2(N_2-n)+l+\nu+1)}s_{k+j,m-n}+$$
$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/2}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=1}^{N_2}(-1)^{2(N_2-n)+j}\sum_{l=0}^{2(N_2-n)+j}\alpha^l\times$$
$$\times\binom{n-j+l}{l}\binom{N_1+2N_2}{N_1-j+2n+l}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2(N_1+N_2)-j+2n+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-j+2n+l+\nu+1)}s_{k-j,m+n}+$$
$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/2}z^kw^m\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{k}(-1)^{2N_2+j}\binom{N_1+2N_2}{N_1-j}\frac{\Gamma(2(N_1+N_2)-j+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-j+\nu+1)}s_{k-j,m},\tag{28}$$

*матиме розклад у степеневий ряд коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (23) для всіх* $(k,m)\in\{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2: k+2m\le 2N_1+4N_2-1\}$.

Тепер для деяких $\alpha, \beta \in [0,1)$ розглянемо лінійні нормовані простори $\mathcal{X}_\alpha$ та $\mathcal{Y}_\beta$

$$\mathcal{X}_\alpha = \Big\{ x(t) : \sup_{t\in[0,1]} |x(t)\, t^\alpha| < \infty \Big\},$$

$$\mathcal{Y}_\beta = \Big\{ y(t) : \sup_{t\in[0,1]} |y(t)(1-t)^\beta| < \infty \Big\},$$

норми в яких визначаються співвідношенням

$$\|x\|_{\mathcal{X}_\alpha} = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)\, t^\alpha|,$$

$$||y||_{\mathcal{Y}_\beta} = \sup_{t\in[0,1]} |y(t)(1-t)^\beta|.$$

Розглянемо в просторі $\mathcal{X}_\alpha$ лінійний обмежений оператор інтегрування

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau,$$

а у просторі $\mathcal{Y}_\beta$ оператор $A^* : \mathcal{Y}_\beta \to \mathcal{Y}_\beta$,

$$(A^*\psi)(t) = \int_t^1 \psi(\tau) d\tau,$$

який буде спряженим до оператора $A$ відносно білінійної форми

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t) dt. \tag{29}$$

Неважко підрахувати резольвентну функцію оператора $A$ (див. напр., [2, с. 35–36])

$$(\mathcal{R}_z(A)\varphi)(t) = \varphi(t) + z \int_0^t \varphi(\tau) e^{z(t-\tau)} d\tau.$$

Покладемо також

$$\widetilde{x}_0(t) = x_{0,0}(t) = t^\nu, \quad \nu > -\alpha,$$

$$\widetilde{y}_0(t) = y_{0,0}(t) = (1-t)^\sigma, \quad \sigma > -\beta.$$

Тоді згідно з (16)

$$x_{k,m}(t)=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\alpha^l\frac{t^{2m+k-l+\nu}}{(\nu+1)_{2m+k-l}},\quad k,m\in\mathbb{Z}_+,$$

$$y_{j,n}(t)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\alpha^l\frac{(1-t)^{2n+j-l+\sigma}}{(\sigma+1)_{2n+j-l}},\quad j,n\in\mathbb{Z}_+.$$

При цьому

$$s_{k,m}=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\frac{\alpha^l}{(\nu+1)_{2m+k-l}}\cdot\frac{\Gamma(2m+k-l+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2m+k-l+\nu+\sigma+2)},$$

а функція $f$ матиме вигляд

$$f(w,z)=\sum_{k,m=0}^{\infty}s_{k,m}z^kw^m=$$
$$=\sum_{k,m=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\frac{\alpha^l}{(\nu+1)_{2m+k-l}}\cdot\frac{\Gamma(2m+k-l+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2m+k-l+\nu+\sigma+2)}\right)\times$$
$$\times z^kw^m.\quad (30)$$

Аналогічно попередньому випадку, коефіцієнти $c_{k,m}^{N_1,N_2}$ можна визначити наступним чином

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)}=\begin{cases}0,\qquad \text{при } (k,m)\in[0,N_1-2]\times[1,N_2];\\ \widetilde{c}_r(\nu+1)_r,\qquad \text{при } k=\overline{0,N_1-1}, m=0;\\ \sum_{l=0}^{N_1+2N_2-(k+2m)}(-1)^l\alpha^l\binom{k+m+l-N_1}{l}\frac{\widetilde{c}_{k+2m+l}}{(\nu+1)_{k+2m+l}},\\ \text{при } (k,m)\in[N_1-1,N_1]\times[0,N_2]\setminus\{(0,N_1-1)\}\end{cases}\quad (31)$$

Звідси отримуємо:

**Теорема 4.** *Для функцій вигляду (30) при* $N_1\geq 1,\ N_2\geq 0$ *раціональна функція вигляду*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w)=\frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},\quad (32)$$

*де*

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1}(-1)^{2N_2+k}(\nu+1)_{N_1-k+l}\binom{N_1+2N_2}{N_1-k+l}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(2(N_1+N_2)-k+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-k+\nu+1)}z^k+\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2-1}(-1)^{k+2m}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{k+2m}\frac{\alpha^l}{(\nu+1)}_{N_1+2N_2-(k+2m)+l}\binom{N_1+2N_2}{N_1+2N_2-(k+2m)+l}z^kw^m, \tag{33}$$

*а*

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m}(-1)^{j+2n}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{j+2n}\frac{\alpha^l}{(\nu+1)}_{N_1+2N_2-(j+2n)+l}\binom{N_1+2N_2}{N_1+2N_2-(j+2n)+l}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(2(N_1+2N_2)-(j+2n)+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1+2N_2-(j+2n)+\nu+1)}s_{k-j,m-n}+$$
$$+z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{N_1+4N_2-2m-1}z^kw^m\sum_{j=N_1-1}^{N_1}\sum_{n=0}^{m}(-1)^{N_1-j+2n}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{N_1-j+2n}\frac{\alpha^l}{(\nu+1)}_{j+2(N_2-m)+l}\binom{N_1+2N_2}{j+2(N_2-m)+l}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(N_1+4N_2+j-2n+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(j+2(N_2-m)+l+\nu+1)}s_{k+j,m-n}+$$
$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/2]}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=1}^{N_2}(-1)^{2(N_2-n)+j}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{2(N_2-n)+j}\frac{\alpha^l}{(\nu+1)}_{N_1-j+2n+l}\binom{N_1+2N_2}{N_1-j+2n+l}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(2(N_1+N_2)+j-2n+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-j+2n)+l+\nu+1)}s_{k-j,m+n}+$$

$$+\,w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_2-k-1)/2}z^k w^m\sum_{j=0}^{k}(-1)^{2N_2+j}(\nu+1)_{N_1-j+l}\times$$
$$\times\binom{N_1+2N_2}{N_1-j+l}\frac{\Gamma(2(N_1+N_2)-j+l+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(N_1-j+\nu-1)}s_{k-j,m}, \quad (34)$$

*матиме розклад у степеневий ряд коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (30) для всіх* $(k,m)\in\{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2 : k+2m\le 2N_1+4N_2+1\}$.

Щоб проілюструвати отримані результати, розглянемо частинний випадок теореми 5 при $\alpha=\nu=\sigma=0$. Тоді функція $f$ матиме вигляд

$$f(z,w)=-\frac{1}{z^2-w}\Big[\Big(\cosh\sqrt{w}-\exp z\Big)\,z+\sqrt{w}\sinh\sqrt{w}\Big]. \quad (35)$$

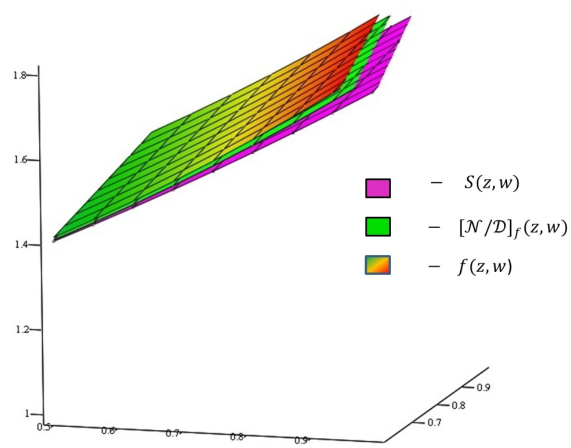


**Рис 2.** Графік функції (35), апроксиманти (36) та частинної суми (37).

Покладемо $N_1 = 2$, $N_2 = 1$. Отримаємо раціональну апроксимацію

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \big(70 - 4.320583 \cdot 10^3 w - 525z - 1.589583 \cdot 10^3 zw -$$
$$- 268.333333z^2 - 90.416667z^3 - 22.75z^4 - 4.569444z^5 - 0.763889z^6 -$$
$$- 0.109375z^7 + 457.25z^2 w + 95.430556z^3 w + 15.236111z^4 w$$
$$1.890625z^5 w + 720.583333w^2 + 36.013889w^3 + 95.430556w^2 z +$$
$$+1.890625w^3 z\big) \cdot \big(70 - 560z + 4.32 \cdot 10^3 w - 480zw + 24z^2 w\big)^{-1}. \quad (36)$$

Порівняємо значення наближуваної функції (35), частинної суми степеневого ряду

$$\sum_{k=0}^{2} \sum_{m=0}^{1} \frac{z^k w^m}{(k+2m+1)!} \quad (37)$$

та побудованої нами апроксиманти (36) у точках квадрата $[0; 0.8] \times [0; 0.8]$.

Відповідно, отримаємо значення функцій в Таблиці 1 та графіки функцій на Рис. 2, які показують, що в більшості точок квадрата $[0; 0.8] \times [0; 0.8]$, апроксиманта, побудована методому двовимірних узагальнених моментних зображень, наближає функцію краще ніж частинна сума її степеневого ряду.


[1] *Бэйтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука,1965. — 648 с.

[2] *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде.— К.: Ін-т математики НАНУ, 2002.— 222 с.

[3] *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2013. — Vol. 65, no. 8 — С. 1035 – 1058.

[4] *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Побудова апроксимант Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Vol. 10, no. 1 — С. 69 – 94.

[5] *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта // Укр. мат. журн. — 2013. — Vol. 65, no. 10 — С. 1315 – 1331.

| $w/z$ | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | | 1.033668 | 1.068013 | 1.103043 | 1.138769 |
| | 1 | 1.031293 | 1.065535 | 1.100503 | 1.136154 |
| | 1 | 1.033333 | 1.066667 | 1.1 | 1.133333 |
| 0.2 | 1.107014 | 1.142429 | 1.178544 | 1.215368 | 1.252911 |
| | 1.107014 | 1.139362 | 1.175505 | 1.212284 | 1.249739 |
| | 1.106667 | 1.141733 | 1.1768 | 1.211867 | 1.246933 |
| 0.4 | 1.229562 | 1.266872 | 1.304907 | 1.343676 | 1.383189 |
| | 1.229562 | 1.261973 | 1.300322 | 1.339036 | 1.378388 |
| | 1.226667 | 1.2636 | 1.300533 | 1.337467 | 1.3744 |
| 0.6 | 1.370198 | 1.409568 | 1.449689 | 1.490569 | 1.532221 |
| | 1.370197 | 1.400544 | 1.441972 | 1.48286 | 1.524251 |
| | 1.36 | 1.398933 | 1.437867 | 1.4768 | 1.515733 |
| 0.8 | 1.531926 | 1.573538 | 1.615928 | 1.659106 | 1.703082 |
| | 1.531919 | 1.555366 | 1.60251 | 1.646063 | 1.689731 |
| | 1.506667 | 1.547733 | 1.5888 | 1.629867 | 1.670933 |

**Таблиця 1.** Таблиця значень функції (35), апроксиманти (36) та частинної суми (37).


[6] *Голуб А. П., Веселовсъка Г. М.* Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Vol. 11, no. 3 — С. 71 – 77.

[7] *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. — 1981. — Vol. 6. — С. 8–12.

[8] *Садыков Т. М., Цих А. К.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. — М.: Наука, 2014. — 408 с.

[9] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

[10] *Чернецъка Л. О.* Побудова двовимірних апроксимант Паде деяких аналітичних функцій двох змінних за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Мат. студії. — 2014. — Vol. 11, no. 2 — С. 201 – 213.