Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 163–170

УДК 517.5 + 513.83

Ю. Б. Зелінський

(*Інститут математики НАН України, Київ*)

zel@imath.kiev.ua

Варіації до задачі про "тінь"

У роботі здійснено огляд результатів, пов'язаних з проблемою "тіні", які одержані співробітниками Інституту математики НАН України за останні два роки. Проаналізовано деякі нерозв'язані задачі, наведено оцінки необхідних та достатніх умов розв'язання проблеми.

The paper provides an overview of results associated with Problem of "shadow" obtained by the scientists of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine during the last two years. We focused on unsolved problems and estimates of necessary and sufficient conditions to "Problem of shadow" and its modifications.

Традиційно підмножину евклідового простору називають опуклою, якщо разом з довільною парою точок вона містить і відрізок, який з'єднує ці точки. Це еквівалентно зв'язності перетинів підмножини з довільною дійсною прямою. Більш загальним є аксіоматичний підхід до означення опуклості (кажуть, що сім'я множин складається з опуклих множин, якщо перетин довільної кількості їх належить до цієї ж сім'ї [1]), який дозволяє назвати "опуклими" ряд екзотичних класів множин, які не асоціюються зі звичним поняттям опуклості, наприклад, множина всіх множин або сім'я всіх замкнених підмножин деякого топологічного простору. Питання аналізу часто приводять до інших сімейств множин, які задовольняють аксіому опуклості. Нижче ми розглянемо ряд задач, розв'язок яких потребує використання різних узагальнень поняття опуклості.

Надалі під m-вимірними площинами розуміємо m-вимірні афінні підпростори евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 1. *Скажемо, що множина* $E \subset \mathbb{R}^n$ m*-опукла відносно точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$*, якщо знайдеться* m*-вимірна площина* L*, така, що* $x \in L$ *і* $L \cap E = \varnothing$.

Будемо казати, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ m*-опукла, якщо вона є* m*-опуклою відносно усіх точок з її доповнення.*

Означення 2. *Скажемо, що відкрита множина* $G \subset \mathbb{R}^n$ *слабко* m*-опукла, якщо вона* m*-опукла відносно кожної точки* $x \in \partial G$*, яка належить межі множини* G.

Скажемо, що довільна множина $E \subset \mathbb{R}^n$ *слабко* m*-опукла, якщо її можна апроксимувати ззовні сім'єю відкритих слабко* m*-опуклих множин.*

Обидва означення задовольняють аксіому опуклості: перетин будь-якого набору таких множин теж задовольняє означення. Для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ ми можемо розглянути мінімальну (слабко) m–опуклу множину, яка містить E, і назвати її (*слабкою*) m*-оболонкою множини* E.

Такі узагальнені опуклості розглядалися у роботах [2–5].

Побудова такого роду оболонок тісно пов'язана з наступною задачею про "тінь", яку вперше розглянув Г. Худайберганов [6] і розв'язав її для $n = 2$.

Задача (про "тінь"). *Якої мінімальної кількості замкнених куль в евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$ *з центрами на сфері* S^{n-1}*, що попарно не перетинаються, і радіусами, меншими від радіуса сфери, досить, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль? Іншими словами: коли центр сфери буде належати до 1-опуклої оболонки об'єднання куль?*

У [7] задача розв'язана повністю, показано, що для цього необхідно і достатньо $n + 1$ куль при $n > 2$. Даний розв'язок задачі індукував ряд близьких задач, дослідженням яких займається група науковців Інституту математики НАН України, починаючи з 2015 р. Для деяких з них отримано повний або частинний розв'язок, деякі — лишаються нерозв'язаними проблемами донині.

Перерахуємо ці задачі:

1. Як зміниться мінімальна кількість куль, якщо їх центри зсунути зі сфери?

2. Як зміниться результат задачі 1, якщо замість куль розглядати сімейство опуклих множин, отриманих з деякої опуклої множини з непустою внутрішністю за допомогою деякої групи перетворень?

3. Якої мінімальної кількості замкнутих куль в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1}, що попарно не перетинаються, і радіуса, меншого від радіуса сфери, достатньо, щоб довільний промінь з центра сфери перетинав хоча б одну з цих куль?

4. Розглянути аналогічні задачі у комплексних та гіперкомплексних евклідових просторах.

5. Задача про "тінь" не тільки для центра сфери, а й для усіх точок кулі, обмежених сферою S^{n-1}, які не належать до об'єднання вибраних куль.

6. Задача про "тінь" для точок сфери S^{n-1}, які не належать до об'єднання вибраних куль, відносно прямих дотичних до сфери.

7. Задача про "тінь" для куль постійного радіуса.

8. Дослідити задачу при зміні групи перетворень, що діє на сімейство множин.

9. Задача про "тінь" для сімейств опуклих множин, які можуть попарно дотикатися або перетинатися між собою.

10. Дослідити аналогічні задачі для слабкої m–опуклості та її варіантів.

Задачі 1–10 формулювалися у підбірці відкритих проблем на конференціях: XI-й Міжнародній математичній літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" (1-14.08.2016 р.) в Одесі [8], "Сучасні досягнення в геометрії та топології" (12-16.09.2016 р.) у Харкові [9] та Міжнародній конференції, присвяченій 120-річниці від дня народження Казимира Куратовського (27.09-1.10.2016 р.) у Львові [10].

Розглянемо сучасний стан відповідей на перераховані задачі. Задача 1 розв'язана повністю.

Теорема 1 ([11])**.** *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала до 1-опуклої оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль, які дану точку не містять і попарно не перетинаються, необхідно і достатньо n куль.*

Задача про "тінь" при $n = 3$, коли центри куль розташовані на еліпсоїді обертання, досліджена в [12]. Показано, що якщо відношення більшої осі еліпсоїда до меншої не менше, ніж $2\sqrt{2}$, то для створення "тіні" досить трьох куль.

Повна відповідь на задачу 2 при виборі групи перетворень, що складається з рухів і гомотетій, отримана в [11]. Показано, що досить n елементів сімейства. Якщо групу перетворень зменшити, то кількість елементів сімейства, необхідних для створення "тіні", можне збільшитися. Наприклад, якщо група перетворень буде складатися з паралельних переносів і гомотетій, то необхідно і достатньо $2n$ елементи сімейства [13]. Це частинна відповідь на задачу 8 при даному виборі групи.

Означення 3. *Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ m-напівопукла відносно точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, якщо знайдеться m-вимірна півплощина P така, що $x \in P$ і $P \cap E = \varnothing$. Скажемо, що ця множина m-напівопукла, якщо вона m-напівопукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.*

Легко переконатися, що і це означення задовольняє аксіому опуклості і ми можемо будувати m-напівопуклі оболонки множин. При $m = 1$ отримуємо умову задачі 3. Для цієї задачі отримано оцінку зверху в розмірності три — досить десяти куль [14]. Задача про знаходження точної оцінки залишається відкритою, невідомі навіть оцінки зверху у розмірностях більше трьох. Якщо ж об'єднати формулювання задач 1 і 3, то отримано точний результат [11].

Теорема 2. *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала до 1-напівопуклої оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль, що попарно не перетинаються і не містять дану точку, необхідно і достатньо $n + 1$ куль.*

Аналогічно показано, що Теорема 2 лишається вірною, якщо кулі замінити опуклими тілами з непустою внутрішністю.

У випадку комплексного або гіперкомплексного евклідового простору можна розглянути аналогічні задачі відносно перетинів сімейств, відповідно, комплексними або гіперкомплексними площинами.

Означення 4. *Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{C}^n(H^n)$ m-комплексно (m-гіперкомплексно) опукла відносно точки $z \in \mathbb{C}^n \backslash E$ $(H^n \backslash E)$, якщо знайдеться m-вимірна комплексна (гіперкомплексна) площина L, така що: $z \in L$ і $L \cap E = \varnothing$. Скажемо, що ця множина m-комплексно (m-гіперкомплексно) опукла, якщо вона m-комплексно (m-гіперкомплексно) опукла відносно кожної точки $z \in \mathbb{C}^n \backslash E(H^n \backslash E)$.*

Для задачі 4 з кулями, центри яких знаходяться на сфері, отримано точну оцінку при $n = 2$. Необхідно і достатньо двох куль [14]. При $n > 2$ (див. оцінку зверху у [15]) — досить $2n$ куль в комплексному евклідовому просторі і $4n - 1$ куль у гіперкомплексному.

Також в (гіпер) комплексному випадку отримана точна оцінка, якщо центри куль можуть зсуватися зі сфери.

Теорема 3 ([16])**.** *Для того, щоб точка в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі $\mathbb{C}^n(H^n)$, $n > 2$ належала до 1-комплексної (1-гіперкомплексної) оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль, які не містять дану точку і попарно не перетинаються, необхідно і досить n куль.*

Задача 5 досить складна. Тут крім майже очевидного факту, що при $n = 2$, необхідно і досить трьох куль, розміщених у вершинах рівностороннього трикутника, радіус яких рівний половині висоти трикутника. Крім цього факту — більше нічого не відомо.

До задачі 6 є тільки оцінки знизу при $n = 3$ [17].

Задачу 9 ілюструє наступна теорема.

Теорема 4 ([18])**.** *$n+1$-ї замкнутої кулі однакового радіуса у просторі $\mathbb{R}^n$ з центрами на сфері S^{n-1}, необхідно і досить для створення “тіні” в центрі сфери, якщо кулі можуть доторкатися одна до одної.*

У [18] показано, що якщо кулі не перетинаються, то при $n > 2$ набір куль однакового радіуса з центрами на сфері не може забезпечити “тіні” у центрі сфери. Побудовано приклад з чотирьох куль однакового радіуса, що забезпечують “тінь” у вибраній точці.

Теорема 5 ([19])**.** *Довільний набір з трьох відкритих куль однакового радіуса, що попарно не перетинаються в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$, утворює 1-опуклу множину.*

Теорема 6 ([19]). *Для того, щоб точка у тривимірному евклідовому просторі належала до 1-напівопуклої оболонки сімейства відкритих (замкнених) куль однакового радіуса, що попарно не перетинаються, досить восьми куль.*

Питання мінімальності знайденої кількості куль залишається відкритим.

Означення 5. *Скажемо, що відкрита множина $G \subset \mathbb{R}^n$ слабко m-напівопукла, якщо вона m-напівопукла відносно кожної точки $x \in \partial G$, яка належить межі множини G. Скажемо, що довільна множина $E \subset \mathbb{R}^n$ слабко m-напівопукла, якщо її можна апроксимувати ззовні сім'єю відкритих слабко m-напівопуклих множин.*

Легко побудувати приклад слабко m-напівопуклої, але не m-напівопуклої множини.

Приклад 1. Нехай $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\}$ — відкритий круг на площині xOy. Виберемо три точки a, b, c на колі $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ і розглянемо симплекс σ з вершинами в цих точках. Розглянемо три промені l_a, l_b, l_c, що виходять з вибраних точок, відповідно, так, що додатково виконуються включення: $b \in l_a$, $c \in l_b$, $a \in l_c$. Неважко переконатися, що множина $E = B \backslash (\sigma \cup l_a \cup l_b \cup lc)$ є слабко 1-напівопуклою, але не 1-напівопуклою.

Теорема 7. *Відкрита слабко 1-напівопукла множина E на площині $\mathbb{R}^2$, яка не є 1-напівопуклою, незв'язна.*

Доведення. Нехай E — слабко 1-напівопукла множина, яка не є 1-напівопуклою. Тоді існує точка $x \in \mathbb{R}^2 \backslash E$ така, що будь-яка пряма, що проходить через цю точку, перетинає множину E обома променями, на які точка x її розділяє. Виберемо одну з таких прямих l. Нехай $[a, b] \subset \mathbb{R}^2 \backslash E$ — відрізок, що містить точку x. Точки a і b належать межі множини E. В силу слабкої 1-напівопуклості множини E у цих точках існують промені r_a, r_b, відповідно, які не перетинають множину E.

Тепер можливі два випадки:

1. *Промені* r_a, r_b *не перетинаються.* Тоді ламана $r_a \cup [a, b] \cup r_b$ не перетинає множину E за побудовою і в обох частинах, на які ця ламана розбиває площину, знаходяться точки множини E. Отже, вона не зв'язна.

2. *Промені* r_a, r_b *перетинаються.* Тоді ламана $r_a \cup [a, b] \cup r_b$ не перетинає множину E і розбиває площину на три частини. Проведемо пряму через точку x і точку перетину променів r_a, r_b. Ця пряма перетинає усі три частини, на які ламана $r_a \cup [a, b] \cup r_b$ розбила площину, і, принаймні у двох з цих частин, вона перетинається з множиною E. Теорема доведена.

Відкрите питання. Чи вірно, що відкрита слабко 1-напівопукла множина E на площині $\mathbb{R}^2$, яка не є 1-напівопуклою, має не менше ніж три компоненти зв'язності?

Література

[1] *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы // Праці Ін-ту мат-ки НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2012. — **92**. — 280 с.

[2] *Солтан В. П.* Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. — Кишинев: Штиинца, 1984. — 256 с.

[3] *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. — К.: Наук. Думка, 1993. — 264 с.

[4] *Зелинский Ю. Б., Момот И. В.* Об (n, m)-выпуклых множествах // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 3. — С. 422 – 427.

[5] *Zelinskii Y. B., Gretsky A. S., Momot I. V.* Some results on generalized convex sets // Classical analysis. Proc. of 10-th intern. sympos. — **1999**. — Warsaw (Poland), 2001. — P. 113 – 124.

[6] *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772. — 85 Деп.

[7] *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В.* Обобщенно выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 12. — С. 1659 – 1666.

[8] *Zelinskii Yu. B.* Open topological and geometrical problems in analysis // https://www.academia.edu/29063888/Open topological and geometrical problems in analysis.

[9] *Zelinskii Yu. B.* Open topological and geometrical problems in analysis // Abstracts of Reports of Int. Conf. “Modern advances in geometry and topology in honor of professor A. A. Borisenko”, September 12 – 16, 2016. — Kharkiv, 2016. — P. 52.

[10] *Zelinskii Y. B.* Some open topological problems in analysis // Abstracts of reports of Intern. Conf. dedicated to the 120^{th} anniversary of Kazimierz Kuratowski, 27.09 – 1.10 2016. — Lviv, 2016. — P. 55.

[11] *Зелинский Ю. Б.* Задача о тени для семейства множеств // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2015. — **12**, № 4. — С. 197 – 204.

[12] *Ткачук М. В., Осипчук Т. М.* Задача о тени для эллипсоида вращения // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — К.: Ін-т математики НАН України. — **12**, № 3. — С. 243 – 250.

[13] *Зелинский Ю. Б., Стефанчук М. В.* Узагальнення задачі про тінь // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 6. — С. 657 – 662.

[14] *Zelinskii Yu. B.* Generalized Convex Envelopes of Sets and the Problem of Shadow // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — **211**, No. 5. — P. 710 – 717.

[15] *Zelinskii Yu. B.* Problem of shadow (complex case) // Advances in Mathematics: Scientific Journal. — 2016. — **5**, No. 5. — P. 1 – 5.

[16] *Zelinskii Yu. B.* The problem of the shadows // Bulletin de la societe des sci. et letters de Lodz. Ser. Rech. Deform. — 2016. — **66**, No. 1. — P. 34 – 42.

[17] *Zelinskii Yu. B.* Problem of shadow for tangent bundle of straight line on sphere // Proceedings of 7th International Conference on Complex Analysis and Dynamical Systems (in print).

[18] *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Даккил Х. К.* Задача о тени для шаров фиксированного радиуса // Укр. мат. вісник. — 2016. — **13** (подана к печати).

[19] *Зелинский Ю. Б., Даккил Х. К.* Об одной задаче о тени для шаров фиксированного радиуса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2017 (подана к печати).

[20] *Даккыл Х. К., Зелинський Ю. Б., Кліщук Б. А.* Про слабко m–опуклі множини // Доповіді НАН України. — 2017 (подано до друку).