

УДК 539.595

О. В. Константинов¹, О. С. Лимарченко²

¹(Інститут математики НАН України, Київ),

²(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ)

¹ akonst@mail.ru, ² olelim2010@yahoo.com

Задача про параметричний резонанс у системі резервуар – рідина з вільною поверхнею

Присвячена 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

В работе рассмотрено обобщение классической задачи Фарадея о развитии параметрического резонанса в механической системе “резервуар на маятниковом подвесе – жидкость со свободной поверхностью“. При этом точка подвеса движется в вертикальной плоскости по заданному гармоническому закону. Исследование выполнено на основе эффективной нелинейной многомодовой математической модели, учитывающей совместные наклонные движения резервуара и колебания жидкости со свободной поверхностью. Показано, что учет новых факторов по сравнению с классической задачей Фарадея может существенно повлиять на качественную картину развития параметрического резонанса в системе.

The generalized Faraday problem about development of parametric resonance in mechanical system “reservoir on pendulum suspension – liquid with a free surface” is investigated. Here the suspension point performs motion in vertical plane according to given harmonic law. Investigation is done on the basis of the efficient nonlinear multimodal mathematical model describing combined inclination motion of reservoir and oscillations of liquid with free surfaces. It was shown that considering of new factors in comparison with the classical Faraday problem can considerably affects the qualitative picture of development of parametric resonance in the system.

Вступ. Параметричний резонанс в механічній системі “резервуар – рідина з вільною поверхнею” вперше експериментально досліджував Фарадей у 1831 році. Циліндричний резервуар, частково заповнений водою, був встановлений на спеціальному лабораторному устаткуванні і мав можливість рухатись у вертикальній площині за заданим гармонічним законом. Результатом експерименту було встановлення Фарадеєм того факту, що перша резонансна частота вільної поверхні рідини дорівнює половині частоті збурення резервуару. Цей результат відомий в історії механіки як класична задача Фарадея (Рис. 1а).

З моменту відкриття теоретичним та прикладним аспектам задачі Фарадея присвячено дуже багато досліджень. Найбільш повний огляд цих робіт, опублікованих до 2005 року, наведено в монографії [1]. З останніх робіт найбільш повним дослідженням, присвяченій класичній задачі Фарадея, є робота [2]. В ній наведені як теоретичні результати, присвячені дослідженню умов виникнення резонансу на основі методу Ван дер Поля, так і експериментальні, присвячені дослідженню розвитку процесів коливань, які характеризуються проявом амплітудної або фазової модуляції, а також виходом на режим хаотичних коливань.

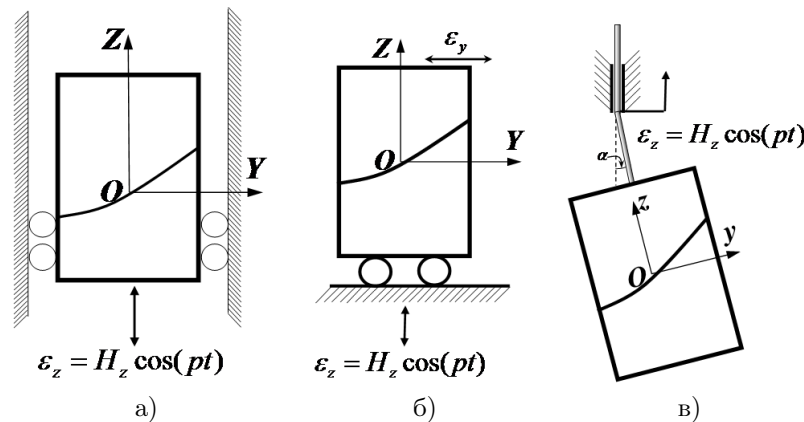


Рис. 1. Механічна модель задачі Фарадея

Оскільки в класичній задачі Фарадея резервуар рухається тільки вертикально за заданим законом, коливання рідини ніяк не впливають на характер його руху. Фактично це означає, що резервуар рухається у

вертикальному каналі або має нескінченно велику масу. Однак у більшості практичних застосувань (качка судна на хвилях, політ ракетноносія і т.п.) конструкція з рідиною може здійснювати поступальні та кутові рухи у різних площинах як за рахунок коливань вільної поверхні рідини, так і за рахунок наявності зовнішніх силових або моментних збурень. При цьому маса рідини може суттєво перевищувати масу резервуару, а тому врахування сумісного руху резервуару та рідини з вільною поверхнею та їх взаємодії є визначальним фактором. Таким чином, для наближення до практичних застосувань класичну задачу Фарадея пропонується узагальнити за рахунок внесення в систему “резервуар – рідина з вільною поверхнею” додаткового ступеня вільності резервуару: можливості поступального руху в горизонтальній площині (Рис. 1 б) та можливості здійснення кутових коливань на маятниковому підвісі (Рис. 1 в).

В даній роботі теоретично досліджується узагальнення задачі Фарадея для випадку, коли резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом та може здійснювати кутові коливання на маятниковому підвісі (Рис. 1 в). При цьому для забезпечення повноти постановки задачі використаний наступний підхід: відмова від гіпотези про можливість нехтування коливаннями на власних частотах системи (врахування коливань вільної поверхні рідини на власних та комбінаційних частотах є визначальним) [3, 4], дослідження динаміки системи на основі нелінійної математичної багатомодової моделі (12 форм коливань), врахування сумісного руху резервуару та рідини [5].

1. Математична модель узагальненої задачі. Розглянемо циліндричний резервуар з абсолютно твердими стінками, частково заповнений рідиною. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Дослідження особливостей параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея буде проведено на основі математичної моделі, отриманій в роботі [5].

Введемо умовно нерухому систему координат $O_1X_1X_2X_3$, систему координат $Oxyz$, незмінно зв’язану з резервуаром та систему $OY_1Y_2Y_3$ з початком в точці O , осі якої відповідно паралельні вісям системи $O_1X_1X_2X_3$ (Рис. 2). Точка O обрана в центрі незбуреної вільної поверхні рідини, а вісь Oz спрямована в бік зовнішньої нормалі до незбуреної вільної поверхні рідини. Рух точки O в системі $O_1X_1X_2X_3$ заданий радіусом-вектором $\vec{e}(t)$, а обертальний рух системи $Oxyz$ відносно $O_1X_1X_2X_3$ заданий трьома кутами повороту $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. При цьо-

му кут α_1 визначений як кут повороту системи $Oxyz$ відносно осі OY_1 , кут α_2 — кут повороту системи відносно нового положення OY_2 , а α_3 — кут повороту системи відносно нового положення OY_3 .

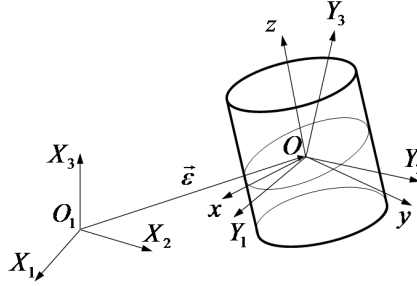


Рис. 2. Системи координат для опису руху об'єкта

Введемо до розгляду орти $\vec{y}_1^0, \vec{y}_2^0, \vec{y}_3^0$ системи координат $OY_1Y_2Y_3$, орти $\vec{x}^0, \vec{y}^0, \vec{z}^0 = \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ системи координат $Oxyz$, таким чином матрицю переходу можна представити у наступному вигляді

$$\vec{y}_i^0 = e_{ij} \vec{i}_j,$$

де

$$e_{11} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_3, \quad e_{12} = -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3, \quad e_{13} = \cos \alpha_1,$$

$$e_{21} = \cos \alpha_1 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3,$$

$$e_{22} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3,$$

$$e_{23} = -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2,$$

$$e_{31} = \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3,$$

$$e_{32} = \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3,$$

$$e_{33} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2.$$

Вираз для компонент куткової швидкості $\vec{\omega}$ у зв'язаній системі координат буде таким (точка над змінною означає похідну за часом t)

$$\omega_x = \omega_1 = \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_3,$$

$$\omega_y = \omega_2 = -\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 + \dot{\alpha}_3 \cos \alpha_3,$$

$$\omega_z = \omega_3 = \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_2 + \dot{\alpha}_3.$$

Таким чином, сукупність параметрів ε_i и α_i повністю характеризує рух резервуару в умовно нерухомій системі координат $O_1X_1X_2X_3$.

Відповідно до методики роботи [5] математична модель системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” будується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського

$$\delta I = 0, \quad \text{где } I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при цьому функція Лагранжа задається в класичному вигляді Гамільтона-Остроградського як різниця між кінетичною та потенціальною енергіями системи

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) + \dot{\varepsilon})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\varepsilon})^2 + \\ & + \frac{1}{2} I_{tank}^{ij} \omega_i \omega_j - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \\ & - \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \cos \theta (\xi + H) dS - \\ & - \rho g (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \sin \theta (\xi + H) dS - \\ & - \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_T h_T + M_F h_F) g (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \\ & + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi}, \end{aligned}$$

де ρ – густина рідини; τ – область, яку займає рідина; $d\tau = r dr d\theta dz$ – циліндричні координати, при цьому ось Oz має напрямок, протилежний напрямку вектора прискорення вільного падіння \vec{g} , а система координат зв’язана з нерухомим резервуаром; φ – потенціал швидкостей рідини; $\vec{\Omega}$ – функція, яка описує коливання вільної поверхні рідини в залежності від кутового руху резервуару; ξ – збурення вільної поверхні рідини; S – поперечний переріз циліндричного резервуару; I_{tank}^{ij} –

тензор інерції резервуару з рідиною, визначений відносно точки ; M_T та M_F – маса резервуару та рідини відповідно; h_T та h_F – зміщення центрів мас резервуару та рідини відносно площини незбуреної вільної поверхні рідини S_0 ; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуару у поступальному русі; $\vec{\chi} = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – умовне представлення кутів повороту резервуару відносно умовно нерухомої системи координат; \vec{F} та \vec{M} – головний вектор та головний момент зовнішніх сил, які діють на резервуар; відносно точки O .

Відповідно до [5] для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського необхідно побудувати розклади невідомих змінних ξ , φ та $\vec{\Omega}$, які наперед задовольняють кінематичні граничні умови. Як запропоновано в [5], приймемо наступні розклади для шуканих змінних

$$\xi = \sum_n a_n(t) \psi_n(x, y), \quad \varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(x, y) \frac{\cosh \kappa_n(z + H)}{\kappa_n \sinh \kappa_n H},$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \sum_n \vec{q}_n(t) \psi_n(x, y) \frac{\cosh \kappa_n(z + H)}{\kappa_n \sinh \kappa_n H}.$$

Тут $\psi_n(x, y)$ – повна ортогональна система функцій в області S_0 , яку можна знайти з розв'язку крайової задачі Неймана з параметром κ_n

$$\Delta \psi_n + \kappa_n^2 \psi_n = 0 \text{ на } S_0, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma,$$

де друге рівняння є умовою неперетікання рідини через стінку резервуару Σ . Вектор-функція $\vec{\Omega}_0$ представляє собою потенціал Стокса-Жуковського, який є розв'язком крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа

$$\Delta \vec{\Omega}_0 = 0, \quad \frac{\partial \vec{\Omega}_0}{\partial n} = \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } S_0 + \Sigma,$$

де \vec{n} – вектор зовнішньої нормалі до стінки резервуару Σ та незбуреної вільної поверхні рідини S_0 .

Оскільки рідина є ідеальною, однорідною, нестисливою, а її рух є безвихровим, то з відповідної теореми Лагранжа випливає, що рух об'єму рідини можна повністю описати рухом її границь. Це означає, що змінні ξ , $\vec{\varepsilon}$ та $\vec{\chi}$ можна вважати незалежними, а змінні φ та Ω є залежними. Таким чином, сукупність амплітудних параметрів a_n розкладу

вільної поверхні рідини в ряд по формах вільних коливань $\varphi_n(x, y)$ розглядається як незалежні, а параметри b_n та \vec{q}_n розкладів змінних φ та $\vec{\Omega}$ розглядаються як залежні від параметрів a_n .

Відповідно до [5], запишемо систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно незалежних параметрів: a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань ψ_i , $\vec{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$ – переміщення резервуару у поступальному русі та $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – кутів повороту резервуару відносно умовно нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \cdot \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \quad (1) \\
& + \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left[E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] \right\} = \\
& = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[\sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + \right. \\
& \left. + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{pijr}^{3*} + E_{pirj}^{3*} - E_{prij}^{3*} - E_{prji}^{3*}) \right] + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left[E_{psr}^2 + \sum_i a_i (E_{psir}^3 + E_{psri}^3) \right] + \\
& \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[\vec{F}_{pr}^2 + \sum_i a_i (\vec{F}_{pir}^3 + \vec{F}_{pri}^3) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j} a_i a_j (\vec{F}_{pijr}^4 + \vec{F}_{pirj}^4 + \vec{F}_{prij}^4) \Big] + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left[\sum_i a_i \vec{D}_{ir}^2 + \right. \\
& + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{D}_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{D}_{ijk r}^4 \Big] - g \frac{N_r}{\alpha_r^v} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 a_r + \\
& + g \frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) + \\
& + g \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3), \\
& \frac{\rho}{M_T + M_F} \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{B}_i^1 + \sum_{i,j} a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right] + \ddot{\vec{\varepsilon}} + \quad (2) \\
& + \frac{\rho}{M_T + M_F} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left[\sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_s} \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) \right] = \\
& = \frac{\vec{F}}{M_T + M_F} - \vec{g} \cdot \vec{z}^0 - \frac{\rho}{M_T + M_F} \left[\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \right. \\
& + 2 \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 + \sum_{p=1}^3 \omega_p \left(\sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (\vec{F}_{pij}^3 + \vec{F}_{pji}^3) \right) \Big] - \\
& - \frac{\rho}{M_T + M_F} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right], \\
& \sum_i \ddot{a}_i \left[\sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_r} \left(E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right] + \quad (3) \\
& + 2 \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_r} \left[\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \right. \\
& + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \Big] + \\
& + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_r} \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_n} \left(\frac{1}{\rho} J_{tank}^{ps} + A_{ps}^2 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) = \\
 & = 2 \sum_{p,s=1}^3 \left(\omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left(\frac{1}{\rho} J_{tank}^{ps} + A_{ps}^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\
 & + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) - \\
 & - 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) - \\
 & - 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left(\sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) - \\
 & - \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) - \\
 & - 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) + \\
 & + \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \\
 & 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) \right] + \\
 & + 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \right],
 \end{aligned}$$

де

$$\omega_p^{(k)} = - \sum_{n=1}^3 \dot{\alpha}_n \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_n}, \quad \omega_{p,k}^* = \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_k} \right).$$

Система рівнянь (1) – (3) повністю описує нелінійну динаміку сумісного руху резервуару та рідини, що його частково заповнює, під дією

заданих сил та моментів. Система (1) – (3) складається з $N + 6$ рівнянь другого порядку, де N – кількість утриманих в розгляді форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому рівняння (1) описують коливання вільної поверхні рідини, рівняння (2) – поступальний рух резервуару, а рівняння (3) – кутові рухи резервуару, враховуючи взаємодію коливань вільної поверхні рідини та поступального і кутового руху резервуару.

2. Дослідження стійкості параметричних коливань в околі резонансу. Для побудови зон параметричного резонансу в узагальненій задачі Фарадея (Рис. 1в) з можливістю кутових коливань резервуару, який висить на маятниковому підвісі, ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$; $\varepsilon_z = H_z \cos pt$; $\alpha_i = 0$, $i = 2, 3$) лінеаризуємо рівняння (1), (2) та запишемо їх тільки для a_1 першої антисиметричної форми ψ_1 з можливістю кутових коливань по координаті α_1 у вигляді

$$\ddot{a} + \lambda_F \ddot{\alpha}_F + \omega_F^2 (1 - \nu H_z p^2 \cos pt) a = 0, \quad (4)$$

$$\lambda_T \ddot{a} + \ddot{\alpha} + \omega_T^2 \alpha = 0, \quad (5)$$

де $\nu = \frac{B_{11}^{2z}}{N_{1g}}$. Зони нестійкості по першому резонансу обмежені періодичними рішеннями з частотою $\frac{p}{2}$, тому періодичні розв'язки для системи (4) – (5) представляємо у вигляді

$$a = A_1 \cos\left(\frac{pt}{2}\right) + B_1 \sin\left(\frac{pt}{2}\right), \quad \alpha = A_2 \cos\left(\frac{pt}{2}\right) + B_2 \sin\left(\frac{pt}{2}\right),$$

і з використанням методу Гальоркіна, отримаємо характеристичні рівняння для визначення зон нестійкості по першому параметричному резонансу

$$\begin{aligned} & (1 + 2\omega_F^2 \nu H_z - \lambda_1 \lambda_2) p^4 + \\ & + (-4(\omega_R^2 + \omega_F^2) - 8\omega_F^2 \omega_R^2 \nu H_z) p^2 + 16\omega_F^2 \omega_R^2 = 0, \\ & (1 - 2\omega_F^2 \nu H_z - \lambda_1 \lambda_2) p^4 + \\ & + (-4(\omega_R^2 + \omega_F^2) + 8\omega_F^2 \omega_R^2 \nu H_z) p^2 + 16\omega_F^2 \omega_R^2 = 0, \end{aligned}$$

розв'язки яких мають вигляд

$$p_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda_T \lambda_F - 1 - 2\nu H_z \omega_F^2}} \left(-\omega_T^2 - \omega_F^2 (1 + 2\nu H_z \omega_T^2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4(1 - 2\nu H_z \omega_T^2)^2 + 2\omega_T^2 \omega_F^2(-1 + 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)} \Big)^{\frac{1}{2}}, \\
p_2 &= \sqrt{\frac{2}{1 + 2\nu H_z \omega_F^2 - \lambda_T \lambda_F}} \left(-\omega_T^2 - \omega_F^2(1 + 2\nu H_z \omega_T^2) - \right. \\
& \left. - \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4(1 - 2\nu H_z \omega_T^2)^2 + 2\omega_T^2 \omega_F^2(-1 + 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
p_3 &= \sqrt{\frac{2}{-1 + 2\nu H_z \omega_F^2 + \lambda_T \lambda_F}} \left(-\omega_T^2 - \omega_F^2(1 + 2\nu H_z \omega_T^2) - \right. \\
& \left. - \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4(1 + 2\nu H_z \omega_T^2)^2 - 2\omega_T^2 \omega_F^2(1 - 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
p_4 &= \sqrt{\frac{2}{-1 + 2\nu H_z \omega_F^2 + \lambda_T \lambda_F}} \left(-\omega_T^2 - \omega_F^2(1 + 2\nu H_z \omega_T^2) + \right. \\
& \left. + \sqrt{\omega_T^4 + \omega_F^4(1 + 2\nu H_z \omega_T^2)^2 - 2\omega_T^2 \omega_F^2(1 - 2\lambda_T \lambda_F + 2\nu H_z \omega_T^2)} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

На Рис. 3 в площині “ частота зовнішнього збудження p – амплітуда збудження H_z ” побудовані області нестійкості для першої та другої власних частот відповідно для різних довжин маятникового підвісу ($1 - l = 100$ м, $2 - l = 10$ м, $3 - l = 1$ м). Области нестійкості обмежені кривими з однаковими номерами. Як видно з графіків, збільшення довжини маятникового підвісу сприяє зміщенню областей нестійкості в область низьких частот, що є характерним для поступального руху. Крім того, збільшення довжини підвісу звужує області нестійкості для обох власних частот. Розташування областей нестійкості для другої власної частоти більш суттєво залежить від довжини підвісу, ніж для першої, — їх перетин буде відбуватися тільки в діапазоні великих

амплітуд зовнішнього впливу.

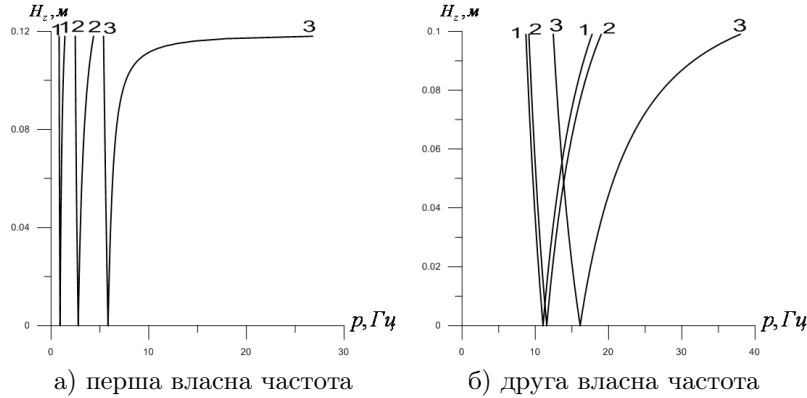


Рис. 3. Зони резонансу узагальненої задачі Фарадея.

3. Перехідні процеси при входженні системи в режим параметричних коливань. Розглядається круговий циліндричний резервуар, що закріплений на маятниковому підвісі, з вертикальною поздовжньою віссю Oz , при цьому точка підвісу резервуару здійснює вертикальні рухи за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z = H_z \cos pt$. Резервуар радіусу $R = 1$ м та маси $M_T = 0,1M_F$ частково заповнений водою з масою M_F до глибини $H = R$. Довжина маятникового підвісу $l = R$. Для збудження коливань в системі в нульовий момент часу задається або початкове збурення вільної поверхні рідини $a_1(0) = 0,01R$ або початкове відхилення резервуару $\alpha_1(0) = 1^\circ$. Частота p та амплітуда H_z зовнішнього параметричного збурення підібрані таким чином, щоб викликати резонанс в системі відповідно до зон резонансу першої та другої власної частоти системи, тобто $p = 5,83$ Гц та $H_z = 0,0015R$ для збудження параметричного резонансу відносно першої власної частоти і $p = 16,12$ Гц та $H_z = 0,007R$ для збудження параметричного резонансу відносно другої власної частоти системи.

Система рівнянь (1) – (2) зводиться чисельно до нормальної форми Коші, а потім чисельно інтегрується за допомогою стандартного методу Рунге-Кутта. При дослідженні динаміки системи резервуар – рідина в розкладах утримувалося $n_1 = n_2 = 12$ координатних функцій з точністю до квадратів амплітуд і $n_3 = 6$ з точністю до кубічних членів. Координатні функції розміщено в порядку зростання відповідних

їм власних частот за винятком ψ_6 — другої осесиметричної форми. Крок чисельного інтегрування обирався $\Delta t = \frac{0,1\pi}{\omega_{12}}$ с, де ω_{12} — найвища парціальна частота в системі. При аналізі результатів та побудові графіків амплітуди приводилися до безрозмірного вигляду відносно характерного розміру системи — радіуса R резервуару, а час — відносно періоду коливань першої антисиметричної форми ψ_1 . При цьому графіки 1 та 2 відповідають випадкам параметричного збудження системи на частотах, які розташовані у резонансних зонах відповідно для першої та другої власної частоти.

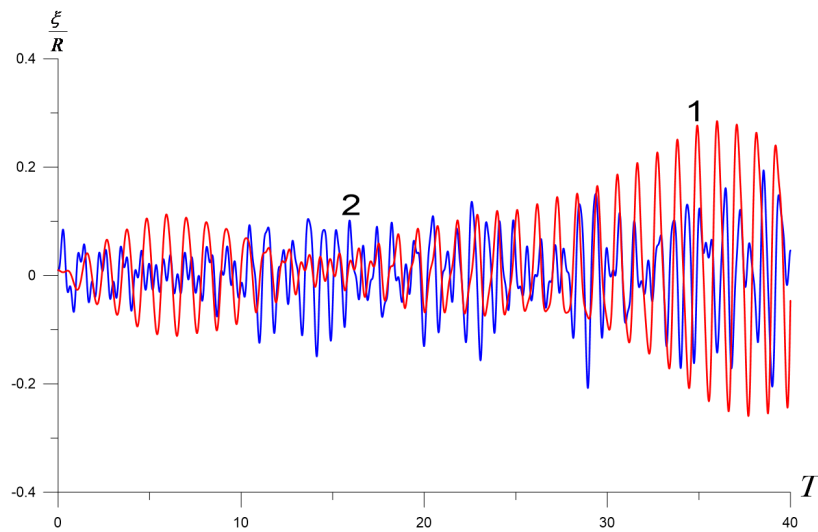


Рис. 4. Збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару при початковому збуренні вільної поверхні $a_1(0) = 0,01R$

Як видно з графіків збурення вільної поверхні рідини (Рис. 4), резонанс спостерігається на обох власних частотах, при цьому амплітуди збурення вільної поверхні рідини більше для випадку резонансу в околі першої власної частоти. І початкове збурення вільної поверхні рідини, і початкове відхилення маятника-резервуару забезпечують вихід системи в режим резонансу, якщо частота зовнішнього збурення лежить в зоні нестійкості. При збільшенні частоти або амплітуди зовнішнього збурення система теж виходить у режим резонансу, але в цьому разі

працює сумісний механізм параметричного резонансу та вимушених коливань.

Як видно з Рис. 5, частотний спектр містить гармоніки, характерні як для механізму параметричного резонансу, так і для механізму вимушених коливань — тобто на частотах, які дорівнюють частоті зовнішнього збурення або кратні їй, на власних та кратних їм частотах, а також на комбінаційних частотах.

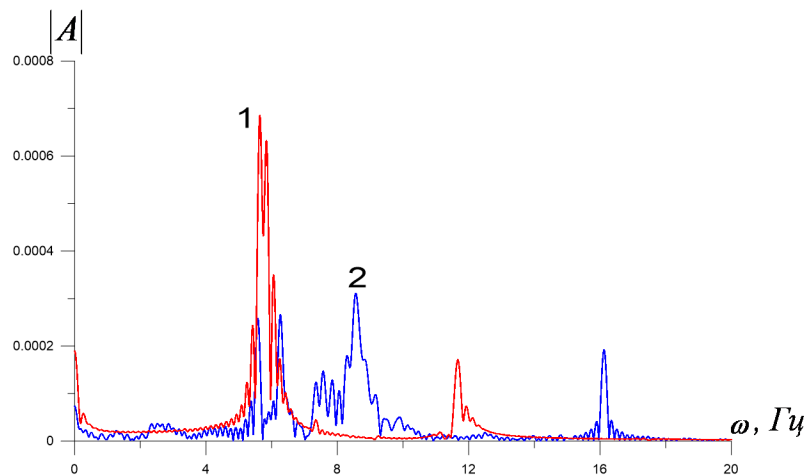


Рис. 5. Частотний спектр збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару

Висновки. Розроблено модель дослідження узагальненої задачі Фарадея, в якій в порівнянні з класичною постановкою задачі Фарадея додатково внесено ступені вільності, що відповідають кутовим і поступальним рухам резервуара, а також розглядається задача в сумісній постановці. Побудовано області стійкості параметричних коливань для такої узагальненої задачі. Показано, що при сумісній постановці задачі спостерігається одночасний прояв як механізму параметричного збудження коливань, так і механізму вимушених коливань, що суттєво відрізняє узагальнену задачу Фарадея від її класичного варіанту.

Вихід на режим параметричного резонансу спостерігається, якщо частота зовнішнього збурення лежить в зоні нестійкості, а початковим

збуренням в системі може бути як мале збурення вільної поверхні рідини, так і мале відхилення резервуару-маятника від вертикального положення. Збільшення частоти або амплітуди зовнішнього збурення призводить до виходу системи на режим резонансу, навіть якщо ці зовнішні параметри належать до області стійкості. При цьому частотний спектр містить гармоніки, характерні як для механізму параметричного резонансу, так і для механізму вимушеного резонансу — тобто на частотах, які дорівнюють частоті зовнішнього збурення або кратні їй, на власних та кратних їм частотах, а також на комбінаційних частотах.

Література

- [1] *Ibrahim R. A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — 950 p.
- [2] *Takashi I., Murakami S.* Autoparametric resonances in a structure/fluid interaction system carrying a cylindrical liquid tank // *Journal of Sound and Vibration*. — 2005. — **285**. — P. 517 – 546.
- [3] *Faltinsen O. M., Rognebakke O. M., Timokha A. N.* Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // *Physics of fluids*. — 2006. — **1**, No. 18. — P. 1 – 14.
- [4] *Pal P.* Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // *International Journal of Recent Trends in Engineering*. — 2009. — **1**, No. 6. — P. 1 – 5.
- [5] *Лимарченко О. С.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. — К.: НТТУ “КПИ”, 1997. — 338 с.