Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 238–248

УДК 517.5

***А. С. Сердюк*[1], *І. В. Соколенко*[2]**

[1,2](*Інститут математики НАН України, Київ*)

[1] **serdyuk@imath.kiev.ua**, [2] **sokol@imath.kiev.ua**

Апроксимація класів згорток періодичних функцій лінійними методами, побудованими на основі коефіцієнтів Фур'є-Лагранжа

Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

Знайдено точні верхні межі поточкових та рівномірних наближень класів 2π-періодичних функцій, що задаються у вигляді згортки довільного сумовного з квадратом твірного ядра з функціями, що належать одиничній кулі простору L_2, за допомогою лінійних поліноміальних методів, побудованих на основі їх коефіцієнтів Фур'є-Лагранжа.

We calculate the least upper bounds of pointwise and uniform approximations for classes of 2π-periodic functions expressible as convolutions of an arbitrary square summable kernel with functions, which belong to the unit ball of the space L_2, by linear polynomial methods, constructed on the basis of their Fourier-Lagrange coefficients.

Нехай C і $L_p,\ 1 \le p \le \infty$, — простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ та $\|\cdot\|_p$, відповідно.

Позначимо через $C^{\psi}_{\bar\beta,p},\ 1 \le p \le \infty$, множину всіх 2π-періодичних функцій f, які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B^0_p, \tag{1}$$

$$B_p^0 = \{\varphi \in L_p : \ \|\varphi\|_p \le 1, \ \varphi \perp 1\},$$

із фіксованим твірним ядром $\Psi_{\bar\beta} \in L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$\Psi_{\bar\beta}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right),$$

де $\psi = \psi(k)$ і $\bar\beta = \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ — довільні послідовності дійсних чисел. Якщо $\psi(k) \ne 0$, $k \in \mathbb{N}$, то функцію φ у зображенні (1) називають $(\psi, \bar\beta)$-похідною функції f і позначають $f_{\bar\beta}^{\psi}$. Поняття $(\psi, \bar\beta)$-похідної введено О. І. Степанцем (див., наприклад, [1]). Оскільки $\varphi \in L_p$, а $\Psi_{\bar\beta} \in L_{p'}$, то (див. [1, с. 144]) згортка (1) є неперервною функцією, тобто $C_{\bar\beta,p}^{\psi} \subset C$.

При $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, класи $C_{\bar\beta,p}^{\psi}$ позначатимемо через $C_{\beta,p}^{\psi}$. При $\psi(k) = k^{-r}, r > 0$, класи $C_{\bar\beta,p}^{\psi}$ будемо позначати через $W_{\bar\beta,p}^{r}$. Якщо $\psi(k) = k^{-r}$ і $\beta_k \equiv r$, $r \in \mathbb{N}$, то $W_{\bar\beta,p}^{r}$ є відомими класами $r-$диференційовних функцій W_p^r. Якщо $\psi(k) = q^k$, $0 < q < 1$, то класи $C_{\bar\beta,p}^{\psi}$ будемо позначати через $C_{\bar\beta,p}^{q}$. При $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, $C_{\bar\beta,p}^{q}$ є відомими класами інтегралів Пуассона $C_{\beta,p}^{q}$. Зрозуміло, що при $p = 2$ умова включення $\Psi_{\bar\beta} \in L_2$ еквівалентна виконанню умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) < \infty. \tag{2}$$

Нехай $f(x)$ — довільна 2π-періодична неперервна функція. Через $\widetilde{S}_n(f; x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку n, що інтерполює $f(x)$ у точках $x_k^{(n)} = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, тобто такий, що

$$\widetilde{S}_n(f; x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \quad k = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Інтерполяційний тригонометричний поліном $\widetilde{S}_n(f; x)$ можна записати (див., наприклад, [2, с. 128-129]) у явному вигляді наступним чином:

$$\widetilde{S}_n(f; x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx), \tag{3}$$

де

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \cos kx_i^{(n)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \sin kx_i^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Зв'язок між коефіцієнтами Фур'є a_k і b_k функції $f(x)$ ($f \in C$) і коефіцієнтами $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$ інтерполяційного полінома $\widetilde{S}_n(f;x)$ виражається за допомогою рівностей [2, с. 130]

$$a_k^{(n)} = a_k + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m(2n+1)+k} + a_{m(2n+1)-k}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

$$b_k^{(n)} = b_k + \sum_{m=1}^{\infty} (b_{m(2n+1)+k} - b_{m(2n+1)-k}), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Розглянемо лінійні поліноміальні методи наближення функцій f з класів $C^{\psi}_{\bar{\beta},2}$, які побудовані на основі їх коефіцієнтів Фур'є–Лагранжа $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$. Нехай $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ і $\mathrm{M} = \|\mu_k^{(n)}\|$, $n = 0, 1, \ldots,$ $k = 0, 1, \ldots,$ — нескінченні трикутні матриці дійсних чисел такі, що

$$\begin{aligned} &\lambda_0^{(n)} = 1, && \mu_0^{(n)} = 0, && n = 0, 1, 2, \ldots, \\ &\lambda_k^{(n)} = 0, && \mu_k^{(n)} = 0, && k = n+1, n+2, \ldots, \\ &\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1, && \lim_{n\to\infty} \mu_k^{(n)} = 0, && k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Позначимо через $\widetilde{U}_n = \widetilde{U}_n(\Lambda; \mathrm{M})$ лінійний оператор, який кожній функції $f \in C$ ставить у відповідність тригонометричний поліном вигляду

$$\widetilde{U}_n(f;x) = \widetilde{U}_n(f;\Lambda;\mathrm{M};x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\lambda_k^{(n)}(a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx) +$$

$$+ \mu_k^{(n)}(-b_k^{(n)} \cos kx + a_k^{(n)} \sin kx)\Big), \tag{7}$$

де $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$ — коефіцієнти, що визначаються рівностями (4) і (5).

У даній роботі розглядається задача про знаходження точних значень величин

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,2};\Lambda;\mathrm{M};x)=\sup_{f\in C^{\psi}_{\bar\beta,2}}|f(x)-\widetilde{U}_n(f;x)|. \tag{8}$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай послідовність дійсних чисел* $\psi(k)$ *задовольняє умову* (2), *а* $\Lambda=\|\lambda_k^{(n)}\|$ *і* $\mathrm{M}=\|\mu_k^{(n)}\|$ *— умови* (6). *Тоді для довільної послідовності* $\bar\beta=\beta_k,\beta_k\in\mathbb{R}$, *і довільного* $n\in\mathbb{N}$ *у кожній точці* $x\in\mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,2};\Lambda;\mathrm{M};x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left((1-\lambda_k^{(n)})^2+(\mu_k^{(n)})^2\right)\psi^2(k)+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n}\left(\left(\cos m(2n+1)x-\lambda^{(n)}_{|k-m(2n+1)|}\right)^2+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\sin m(2n+1)x+\mu^{(n)}_{|k-m(2n+1)|}\right)^2\right)\psi^2(k)\right)^{1/2}.$$

Доведення. Для довільної функції f з класу $C^{\psi}_{\bar\beta,2}$ згідно з (1) мають місце формули

$$a_\nu\cos kx+b_\nu\sin kx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\nu)\cos\left(\nu(x-t)-(\nu-k)x-\frac{\beta_\nu\pi}{2}\right)\varphi(t)\,dt, \tag{9}$$

$$-b_\nu\cos kx+a_\nu\sin kx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\nu)\sin\left(\nu(x-t)-(\nu-k)x-\frac{\beta_\nu\pi}{2}\right)\varphi(t)\,dt. \tag{10}$$

Об'єднуючи (1), (4)–(7), (9) та (10), для $f\in C^{\psi}_{\bar\beta,2}$ одержуємо

$$f(x)-\widetilde{U}_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\left((1-\lambda_k^{(n)})\cos\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right)-\mu_k^{(n)}\sin\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right)\right)+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n}\psi(\nu)\left(\cos\left(\nu t-\frac{\beta_\nu\pi}{2}\right)-\right.$$

$$-\lambda_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)}\cos\left(\nu t-m(2n+1)x-\frac{\beta_\nu\pi}{2}\right)-$$

$$\left.\left.-\mu_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)}\sin\left(\nu t-m(2n+1)x-\frac{\beta_\nu\pi}{2}\right)\right)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\left(\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\left((1-\lambda_k^{(n)})\cos\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\mu_k^{(n)}\sin\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right)\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n}\psi(\nu)\times$$

$$\times\left(\left(\cos m(2n+1)x-\lambda_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)}\right)\cos\left(\nu t-m(2n+1)x-\frac{\beta_\nu\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\left(\sin m(2n+1)x+\mu_{|\nu-m(2n+1)|}^{(n)}\right)\sin\left(\nu t-m(2n+1)x-\frac{\beta_\nu\pi}{2}\right)\right)\right)dt. \tag{11}$$

Розглядаючи точну верхню межу відносно функцій f з класу $C^{\psi}_{\bar\beta,2}$ у лівій і правій частині рівності (11) та враховуючи інваріантність множин $C^{\psi}_{\bar\beta,2}$ відносно зсуву аргументу, в кожній точці $x\in\mathbb{R}$ отримуємо

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,2};\Lambda;\mathrm{M};x)=\frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in B_2^0}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\left((1-\lambda_k^{(n)})\cos\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right)-\mu_k^{(n)}\sin\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right)\right)+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n}\psi(\nu)\times$$

$$\times\Bigg(\Big(\cos m(2n+1)x-\lambda^{(n)}_{|\nu-m(2n+1)|}\Big)\cos\Big(\nu t-m(2n+1)x-\frac{\beta_\nu\pi}{2}\Big)-$$

$$-\Big(\sin m(2n+1)x+\mu^{(n)}_{|\nu-m(2n+1)|}\Big)\sin\Big(\nu t-m(2n+1)x-\frac{\beta_\nu\pi}{2}\Big)\Big)\Bigg)dt. \tag{12}$$

Застосовуючи до правої частини (12) співвідношення двоїстості [3, с. 27]

$$\sup_{\varphi\in B_2^0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)u(t)dt=\inf_{\alpha\in\mathbb{R}}\|u-\alpha\|_2,\quad u\in L_2,$$

та рівність Парсеваля, одержуємо

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,2};\Lambda;\mathrm{M};x)=\frac{1}{\pi}\inf_{\alpha\in\mathbb{R}}\Bigg\|\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\Big((1-\lambda_k^{(n)})\cos\Big(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\Big)-$$

$$-\mu_k^{(n)}\sin\Big(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\Big)\Big)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n}\psi(\nu)\times$$

$$\times\Bigg(\Big(\cos m(2n+1)x-\lambda^{(n)}_{|\nu-m(2n+1)|}\Big)\cos\Big(\nu t-m(2n+1)x-\frac{\beta_\nu\pi}{2}\Big)-$$

$$-\Big(\sin m(2n+1)x+\mu^{(n)}_{|\nu-m(2n+1)|}\Big)\times$$

$$\times\sin\Big(\nu t-m(2n+1)x-\frac{\beta_\nu\pi}{2}\Big)\Big)-\alpha\Bigg\|_2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\inf_{\alpha\in\mathbb{R}}\Bigg(\sum_{k=1}^{n}\Big((1-\lambda_k^{(n)})^2+(\mu_k^{(n)})^2\Big)\psi^2(k)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n}\Bigg(\Big(\cos m(2n+1)x-\lambda^{(n)}_{|k-m(2n+1)|}\Big)^2+$$

$$+\Big(\sin m(2n+1)x+\mu^{(n)}_{|k-m(2n+1)|}\Big)^2\Bigg)\psi^2(k)+\alpha^2\Bigg)^{1/2}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=1}^{n} \Big((1-\lambda_k^{(n)})^2 + (\mu_k^{(n)})^2 \Big) \psi^2(k) + \right.$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \bigg(\Big(\cos m(2n+1)x - \lambda_{|k-m(2n+1)|}^{(n)} \Big)^2 +$$

$$\left. + \Big(\sin m(2n+1)x + \mu_{|k-m(2n+1)|}^{(n)} \Big)^2 \bigg) \psi^2(k) \right)^{1/2}.$$

Теорему 1 доведено.

Якщо

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \qquad і \quad \mu_k^{(n)} \equiv 0,$$

то згідно з (3) і (7) тригонометричний поліном $\widetilde{U}_n(f;\Lambda;\mathrm{M};x)$ є інтерполяційним тригонометричним поліномом $\widetilde{S}_n(f;x)$ функції f порядку n, тобто $\widetilde{U}_n(f;\Lambda;\mathrm{M};x) = \widetilde{S}_n(f;x)$. В цьому випадку, як випливає з теореми 1, при всіх $x \in \mathbb{R}$ для величин

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2};\widetilde{S}_n;x) = \sup_{f \in C^{\psi}_{\bar{\beta},2}} |f(x) - \widetilde{S}_n(f;x)|, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

виконується рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2};\widetilde{S}_n;x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{(2n+1)mx}{2} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Рівність (14) встановлено у [4].

Поряд з $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2};\widetilde{S}_n;x)$ розглянемо величини

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2};\widetilde{S}_n)_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\bar{\beta},2}} \|f(\cdot) - \widetilde{S}_n(f;\cdot)\|_C, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, а послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ задовольняє умову (2) і така, що послідовність $\alpha_m = m \sum\limits_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k)$*

є опуклою донизу. Тоді для довільної $\bar\beta = \beta_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, виконується рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n)_C = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=(2l-1)(2n+1)-n}^{(2l-1)(2n+1)+n} \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Підносячи до квадрату обидві частини рівності (14), отримуємо

$$\mathcal{E}^2(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (1 - \cos(2n+1)mx) \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k).$$

При кожному $n \in \mathbb{N}$ величина $\mathcal{E}^2(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x)$ є парною періодичною функцією від змінної x з періодом $T = \dfrac{2\pi}{2n+1}$, тому досить її розглядати на $[0, \frac{\pi}{2n+1}]$. За виконання умов теореми 2, як випливає з [5, с. 297], похідна

$$\frac{d}{dx}\mathcal{E}^2(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x) = \frac{2(2n+1)}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k) \sin(2n+1)mx$$

є додатною на $(0, \frac{\pi}{2n+1})$ функцією, а, отже, максимум величини $\mathcal{E}^2(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x)$ досягається в точці $x = \dfrac{\pi}{2n+1}$ і приймає значення

$$\mathcal{E}^2(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n)_C = \max_{x\in\mathbb{R}} \mathcal{E}^2(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x) = \mathcal{E}^2(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; \frac{\pi}{2n+1}) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sin^2 \frac{(2l-1)\pi}{2} \sum_{k=(2l-1)(2n+1)-n}^{(2l-1)(2n+1)+n} \psi^2(k) + \sin^2 l\pi \sum_{k=2l(2n+1)-n}^{2l(2n+1)+n} \psi^2(k) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=(2l-1)(2n+1)-n}^{(2l-1)(2n+1)+n} \psi^2(k).$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Із означень (13) і (15) випливають очевидні співвідношення

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x) \le \max_{x\in\mathbb{R}} \mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n; x) = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \widetilde{S}_n)_C.$$

Як випливає з теореми 2, опуклість донизу послідовності $\alpha_m = m \sum\limits_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k)$ є достатньою умовою того, що величини $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2};\widetilde{S}_n;x)$ (13) досягають значень $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2};\widetilde{S}_n)_C$ рівно посередині між вузлами інтерполяції, тобто при $x = \frac{\pi}{2n+1} + \frac{2j\pi}{2n+1}, j \in \mathbb{Z}$. Неважко переконатись, що при достатньо великих n умову опуклості послідовності α_m задовольняють $\psi(k) = q^k$, $q \in (0,1)$. Утім, наступне твердження показує, що для зазначених $\psi(k)$ рівності

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2};\widetilde{S}_n;\frac{\pi}{2n+1}) = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2};\widetilde{S}_n)_C, \tag{16}$$

мають місце при всіх $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Нехай $q \in (0,1)$, $\bar\beta = \beta_k$ — довільна послідовність дійсних чисел і $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\mathcal{E}(C^{q}_{\bar\beta,2};\widetilde{S}_n)_C = \mathcal{E}(C^{q}_{\bar\beta,2};\widetilde{S}_n;\frac{\pi}{2n+1}) = \frac{2q^{n+1}}{\sqrt{\pi(1-q^2)(1+q^{2(2n+1)})}}.$$

Доведення. Згідно з наслідком 1 роботи [4]

$$\mathcal{E}(C^{q}_{\bar\beta,2};\tilde{S}_n;x) = \left|\sin\frac{(2n+1)x}{2}\right| \frac{2q^{n+1}}{\sqrt{\pi(1-q^2)}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+q^{2(2n+1)}}{1-2q^{2(2n+1)}\cos(2n+1)x + q^{4(2n+1)}}\right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Рівність (17) можна записати у еквівалентному вигляді:

$$\mathcal{E}^2(C^{q}_{\bar\beta,2};\tilde{S}_n;x) = \frac{2q^{2(n+1)}(1+q^{2(2n+1)})(1-\cos(2n+1)x)}{\pi(1-q^2)(1-2q^{2(2n+1)}\cos(2n+1)x + q^{4(2n+1)})}. \tag{18}$$

Розглянемо функцію

$$y(\tau) = \frac{1-\cos\tau}{1-2\rho\cos\tau+\rho^2}, \quad \rho \in (0,1).$$

Оскільки

$$y'(\tau) = \frac{(1-\rho)^2\sin\tau}{(1-2\rho\cos\tau+\rho^2)^2},$$

то максимум функції $y(\tau)$ досягається в точці $\tau = \pi$ і приймає значення

$$y_{\max} = y(\pi) = \frac{2}{(1+\rho)^2}.$$

Отже, з урахуванням (18),

$$\mathcal{E}^2(C^q_{\bar\beta,2}; \tilde S_n)_C = \max_{x\in\mathbb{R}} \mathcal{E}^2(C^q_{\bar\beta,2}; \tilde S_n; x) =$$

$$= \frac{4q^{2(n+1)}(1+q^{2(2n+1)})}{\pi(1-q^2)(1+q^{2(2n+1)})^2} = \frac{4q^{2(n+1)}}{\pi(1-q^2)(1+q^{2(2n+1)})}.$$

Теорему 3 доведено.

Наступне твердження показує, що (16) має місце для $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 1/2$.

Теорема 4. *Нехай* $\psi(k) = k^{-r},\ r > 1/2,\ \bar\beta = \beta_k$ *— довільна послідовність дійсних чисел і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\mathcal{E}(W^r_{\bar\beta,2}; \widetilde S_n)_C = \mathcal{E}(C^\psi_{\bar\beta,2}; \widetilde S_n; \frac{\pi}{2n+1}) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi\Gamma(2r)}(2n+1)^r} \left(\int\limits_0^1 \frac{\rho^{-n/(2n+1)} \ln^{2r-1}\rho^{-1}}{(1-\rho^{1/(2n+1)})(1+\rho)} d\rho \right)^{1/2},$$

де $\Gamma(x)$ *— гамма-функція.*

Доведення. Згідно з наслідком 2 роботи [4]

$$\mathcal{E}(W^r_{\bar\beta,2}; \tilde S_n; x) = \left| \sin\frac{(2n+1)x}{2} \right| \frac{2}{\sqrt{\pi\Gamma(2r)}(2n+1)^r} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^1 \frac{\rho^{-n/(2n+1)}(1+\rho) \ln^{2r-1}\rho^{-1}}{(1-\rho^{1/(2n+1)})(1-2\rho\cos(2n+1)x+\rho^2)} d\rho \right)^{1/2}, \ x \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Запишемо рівність (19) у наступному вигляді:

$$\mathcal{E}^2(W^r_{\bar\beta,2}; \tilde S_n; x) = \frac{2(1-\cos(2n+1)x)}{\pi\Gamma(2r)(2n+1)^{2r}} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \frac{\rho^{-n/(2n+1)}(1+\rho)\ln^{2r-1}\rho^{-1}}{(1-\rho^{1/(2n+1)})(1-2\rho\cos(2n+1)x+\rho^2)}d\rho. \tag{20}$$

З рівності (20) отримуємо

$$\frac{d}{dx}\,\mathcal{E}^2(W^r_{\bar\beta,2};\widetilde{S}_n;x)=\frac{2(2n+1)\sin(2n+1)x}{\pi\Gamma(2r)(2n+1)^{2r}}\times$$

$$\times \int\limits_0^1 \frac{\rho^{-n/(2n+1)}(1+\rho)(1-\rho)^2\ln^{2r-1}\rho^{-1}}{(1-\rho^{1/(2n+1)})(1-2\rho\cos(2n+1)x+\rho^2)^2}\,d\rho. \tag{21}$$

Оскільки інтеграл в правій частині (21) додатній, то максимум $\mathcal{E}^2(W^r_{\bar\beta,2};\tilde{S}_n;x)$ досягається в точці $x=\frac{\pi}{2n+1}$ і, з урахуванням (20), приймає значення

$$\mathcal{E}^2(W^r_{\bar\beta,2};\widetilde{S}_n)_C=\max_{x\in\mathbb{R}}\mathcal{E}^2(W^r_{\bar\beta,2};\tilde{S}_n;x)=$$

$$=\frac{4}{\pi\Gamma(2r)(2n+1)^{2r}}\int\limits_0^1\frac{\rho^{-n/(2n+1)}\ln^{2r-1}\rho^{-1}}{(1-\rho^{1/(2n+1)})(1+\rho)}d\rho.$$

Теорему 4 доведено.

Література

[1] *Степанец А. И.* Методы теории приближений. В 2-х ч. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с.

[2] *Степанец А. И.* Методы теории приближений. В 2-х ч. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.

[3] *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 423 с.

[4] *Сердюк А. С., Соколенко І. В.* Наближення класів $(\psi,\bar\beta)-$диференційовних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України /Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу/. — К.: Ін-т математики НАН України, 2016. — **13**, №1. — С. 289– 299.

[5] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 616 с.