Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 61–81

УДК 517.54 + 517.12

Г. М. Веселовська[1]***, А. П. Голуб***[2]

[1,2](*Інститут математики НАН України, Київ*)

[1] **anaweseka@gmail.com**, [2] **apholub@gmail.com**

Раціональні апроксиманти типу Паде одного класу подвійних степеневих рядів

Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського

С помощью метода обобщенных моментных представлений построены и изучены двумерные аппроксиманты типа Паде для некоторых специальных степенных рядов.

Two–dimensional Padé type approximants are constructed and studied for some special power series using method of generalized moment representations.

Метод двовимірних узагальнених моментних зображень [1], що є поширенням методу, запропонованого В. К. Дзядиком [2], дозволяє будувати двовимірні апроксиманти типу Паде для різних класів функцій, зокрема для деяких гіпергеометричних рядів двох змінних. Низку апроксимант зазначеного типу було побудовано в [1, 3–6].

Означення 1 ([1])**.** *Узагальненим моментним зображенням двовимірної числової послідовності* $\{s_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$ *на добутку лінійних просторів* $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ *називається сукупність рівностей*

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n}\rangle, \quad k,j,m,n\in\mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

де $\{x_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{X}$*,* $\{y_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{Y}$*, а* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— білінійна форма на* $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$*.*

Поставимо у відповідність двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ формальний степеневий ряд двох змінних:

$$f(z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m. \tag{2}$$

Головним засобом побудови раціональних апроксимант для функцій, що можуть бути записані у вигляді (2), з допомогою методу узагальнених моментних зображень, є наступний результат.

Теорема 1 ([1]). *Нехай для коефіцієнтів формального степеневого ряду двох змінних (2) має місце узагальнене моментне зображення (1) на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ за білінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Тоді, якщо при деяких $N_1,N_2\in\mathbb{Z}_+$ існує узагальнений поліном*

$$X_{N_1,N_2}=\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} x_{k,m}$$

з відмінним від нуля старшим коефіцієнтом $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)}$, для якого виконуються умови біортогональності

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n}\rangle = 0$$

при $(k,m)\in[0,N_1]\times[0,N_2]\backslash\{(N_1,N_2)\}$, то раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w)=\frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w)=\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} z^j w^n,$$

і

$$P_{\mathcal{N}}(z,w)=\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n}+$$

$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n}+$$

$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n},$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (2) *для всіх* $(k,m)\in\mathcal{E}=[0,2N_1]\times[0,2N_2]\backslash\{(2N_1,2N_2)\}$.

Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — банахові простори, і у просторі $\mathcal{X}$ існують обмежені лінійні оператори $A_1, A_2\colon \mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$, які комутують між собою, і такі, що

$$A_1 x_{k,m} = x_{k+1,m},$$

$$A_2 x_{k,m} = x_{k,m+1},$$

для всіх $k,m\in\mathbb{Z}_+$, а у просторі $\mathcal{Y}$ існують лінійні обмежені оператори $A_1^*, A_2^*\colon \mathcal{Y}\longrightarrow\mathcal{Y}$, спряжені до операторів A_1 та A_2 відповідно відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$, в тому сенсі, що

$$\langle A_l x, y\rangle = \langle x, A_l^* y\rangle,\quad l=1,2,$$

для $\forall x\in\mathcal{X}, \forall y\in\mathcal{Y}$. Тоді зображення (1) можна записати наступним чином:

$$s_{k,m} = \langle A_1^k A_2^m x_{0,0}, y_{0,0}\rangle,\quad k,m\in\mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Це дає змогу подати функції f, зображувані степеневими рядами вигляду (2), таким чином:

$$f(z,w) = \langle \mathcal{R}_z(A_1)\mathcal{R}_w(A_2)x_{0,0}, y_{0,0}\rangle, \tag{4}$$

де резольвентна функція $\mathcal{R}_w$ оператора A визначається рівністю $\mathcal{R}_w(A)=(I-wA)^{-1}$.

Нехай тепер за даних умов для обмеженого оператора $A\colon\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$ та деяких елементів $\tilde{x}_0\in\mathcal{X}$ та $\tilde{y}_0\in\mathcal{Y}$ системи елементів

$$\{\tilde{x}_k = A^k\tilde{x}_0\}_{k\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{X}$$

та

$$\{\tilde{y}_j = A^{*k}\tilde{y}_0\}_{j\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{Y}$$

є лінійно незалежними та допускають невироджену біортогоналізацію відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$ так, що при цьому існують системи узагальнених поліномів $\{\widetilde{X}_N\}_{N\in\mathbb{Z}_+}$, $\{\widetilde{Y}_M\}_{M\in\mathbb{Z}_+}$, для яких виконуються умови

$$\widetilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} \tilde{x}_k, \quad \tilde{c}_N^{(N)} \neq 0, N \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

$$\widetilde{Y}_M = \sum_{j=0}^{M} \tilde{d}_j^{(M)} \tilde{y}_j, \quad \tilde{d}_M^{(M)} \neq 0, M \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

$$\langle \widetilde{X}_N, \widetilde{Y}_m \rangle = \delta_{M,N} = \begin{cases} 1, & M = N \\ 0 & M \neq N \end{cases}, \quad M, N \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

Також позначимо

$$\tilde{s}_k = \langle A^k \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \rangle, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{8}$$

Як відомо (див., наприклад, [7]), для того, щоб була можливою невироджена біортогоналізація вигляду (7), необхідно і достатньо, щоб визначники Ганкеля

$$\widetilde{H}_N = \det \|\tilde{s}_{k+j}\|_{k,j=0}^N \neq 0, \quad \forall N \in \mathbb{Z}_+.$$

Також в [7] показано, що за цих умов будуть також існувати невироджені апроксиманти Паде $[N-1/N]_f, N \in \mathbb{N}$, степеневого ряду

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{s}_k z^k. \tag{9}$$

За цих умов ряд (9) буде збігатися до аналітичної в околі початку координат функції, а сама функція $\tilde{f}$ матиме зображення

$$\tilde{f}(z) = \langle \mathcal{R}_z(A) \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \rangle.$$

Тепер означимо оператори A_1 та A_2 наступним чином:

$$A_1 = A^2, \quad A_2 = A^3, \tag{10}$$

та припустимо, що для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$ має місце узагальнене моментне зображення вигляду (1), для якого послідовності $\{x_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$ та $\{y_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{Z}_+}$ визначаються рівностями

$$x_{k,m} = A_1^k A_2^m \tilde{x}_0 = A^{2k+3m} \tilde{x}_0, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{11}$$

$$y_{j,n} = A_1^{*k} A_2^{*m} \tilde{y}_0 = A^{*2k+3m} \tilde{y}_0, \quad j,n \in \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

Розглянемо у такому випадку ряд за двома змінними

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m = \sum_{k,m=0}^{\infty} \tilde{s}_{2k+3m} z^k w^m. \tag{13}$$

Щоб отримати запис функції f у вигляді (4), розглянемо таке допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай $\mathcal{X}$ — лінійний нормований простір, $A\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ — обмежений лінійний оператор. Тоді в усіх точках регулярності резольвентних функцій $\mathcal{R}_z(A^2)$ та $\mathcal{R}_w(A^3)$ справджується рівність*

$$\mathcal{R}_z(A^2)\mathcal{R}_w(A^3) = \frac{1}{w^2 - z^3} \big(-(z^3 + wz^2 A)\mathcal{R}_z(A^2) + \\ + \left(w^2 + wz^2 A + zw^2 A^2\right) \mathcal{R}_w(A^3) \big). \tag{14}$$

Доведення. Застосуємо до обох частин рівності (14) оператор

$$(w^2 - z^3)(I - zA^2)(I - wA^3).$$

Тоді отримаємо:

$$w^2 - z^3 = \\ = (I - wA^3)(z^3 + wz^2 A) + (I - zA^2)\left(w^2 + wz^2 A + zw^2 A^2\right) = \\ = w^2 - z^3.$$

Оскільки отримана рівність є очевидною, а z та w є регулярними точками відповідних резольвентних функцій, то звідси отримуємо початкову рівність (14).

Далі, скориставшись представленням резольвентної функції вигляду $\mathcal{R}_z(A^p), p \geq 2$, через резольвентні функції оператора A (див. [5]) та лемою 1, отримаємо, що

$$\mathcal{R}_z(A^2)\mathcal{R}_w(A^3) = \frac{1}{w^2 - z^3} \Bigg(-(z^3 + wz^2 A) \sum_{r=0}^{1} \mathcal{R}_{(-1)^r z^{1/2}}(A) + \\ + \left(w^2 + wz^2 A + zw^2 A^2\right) \sum_{r=0}^{2} \mathcal{R}_{w^{1/3}\xi_r^{(3)}}(A) \Bigg), \tag{15}$$

де $\xi_r^{(3)}, r = \overline{0,2}$, — корені 3-го степеня з одиниці, тобто,

$$\xi_0^{(3)} = 1, \quad \xi_1^{(3)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \xi_2^{(3)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Тоді, відповідно з рівностями (4) та (15), функція f матиме зображення

$$f(z,w) = \frac{1}{w^2 - z^3}\left(-\left\langle (z^3 + wz^2 A)\sum_{r=0}^{1}\mathcal{R}_{(-1)^r z^{1/2}}(A)\tilde{x}_0, \tilde{y}_0\right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left\langle \left(w^2 + wz^2 A + zw^2 A^2\right)\sum_{r=0}^{2}\mathcal{R}_{w^{1/3}\xi_r^{(3)}}(A)\tilde{x}_0, \tilde{y}_0\right\rangle\right). \quad (16)$$

Згідно з теоремою 1 для того, щоб побудувати апроксиманти Паде для функції f, потрібно побудувати біортогональні поліноми

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} x_{k,m}, \quad (17)$$

такі, що

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n}\rangle = 0, \quad (18)$$

при $(j,n) \in [0,N_1] \times [0,N_2] \backslash \{(N_1,N_2)\}$.

Очевидно, що поліном X_{N_1,N_2} може бути зображений у вигляді

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{p=0, p\neq 1, 2N_1+3N_2-1}^{2N_1+3N_2} \widehat{c}_p^{(N_1,N_2)} \tilde{x}_p. \quad (19)$$

Але лінійна оболонка системи функцій $\{\tilde{x}_p\}_{p=0}^{2N_1+3N_2}$ співпадає з лінійною оболонкою системи функцій $\{\widetilde{X}_M\}_{M=0}^{2N_1+3N_2}$, а також з лінійною оболонкою системи функцій $\{\widetilde{X}_M^{(2)}\}_{M=0}^{2N_1+3N_2}$, де $\widetilde{X}_M^{(2)}$ — узагальнені поліноми вигляду

$$\widetilde{X}_M^{(2)} = \sum_{k=0}^{M} \check{c}_p^{(M)} \tilde{x}_k, \quad \check{c}_M^{(M)} \neq 0, M \in \mathbb{Z}_+, \quad (20)$$

такі, що

$$\langle \widetilde{X}_M^{(2)}, \tilde{y}_j\rangle = 0, \quad j = \overline{2, M+1}. \quad (21)$$

Зауваження 1. Для існування поліномів $\widetilde{X}_M^{(2)}$ треба, замість умови $\widetilde{H}_N \neq 0, \forall N \in \mathbb{Z}_+$, вимагати виконання умови

$$\widetilde{H}_{N,2} = \det \|\tilde{s}_{k+j+2}\|_{k,j=0}^N \neq 0, \forall N \in \mathbb{Z}_+.$$

Тому, без обмежень загальності, поліноми X_{N_1,N_2} можна записати у вигляді лінійної комбінації поліномів $\widetilde{X}_p^{(2)}$

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{p=0}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \widetilde{X}_p^{(2)}.$$

Коефіцієнти $\gamma_p^{(N_1,N_2)}, p = \overline{0, 2N_1 + 3N_2}$, мають визначатися з умов біортогональності

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n} \rangle = 0,$$

де

$$y_{j,n} = A^{*(2j+3n)} \tilde{y}_0, \quad \text{при } (j,n) \in [0, N_1] \times [0, N_2] \backslash \{(N_1, N_2)\},$$

або ж

$$\langle X_{N_1,N_2}, \tilde{y}_j \rangle = 0, \qquad \text{при } j = 0, 2, 3, \ldots, 2N_1 + 3N_2 - 2.$$

Послідовно підставляючи у другу рівність значення $j = 2, 3 \ldots, 2N_1 + 3N_2 - 2$, отримуємо

$$\gamma_0^{(N_1,N_2)} = \gamma_1^{(N_1,N_2)} = \gamma_2^{(N_1,N_2)} = \cdots = \gamma_{2N_1+3N_2-4}^{(N_1,N_2)} = 0.$$

Отже,

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \widetilde{X}_p^{(2)}. \tag{22}$$

Решту коефіцієнтів визначаємо з умов ортогональності X_{N_1,N_2} до $y_{0,0}^{(N_1,N_2)}$ та відсутності в X_{N_1,N_2} коефіцієнтів при $\tilde{x}_1$ та $\tilde{x}_{2N_1+3N_2-1}$.
Отримуємо

$$\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \sum_{k=0}^{p} \check{c}_k^{(p)} \langle \tilde{x}_k, \tilde{y}_0 \rangle =$$

$$= \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \sum_{k=0}^{p} \check{c}_k^{(p)} \tilde{s}_k = 0,$$

та

$$\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_1^{(p)} = 0,$$

а також

$$\sum_{p=2N_1+3N_2-1}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2N_1+3N_2-1}^{(p)} = 0$$

Тобто для визначення коефіцієнтів $\gamma_p^{(N_1,N_2)}$, при $p=\overline{2N_2+3N_2-3, 2N_2+3N_2}$, одержано однорідну систему 3-х лінійних рівнянь з 4-ма невідомими.

Далі, для зручності запису, будемо використовувати такі позначення:

$$N = 2N_1 + 3N_2 \quad \text{та} \quad a_p = \sum_{k=0}^{p} \check{c}_k^{(p)} \tilde{s}_k.$$

Тоді матриця отриманої системи матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} \check{c}_1^{(N-3)} & \check{c}_1^{(N-2)} & \check{c}_1^{(N-1)} & \check{c}_1^{(N)} \\ 0 & 0 & \check{c}_{N-1}^{(N-1)} & \check{c}_{N-1}^{(N)} \\ a_{N-3} & a_{N-2} & a_{N-1} & a_N \end{pmatrix}.$$

Зафіксувавши старші коефіцієнти $\gamma_N^{(N_1,N_2)}$, звідси можемо визначити інші коефіцієнти $\gamma_p^{(N_1,N_2)}, p = N-3, N-2, N-1$, при умові що детермінант матриці не дорівнює нулеві. Розв'язки системи мають вигляд

$$\begin{cases} \gamma_{N-1}^{(N_1,N_2)} = -\check{c}_{N-1}^{(N)} \frac{\gamma_N^{(N_1,N_2)}}{c_{N-1}^{(N-1)}}; \\ \gamma_{N-2}^{(N_1,N_2)} = \frac{\gamma_N^{(N_1,N_2)}}{\check{c}_{N-1}^{(N-1)}} \left[\frac{a_{N-3}}{\check{c}_1^{(N-3)}} \left(\check{c}_{N-1}^{(N)} \check{c}_1^{(N-1)} - \check{c}_1^{(N)} \check{c}_{N-1}^{(N-1)} \right) - \right. \\ \left. -a_{N-1} \check{c}_{N-1}^{(N)} + a_N \check{c}_{N-1}^{(N-1)} \right] \times \left[\check{c}_1^{(N-2)} \left(\frac{a_{N-3}}{\check{c}_1^{(N-3)}} - \frac{a_{N-2}}{\check{c}_1^{(N-2)}} \right) \right]^{-1}; \\ \gamma_{N-3}^{(N_1,N_2)} = \frac{\gamma_N^{(N_1,N_2)}}{\check{c}_{N-1}^{(N-1)}} \left[\frac{a_{N-2}}{\check{c}_1^{(N-2)}} \left(\check{c}_{N-1}^{(N)} \check{c}_1^{(N-1)} - \check{c}_1^{(N)} \check{c}_{N-1}^{(N-1)} \right) + \right. \\ \left. +a_{N-1} \check{c}_{N-1}^{(N)} + a_N \check{c}_{N-1}^{(N-1)} \right] \times \left[\check{c}_1^{(N-3)} \left(\frac{a_{N-2}}{\check{c}_1^{(N-2)}} - \frac{a_{N-3}}{\check{c}_1^{(N-3)}} \right) \right]^{-1}. \end{cases} \quad (23)$$

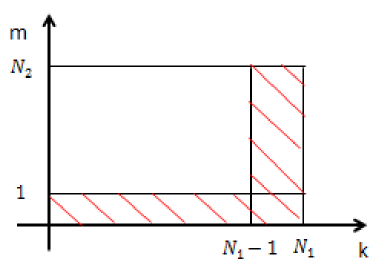
А це дає можливість виразити коефіцієнти $\tilde{c}_p^{(N_1,N_2)}$, для $p = 0, 2, \ldots, N-2, N$ в зображенні (20) через коефіцієнти поліномів $\widetilde{X}_p^{(2)}$ наступним чином

$$\begin{cases} \widehat{c}_q^{(N_1,N_2)} = \sum\limits_{p=N-3}^{N} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_q^{(p)}, \quad q = \overline{0, N-3}; \\ \widehat{c}_{N-2}^{(N_1,N_2)} = \sum\limits_{p=N-2}^{N} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_{N-2}^{(p)}; \\ \widehat{c}_N^{(N_1,N_2)} = \gamma_N^{(N_1,N_2)} \check{c}_N^{(N)}. \end{cases} \tag{24}$$

За цими коефіцієнтами, в свою чергу, можемо визначити коефіцієнти $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$ при $(k,m) \in [0, N_1] \times [0, N_2]$ для того, щоб можна було записати поліноми X_{N_1,N_2} у вигляді (19).

Для визначення $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$ квадрат цілочисельної сітки $[0, N_1] \times [0, N_2]$ можна звузити, наприклад, до множини (див. Мал. 1):

$$\Gamma_{N_1,N_2} = \Big([0, N_1] \times [0, 1]\Big) \cup \Big([N_1 - 2, N_1] \times [2, N_2]\Big). \tag{25}$$



Мал. 1: Множина Γ_{N_1,N_2}

Функція $\lambda(k,m) = 2k + 3m$ відображає взаємно однозначно множину Γ_{N_1,N_2} на множину $\widetilde{\Gamma}_{N_1,N_2} = \{p \in [0, 2N_1 + 3N_2] : p \neq 1, p \neq 2N_1 + 3N_2 - 1\}$. Тому існує обернене відображення до відображення λ:

- при $p = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0, m = 0;$

- при $p \in [2, 2N_1 + 1] \quad \Rightarrow$
$k = \begin{cases} \frac{p}{2}, \text{якщо } p - \text{парне}, m = 0, \\ \frac{p-3}{2}, \text{якщо } p - \text{непарне}, m = 1; \end{cases}$

- при $p \in [2N_1 + 2, 2N_1 + 3N_2 - 2] \quad \Rightarrow$
$m = \begin{cases} \frac{p-2N_1}{3}, \text{якщо } p - 2N_1 - \text{ділиться на } 3, k = N_1, \\ \frac{p-2N_1+2}{3}, \text{якщо } p - 2N_1 + 2 - \text{ділиться на } 3, k = N_1 - 1, \\ \frac{p-2N_1+4}{3}, \text{якщо } p - 2N_1 + 4 - \text{ділиться на } 3, k = N_1 - 2; \end{cases}$

- при $p = 2N_1 + 3N_2 \quad \Rightarrow \quad k = N_1, m = N_2.$

Звідси, для $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$, при $(k,m) \in \Gamma_{N_1,N_2}$, отримуємо наступні співвідношення:

$$\begin{cases} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = \sum\limits_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2k+3m}^{(p)}, \\ \qquad\qquad \text{при } (k,m) \in \Gamma_{N_1,N_2} \backslash \{(N_1-1,N_2),(N_1,N_2)\}; \\ c_{N_1-1,N_2}^{(N_1,N_2)} = \sum\limits_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2k+3m}^{(p)}; \\ c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} = \gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)} \check{c}_{2N_1+3N_2}^{(2N_1+3N_2)}. \end{cases} \tag{26}$$

Теорема 2. *Для функцій f, що мають вигляд*

$$f(z,w) = \frac{1}{w^2 - z^3} \left(-\left\langle (z^3 + wz^2 A) \sum_{r=0}^{1} \mathcal{R}_{(-1)^r z^{1/2}}(A) \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left\langle \left(w^2 + wz^2 A + zw^2 A^2\right) \sum_{r=0}^{2} \mathcal{R}_{w^{1/3}\xi_r^{(3)}}(A) \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \right\rangle \right),$$

раціональні функції

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w)=\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}\check{c}^{(p)}_{2(N_1-j)+3(N_2-n)}z^jw^n+$$
$$+\sum_{j=2}^{N_1}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}\check{c}^{(p)}_{2(N_1-j)+3N_2}z^j+$$
$$+z\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}\check{c}^{(p)}_{2N_1+3N_2-1}+\gamma^{(N_1,N_2)}_{2N_1+3N_2}\check{c}^{(2N_1+3N_2)}_{2N_1+3N_2}$$

і

$$P_{\mathcal{N}}(z,w)=\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=1}^{N_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=1}^{m}\times$$
$$\times\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}\check{c}^{(p)}_{2(N_1-j)+3(N_2-n)}s_{k-j,m-n}+$$
$$+\sum_{k=2}^{N_1-1}z^k\sum_{j=2}^{k}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}\check{c}^{(p)}_{2(N_1-j)+3N_2}s_{k-j,0}+$$
$$+z\left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}\check{c}^{(p)}_{2N_1+3N_2-2}s_{0,0}+\right.$$
$$\left.\gamma^{(N_1,N_2)}_{2N_1+3N_2}\check{c}^{(2N_1+3N_2)}_{2N_1+3N_2}s_{1,0}\right)+\gamma^{(N_1,N_2)}_{2N_1+3N_2}\check{c}^{(2N_1+3N_2)}_{2N_1+3N_2}s_{0,0}+$$
$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=1}^{m}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}\check{c}^{(p)}_{2j+3(N_2-n)}\times$$
$$\times s_{k+j,m-n}+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1-2}z^k\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}\check{c}^{(p)}_{2j+3N_2}s_{k+j,0}+$$
$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1}z^k\left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}\check{c}^{(p)}_{2N_1+3N_2-2}s_{k+N_1-1,0}+\right.$$
$$\left.+\gamma^{(N_1,N_2)}_{2N_1+3N_2}\check{c}^{(2N_1+3N_2)}_{2N_1+3N_2}s_{k+N_1,0}\right)+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2-1}\times$$

$$\times \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2(N_1-j)+3n} s_{k-j,m+n} +$$

$$+ w^{N_2} \sum_{k=2}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=2}^{k} \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2(N_1-j)+3N_2} s_{k-j,m+N_2} +$$

$$+ zw^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2} w^m \left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} \check{c}^{(p)}_{2N_1+3N_2-2} s_{0,m+N_2} + \gamma^{(N_1,N_2)}_{2N_1+3N_2} \times \right.$$

$$\left. \times \check{c}^{(2N_1+3N_2)}_{2N_1+3N_2} s_{1,m+N_2} \right) + w^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2} w^m \gamma^{(N_1,N_2)}_{2N_1+3N_2} \check{c}^{(2N_1+3N_2)}_{2N_1+3N_2} s_{0,m+N_2},$$

матимуть розвинення у степеневі ряди, коефіцієнти яких співпадатимуть відповідно з коефіцієнтами рядів (13) *для всіх* $(k,m) \in \mathcal{E} = [0, 2N_1] \times [0, 2N_2] \backslash \{(2N_1, 2N_2)\}$.

Розглянемо далі в якості просторів $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ простори $L_2([0,1], d\mu)$ — функцій, сумовних з квадратом за мірою $d\mu$, де μ — це неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на [0,1]; білінійну форму для довільних функцій φ, ψ з простору $L_2([0,1], d\mu)$ означимо таким чином:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t) d\mu(t), \quad \varphi, \psi \in L_2([0,1], d\mu).$$

Нехай оператор A — це оператор множення на незалежну змінну

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t), \quad \varphi \in L_2([0,1], d\mu),$$

а початкові функції $\tilde{x}_0$ та $\tilde{y}_0$ покладемо тотожно рівними одиниці

$$\tilde{x}_0(t) = \tilde{y}_0(t) \equiv 1.$$

У такому випадку будуть виконуватися усі умови Теореми 2, і, отже, за цією теоремою ми можемо будувати апроксимати типу Паде функцій вигляду

$$f(z,w)=\frac{1}{w^2-z^3}\Big(-\frac{z^3}{2}\int_0^1\frac{d\mu(t)}{1-zt^2}+\frac{z^2w}{2}\int_0^1\frac{td\mu(t)}{1-zt^2}+ \\ +w^2\sum_{r=0}^{3}\int_0^1\frac{d\mu(t)}{1-z^{1/3}\xi_r^{(3)}t}+ \\ +zw^2\sum_{r=0}^{3}\int_0^1\frac{td\mu(t)}{1-z^{1/3}\xi_r^{(3)}t}+z^2w\sum_{r=0}^{3}\int_0^1\frac{t^2d\mu(t)}{1-z^{1/3}\xi_r^{(3)}t}\Big). \quad (27)$$

Зокрема, для класичної міри

$$d\mu(t)=t^{\nu}(1-t)^{\sigma}dt, \quad \sigma,\nu\in[0,1),$$

поліноми $X_N^{(2)}$ будуть системами алгебраїчних многочленів, ортогональних з вагою $t^{2+\nu}(1-t)^{\sigma}dt$.

Тому коефіцієнти таких поліномів $X_N^{(2)}$ визначаються наступними формулами (див. [8, c. 581]):

$$\check{c}_k^{(N)}=(-1)^{N-k}\binom{N}{k}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+N+k)}{\Gamma(\sigma+k+1)}. \quad (28)$$

Нехай

$$\gamma_N^{(N_1,N_2)}=\frac{1}{N},$$

тоді, підставивши в систему (26) значення $\check{c}_k^{(N)}$, отримуємо наступні формули для коефіцієнтів $\gamma_p^{(N_1,N_2)}$:

$$\begin{cases} \gamma_N^{(N_1,N_2)}=\frac{1}{N}; \\ \gamma_{N-1}^{(N_1,N_2)}=\sigma+\nu+2N+1; \\ \gamma_{N-2}^{(N_1,N_2)}=\frac{1}{N-2}\Big[\theta_N\frac{a_{N-3}}{N-3}-\frac{a_N}{N}-a_{N-1}(\sigma+\nu+2N+1)\Big]\times \\ \times\Big[\frac{a_{N-3}}{N-3}(\nu+\sigma+N+1)+\frac{a_{N-2}}{N-2}\Big]^{-1}; \\ \gamma_{N-3}^{(N_1,N_2)}=\frac{1}{N-3}\Big[\theta_N\frac{a_{N-2}}{N-2}-\Big\{\frac{a_N}{N}+a_{N-1}(\sigma+\nu+2N+1)\Big\}\times \\ \times(\sigma+\nu+N+1)\Big]\cdot\Big[\frac{a_{N-2}}{N-2}+\frac{a_{N-3}}{N-3}(\nu+\sigma+N+1)\Big]^{-1}, \end{cases} \quad (29)$$

де

$$\theta_N = (N-1)(\sigma+\nu+2N+1)(\sigma+\nu+N+1)_2 - (\sigma+\nu+N+1)_3.$$

Для визначення в цій системі чисел a_p, зафіксуємо деяке $M \in \mathbb{Z}_+$ та розглянемо інтеграл

$$\int_0^1 X_M^{(2)}(t)d\mu(t) = \int_0^1 X_M^{(2)}(t)t^\nu(1-t)^\sigma dt. \tag{30}$$

Далі скористаємося формулою Родріга [8, с. 579], згідно з якою

$$X_M^{(2)}(t) = \alpha_M \frac{1}{t^{2+\nu}(1-t)^\sigma}\frac{d^M}{dt^M}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big). \tag{31}$$

Тоді інтеграл (30) можна записати таким чином

$$\int_0^1 X_M^{(2)}(t)t^\nu(1-t)^\sigma dt =$$
$$= \int_0^1 \alpha_M \frac{1}{t^{2+\nu}(1-t)^\sigma}\frac{d^M}{dt^M}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)t^\nu(1-t)^\sigma dt.$$

Інтегруючи за частинами дане співвідношення декілька разів, знаходимо

$$\int_0^1 X_M^{(2)}(t)t^\nu(1-t)^\sigma dt = \alpha_M \int_0^1 \frac{1}{t^2}\frac{d^M}{dt^M}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)dt =$$
$$= \alpha_M\left(\frac{1}{t^2}\frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)\Big|_0^1 + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 \frac{2}{t^3}\frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)dt\right) =$$
$$= \alpha_M \int_0^1 \frac{2}{t^3}\frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)dt = \cdots =$$
$$= \alpha_M \int_0^1 \frac{(j+1)!}{t^{j+2}}\frac{d^{M-j}}{dt^{M-j}}\Big(t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}\Big)dt = \cdots =$$
$$= \alpha_M \int_0^1 \frac{(M+1)!}{t^{M+2}}t^{M+2+\nu}(1-t)^{M+\sigma}dt =$$
$$= \alpha_M(M+1)!\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(M+\sigma+1)}{\Gamma(M+\sigma+\nu+2)}, \quad \forall M \in \mathbb{Z}_+.$$

Оскільки поліноми $X_N^{(2)}$ вже визначені раніше з допомогою коефіцієнтів (28), то це єдиним чином буде визначати коефіцієнти α_M.

Тому для початку запишемо вираз під знаком диференціала у формулі Родріга (31) наступним чином:

$$X_M^{(2)}(t) = \alpha_M \cdot \frac{1}{t^{2+\nu}(1-t)^{\sigma}} \cdot \frac{d^M}{dt^M}\Big(\sum_{j=0}^{M}\binom{M}{j}(-1)^j t^{M+j} t^{2+\nu}(1-t)^{\sigma}\Big) \quad (32)$$

та обчислимо M-ту похідну в цьому виразі

$$\frac{d^M}{dt^M}\Big(\sum_{j=0}^{M}\binom{M}{j}(-1)^j t^{M+j} t^{2+\nu}(1-t)^{\sigma}\Big) =$$

$$= \sum_{j=0}^{M}\binom{M}{j}(-1)^j \sum_{k=0}^{M}\binom{M}{k}\big(t^{M+j}\big)^{(k)}\big(t^{2+\nu}(1-t)^{\sigma}\big)^{(M-k)}.$$

Як бачимо, старший коефіцієнт $X_M^{(2)}$ у формулі (32) буде при доданку зі значенням індексів сумування $k = j = M$. Тому для $\check{c}_M^{(M)}$ є справедливим співвідношення

$$\check{c}_M^{(M)} = (-1)^M \alpha_M,$$

і, відповідно,

$$\alpha_M = (-1)^M \frac{\Gamma(\sigma+\nu+M+3)}{\Gamma(\sigma+M+1)},$$

та

$$a_M = \int_0^1 X_M^{(2)}(t) t^{\nu}(1-t)^{\sigma} dt = (-1)^M (M+\sigma+\nu+2)_{M+1}.$$

Тоді система (23) набуде наступного вигляду:

$$\begin{cases} \gamma_N^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N}; \\ \gamma_{N-1}^{(N_1,N_2)} = \sigma+\nu+2N+1; \\ \gamma_{N-2}^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N-2}\Big[\theta_N \frac{(N+\sigma+\nu-1)_{N-2}}{N-3} + \frac{(N+\sigma+\nu+2)_{N+1}}{N} - \\ -(N+\sigma+\nu+1)_N(\sigma+\nu+2N+1)\Big] \times \\ \times \Big[\frac{(N+\sigma+\nu-1)_{N-2}}{N-3}(\nu+\sigma+N+1) + \frac{(N+\sigma+\nu)_{N-1}}{N-2}\Big]^{-1}; \\ \gamma_{N-3}^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{N-3}\Big[\theta_N \frac{(N+\sigma+\nu)_{N-1}}{N-2} - \Big\{\frac{(N+\sigma+\nu+2)_{N+1}}{N} - \\ -(N+\sigma+\nu+1)_N(\sigma+\nu+2N+1)\Big\} \cdot (\sigma+\nu+N+1)\Big] \times \\ \times \Big[\frac{(N+\sigma+\nu)_{N-1}}{N-2} + \frac{(N+\sigma+\nu-1)_{N-2}}{N-3}(\nu+\sigma+N+1)\Big]^{-1}. \end{cases} \quad (33)$$

Для вищеозначеної міри $d\mu$ та оператора A члени послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+}$ визначатимуться формулами

$$s_{k,m}=\int_0^1 t^{2k+3m+\nu}(1-t)^{\sigma}dt=\frac{\Gamma(2k+3m+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2k+3m+\sigma+2)}. \qquad (34)$$

А степеневий ряд функції (16), відповідно, матиме вигляд

$$f(z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2k+3m+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2k+3m+\sigma+2)}z^k w^m. \qquad (35)$$

Слід зауважити, що ряд (35), згідно з означенням Горна [9, с. 219], є гіпергеометричною функцією четвертого порядку.

Маємо наступний результат.

Теорема 3. *Для гіпергеометричної функції f вигляду* (35) *раціональна функція*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w)=\frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w)=\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p-2(N_1-j)-3(N_2-n)}\times$$
$$\times\binom{p}{2(N_1-j)+3(N_2-n)}\times$$
$$\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-j)+3(N_2-n))}{\Gamma(\sigma+1+2(N_1-j)+3(N_2-n))}z^j w^n$$
$$+\sum_{j=2}^{N_1}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p-2(N_1-j)-3N_2}\times$$
$$\times\binom{p}{2(N_1-j)+3N_2}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-j)+3N_2)}{\Gamma(\sigma+1+2(N_1-j)+3N_2)}+$$

$$+z\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p+2-2N_1-3N_2}\binom{p}{2N_1+3N_2-2}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+1+2N_1+3N_2)}{\Gamma(\sigma+2N_1+3N_2-1)}+\gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{\Gamma(\sigma+2N_1+3N_2+1)}$$

та

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=1}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=1}^{m}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}\times$$

$$\times(-1)^{p-2(N_1-j)-3(N_2-n)}\binom{p}{2(N_1-j)+3(N_2-n)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2N_1+3N_2-(2j+3n))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2-(2j+3n)}}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2(k-j)+3(m-n)+\nu+1)}{\Gamma(2(k-j)+3(m-n)+\sigma+2)}+$$

$$+\sum_{k=2}^{N_1-1} z^k \sum_{j=2}^{k}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p+2j-(2N_1+3N_2)}\times$$

$$\times\binom{p}{2N_1+3N_2-2j}\times\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-j)+3N_2)}{(\sigma+1)_{2(N_1-j)+3N_2}}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2(k-j)+\nu+1)}{\Gamma(2(k-j)+\sigma+2)}+z\left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p+2-2N_1-3N_2}\times\right.$$

$$\times\binom{p}{2N_1+3N_2-2}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-1)+3N_2)}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2-2}}\times$$

$$\left.\times\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\sigma+2)}+\gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}}\cdot\frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\sigma+4)}\right)+$$

$$+\gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}}\cdot\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\sigma+2)}+$$

$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=1}^{m}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p-2j-3(N_2-n)}\times$$

$$\times\binom{p}{2j+3(N_2-n)}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2j+3(N_2-n))}{(\sigma+1)_{2j+3(N_2-n)}}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2(k+j)+3(m-n)+\nu+1)}{\Gamma(2(k+j)+3(m-n)+\sigma+2)}+$$

$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1-2} z^k \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2}\gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p-2j-3N_2}\times$$

$$\times\binom{p}{2j+3N_2}\frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2j+3N_2)}{(\sigma+1)_{2j+3N_2}}\cdot\frac{\Gamma(2(k+j)+\nu+1)}{\Gamma(2(k-j)+\sigma+2)}+$$

$$
\begin{gathered}
+ z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1} z^k \left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p+2-2N_1-3N_2} \times \right.\\
\times \binom{p}{2N_1+3N_2-2} \frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+2N_1+3N_2+1)}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2-2}} \times \\
\times \frac{\Gamma(2(k+N_1)+\nu+1)}{\Gamma(2(k+N_1)+\sigma+2)} + \\
+ \gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)} \frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}} \times \\
\left. \times \frac{\Gamma(2(k+N_1)+\nu+1)}{\Gamma(2(k+N_1)+\sigma+2)} \right) + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2-1} \times \\
\times \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p-2(N_1-j)-3n} \binom{p}{2(N_1-j)+3n} \\
\times \frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-j)+3n)}{(\sigma+1)_{2(N_1-j)+3n}} \cdot \frac{\Gamma(2(k-j)+3(m+n)+\nu+1)}{\Gamma(2(k-j)+3(m+n)+\sigma+2)} + \\
+ w^{N_2} \sum_{k=2}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=2}^{k} \sum_{p=2N_1+3N_2-3}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p-2(N_1-j)-3N_2} \times \\
\times \binom{p}{2(N_1-j)+3N_2} \times \frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+3+2(N_1-j)+3N_2)}{(\sigma+1)_{2(N_1-j)+3N_2}} \times \\
\times \frac{\Gamma(2(k-j)+3(m+N_2)+\nu+1)}{\Gamma(2(k-j)+3(m+N_2)+\sigma+2)} + \\
+ zw^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2} w^m \left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)}(-1)^{p+2-2N_1-3N_2} \times \right.\\
\times \binom{p}{2(N_1-1)+3N_2} \frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+2N_1+3N_2+1)}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2-2}} \times \\
\times \frac{\Gamma(3(m+N_2)+\nu+1)}{\Gamma(3(m+N_2)+\sigma+2)} + \gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)} \frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}} \times \\
\left. \times \frac{\Gamma(3(m+N_2)+\nu+3)}{\Gamma(3(m+N_2)+\sigma+4)} \right) + w^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2} w^m \gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)} \times \\
\times \frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}} \cdot \frac{\Gamma(3(m+N_2)+\nu+1)}{\Gamma(3(m+N_2)+\sigma+2)}
\end{gathered}
$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (35) *для всіх* $(k,m) \in \mathcal{E} = [0, 2N_1] \times [0, 2N_2] \setminus \{(2N_1, 2N_2)\}$.

Зауваження 2. Доданок

$$zw^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2} w^m \left(\sum_{p=2N_1+3N_2-2}^{2N_1+3N_2} \gamma_p^{(N_1,N_2)} (-1)^{p+2-2N_1-3N_2} \times \right.$$
$$\times \binom{p}{2(N_1-1)+3N_2} \frac{\Gamma(\sigma+\nu+p+2N_1+3N_2+1)}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2-2}} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(3(m+N_2)+\nu+1)}{\Gamma(3(m+N_2)+\sigma+2)} + \gamma_{2N_1+3N_2}^{(N_1,N_2)} \times$$
$$\left. \times \frac{\Gamma(\sigma+\nu+3+2(2N_1+3N_2))}{(\sigma+1)_{2N_1+3N_2}} \cdot \frac{\Gamma(3(m+N_2)+\nu+3)}{\Gamma(3(m+N_2)+\sigma+4)} \right)$$

формули чисельника $P_{\mathcal{N}}$ у Теоремі 3 буде присутній при умові, що $N_1 > 1$. Якщо ж $N_1 = 1$, то тоді, як випливає з Теореми 1, цього доданка у записі чисельника не буде.

Для того, щоб проілюструвати одержані результати, розглянемо частинний випадок Теореми 3 при $\nu = \sigma = 0$ та $N_1 = N_2 = 1$.

За таких умов функція f має вигляд

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{z^k w^m}{2k+3m+1}, \tag{36}$$

а її раціональна апроксиманта визначається формулою

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \big(798.336 + 33.8688 \cdot z + 82.2528z^2 - 285.1155 \cdot w -$$
$$-7.126863 \cdot w^2\big) \times (798.336 - 232.2432 \cdot z -$$
$$-484.6995 \cdot w - 20.24034zw)^{-1}. \tag{37}$$

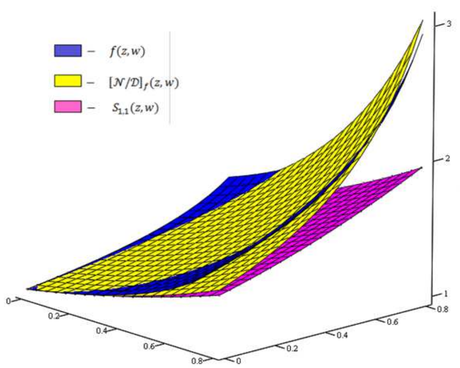
Порівняємо значення наближуваної функції (36), побудованої нами апроксиманти (37) та частинної суми степеневого ряду

$$S_{2,2}(z,w) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{m=0}^{2} \frac{z^k w^m}{2k+3m+1} \tag{38}$$

у точках квадрата $[0; 0.8] \times [0; 0.8]$ з допомогою значень в Таблиці 1 та

w/z	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.0	1	1.056661	1.132197	1.243053	1.442685
	1	1.056504	1.130189	1.230898	1.377776
	1	1.05	1.1	1.15	1.2
0.2	1.076022	1.141799	1.23011	1.360898	1.599489
	1.075161	1.148216	1.245916	1.384019	1.595354
	1.066667	1.123333	1.18	1.236667	1.293333
0.4	1.178736	1.257814	1.364985	1.525654	1.823948
	1.169547	1.265055	1.396476	1.589728	1.903555
	1.133333	1.196667	1.26	1.323333	1.386667
0.6	1.331943	1.432856	1.571493	1.78308	2.186344
	1.287225	1.413384	1.592781	1.869392	2.354031
	1.2	1.27	1.34	1.41	1.48
0.8	1.614013	1.760785	1.967192	2.29223	2.941847
	1.433491	1.60192	1.850836	2.257768	3.046902
	1.266667	1.343333	1.42	1.496667	1.573333

Табл. 1: Таблиця значень функції (36), апроксиманти (37) та частинної суми (38).



Мал. 2: Графік функції (36),
апроксиманти (37),
частинної суми (38).

графіків на Мал. 2.

Отримані результати показують, що апроксиманта, побудована методом узагальнених моментних зображень, наближає функцію значно краще, ніж частинна сума її степеневого ряду, з тією ж самою кількістю коефіцієнтів.

Література

[1] *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №8. — С. 1035 – 1058.

[2] *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. — 1981. — **6**. — С. 8–12.

[3] *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Побудова апроксимант Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Зб. праць Ін-ту математики НАН України /Теорія наближення функцій та суміжні питання/. — К.: Ін-т математики НАН України, 2013. — **10**, №1. — С. 69 – 94.

[4] *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №10. — С. 1315 – 1331.

[5] *Голуб А. П., Веселовська Г. М.* Апроксиманти типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних // Зб. праць Ін-ту математики НАН України /Теорія наближення функцій та суміжні питання/. — К.: Ін-т математики НАН України, 2015. — **12**, №4. — С. 92 – 110.

[6] *Чернецька Л. О.* Побудова двовимірних апроксимант Паде деяких аналітичних функцій двох змінних за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Мат. студії. — 2014. — **11**, №2. — С. 201 – 213.

[7] *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.

[8] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

[9] *Бэйтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1965. — 648 с.