Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 2, 88–109

УДК 517.935;681.5

Динамічні регулятори у дискретних системах з керованими і спостережуваними виходами *

О. Г. Мазко[1]***, С. М. Кусій***[2]

[1] *Інститут математики НАН України, Київ;*
mazko@imath.kiev.ua,
[2] *Інститут математики НАН України, Київ;*
sergii.kusii@gmail.com

Necessary and sufficient conditions for the static output feedback stabilizability of linear discrete-time systems is derived. The conditions take the form of a matrix inequality. It is shown that an algorithm of stabilization, which follows from these condition, is applicable for a certain class of nonlinear discrete-time control systems. An algorithm for constructing the control laws providing a given estimate of the weighted damping level of input signals and initial perturbations and robust stability of the equilibrium state of the control system is proposed. The results are illustrated by an numerical example for a discrete-time stabilization system.

В термінах матричних нерівностей сформульовано необхідні та достатні умови стабілізовності по виходу лінійних дискретних систем керування. Показано, що алгоритм стабілізації, який випливає із даних умов, можна застосувати для деякого класу нелінійних дискретних систем керування. Запропоновано алгоритм побудови законів керування, що забезпечують задану оцінку зваженого рівня гасіння вхідних сигналів і початкових збурень, а також робастну стійкість стану рівноваги керованої системи. Отримані результати продемонстровано на чисельному прикладі дискретної системи стабілізації.

*Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0117U004077.

1 Вступ

Однією з основних проблем теорії керування є необхідність побудови статичних або динамічних регуляторів, що забезпечують робастну стійкість станів рівноваги та зниження впливу зовнішніх збурень на динаміку керованих об'єктів. Вказані якості системам керування надають методи теорії H_∞-оптимізації (див., наприклад, [1–7]), а також методи інваріантних еліпсоїдів [8]. Задачі стабілізації навіть для класів лінійних систем за умов неповної інформації про їх стан недостатньо вивчені і розв'язані лише при додаткових обмеженнях [9].

При дослідженні складних динамічних об'єктів широко використовуються математичні моделі руху та системи керування як з неперервним, так і з дискретним часом. На практиці дискретні моделі систем керування мають певні переваги порівняно з неперервними. Зокрема, застосування різницевих рівнянь руху не вимагає дослідження математичних проблем існування та єдиності розв'язків. Різницеві системи є досить придатними для їх безпосередньої реалізації програмними засобами на сучасних комп'ютерах.

Слід зазначити, що практичне застосування багатьох методів синтезу неперервних та дискретних систем керування базується на розв'язуванні лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Для цього створені достатньо ефективні засоби LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab [10].

У даній роботі вивчаються класи дискретних лінійних та нелінійних систем з керованими і спостережуваними виходами. Продовжуючи дослідження [12–14] з використанням систем ЛМН, розробляються дискретні аналоги алгоритмів робастної стабілізації і забезпечення заданої оцінки деякого критерію якості, що характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень. При цьому розглядаються випадки наявності обмежених збурень у рівняннях динаміки об'єкта, керованого і спостережуваного виходів, а також шуканого динамічного регулятора.

Будемо використовувати такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова матриця розмірів $n\times m$; $X = X^T > 0\ (\geq 0)$ — додатно (невід'ємно) визначена матриця X; $\mathrm{i}(X) = \{\mathrm{i}_+, \mathrm{i}_-, \mathrm{i}_0\}$ — інерція симетричної матриці X, яку утворюють кількості її додатних, від'ємних і нульових власних значень, враховуючи кратності; $\sigma(A)$ — спектр матриці A; W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра $\mathrm{Ker}\, A$ матриці A; $\|x\|$ — евклідова норма вектора x; $\|x\|_Q$ — зважена

l_2-норма векторної послідовності x_t, $t = 0, 1, \dots$.

2 Допоміжні твердження

При дослідженні блочно-матричних співвідношень використовуються методи пониження розмірності, зокрема, формула Фробеніуса, лема Шура та ін. [11]. Наведемо відомі формули для індексів інерції симетричної блочної матриці

$$M = \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Лема 2.1. *Якщо* $\det A \neq 0$*, то*

$$\mathrm{i}_\pm(M) = \mathrm{i}_\pm(A) + \mathrm{i}_\pm(C - BA^{-1}B^T). \tag{1}$$

Аналогічно, якщо $\det C \neq 0$*, то*

$$\mathrm{i}_\pm(M) = \mathrm{i}_\pm(C) + \mathrm{i}_\pm(A - B^T C^{-1} B). \tag{2}$$

Із формул (1) та (2) випливають відповідні критерії додатної (невід'ємної) визначеності блочної матриці M (лема Шура):

$$M > 0 \ (\geq 0) \iff A > 0, \ \ C - BA^{-1}B^T > 0 \ (\geq 0); \tag{3}$$

$$M > 0 \ (\geq 0) \iff C > 0, \ \ A - B^T C^{-1} B > 0 \ (\geq 0). \tag{4}$$

Узагальнення даних формул на випадок вироджених діагональних блоків матриці M наведено у [5].

Лема 2.2. [7] *Лінійна матрична нерівність*

$$A^T X B + B^T X^T A < C, \tag{5}$$

де A*,* B *і* C *— задані матриці відповідних розмірів* $p \times n$*,* $q \times n$ *і* $n \times n$*, має розв'язок* $X \in \mathbb{R}^{p \times q}$ *тоді і лише тоді, коли виконується одна із таких умов:* (a) $\operatorname{rank} A = n$*,* $\operatorname{rank} B = n$*;* (b) $\operatorname{rank} A < n$*,* $\operatorname{rank} B = n$*,* $W_A^T C W_A > 0$*;* (c) $\operatorname{rank} B < n$*,* $\operatorname{rank} A = n$*,* $W_B^T C W_B > 0$ *або* (d) $\operatorname{rank} A < n$*,* $\operatorname{rank} B < n$*,* $W_A^T C W_A > 0$*,* $W_B^T C W_B > 0$*, де* W_A *і* W_B *— матриці, стовпці яких складають базиси відповідних ядер* $\operatorname{Ker} \mathrm{A}$ *і* $\operatorname{Ker} \mathrm{B}$.

У [12] за умов леми 2.2 наведено загальний розв'язок матричної нерівності (5) у параметричній формі.

Лема 2.3. *Для заданих матриць $X > 0$, $Y > 0$ і числа $\gamma > 0$ існують матриці $X_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$ і $Y_2 \in \mathbb{R}^{r\times r}$, що задовольняють співвідношення*

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_1^T \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{X}\widehat{Y} = \gamma^2 I_{n+r}, \tag{6}$$

тоді і лише тоді, коли

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{7}$$

Твердження леми 2.3 відоме у випадку $\gamma = 1$ [6,13].

3 Динамічний регулятор по вимірюваному виходу

Розглянемо нелінійну систему керування

$$x_{t+1} = A(x_t)x_t + B(x_t)u_t, \quad y_t = C(x_t)x_t + D(x_t)u_t, \tag{8}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування і вимірюваного виходу системи, а $A(x_t)$, $B(x_t)$, $C(x_t)$ і $D(x_t)$ — матриці відповідних розмірів, неперервно залежні від x_t у деякому околі $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| \leq h\}$ точки $x = 0$, $t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \ldots\}$. Припустимо, що $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = l$, і разом з (8) розглядаємо лінійну систему

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t + Du_t, \tag{9}$$

де $A = A(0)$, $B = B(0)$, $C = C(0)$, $D = D(0)$ і $t \in \mathcal{T}$. Позначимо через $B^\perp$ і $C^\perp$ ортогональні доповнення відповідних матриць B і C, які визначаються співвідношеннями

$$B^T B^\perp = 0, \quad \det\left[B, B^\perp\right] \neq 0, \quad C^\perp C^T = 0, \quad \det\left[C^T, C^{\perp T}\right] \neq 0.$$

Сформулюємо умови стабілізації нульового стану рівноваги систем (8) і (9) за допомогою динамічного регулятора

$$\xi_{t+1} = Z\xi_t + Vy_t, \quad u_t = U\xi_t + Ky_t, \tag{10}$$

де $\xi_t \in \mathbb{R}^r$, а Z, V, U і K — невідомі матриці, r — порядок регулятора, $t \in \mathcal{T}$. Співвідношення (8) і (10) можна подати у вигляді системи керування зі статичним регулятором у розширеному фазовому просторі:

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{A}(\widehat{x}_t)\widehat{x}_t + \widehat{B}(\widehat{x}_t)\widehat{u}_t, \quad \widehat{y}_t = \widehat{C}(\widehat{x}_t)\widehat{x}_t + \widehat{D}(\widehat{x}_t)\widehat{u}_t, \quad \widehat{u}_t = \widehat{K}\widehat{y}_t, \tag{11}$$

де

$$\widehat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad \widehat{y}_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad \widehat{u}_t = \begin{bmatrix} u_t \\ \xi_{t+1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A}(\widehat{x}_t) = \begin{bmatrix} A(x_t) & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}(\widehat{x}_t) = \begin{bmatrix} B(x_t) & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}(\widehat{x}_t) = \begin{bmatrix} C(x_t) & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{D}(\widehat{x}_t) = \begin{bmatrix} D(x_t) & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}.$$

Позначимо множину матриць $\mathcal{K}_D = \{K \in \mathbb{R}^{m\times l} : \det(I_m - KD) \neq 0\}$. При умові $K \in \mathcal{K}_D$ замкнена лінійна система (9), (10) має вигляд

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}\,\widehat{x}_t, \quad \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K})\widehat{C}, \tag{12}$$

де

$$\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(K) & (I_m - KD)^{-1}U \\ V(I_l - DK)^{-1} & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{bmatrix},$$

$\widehat{A} = \widehat{A}(0)$, $\widehat{B} = \widehat{B}(0)$, $\widehat{C} = \widehat{C}(0)$, $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$ — нелінійний оператор.

Означення 3.1. Систему (12) називаємо *ρ-стійкою*, якщо її спектр $\sigma(\widehat{M})$ розміщений всередині круга $\{\lambda : |\lambda| < \rho\}$, де $0 < \rho \leq 1$.

Спектральний запас стійкості ρ-стійкої системи не менший, ніж $1 - \rho$.

Теорема 3.1. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) *Існує динамічний регулятор* (10) *порядку r, що забезпечує ρ-стійкість замкненої системи* (12).

2) *Існують матриці X і X_0, що задовольняють співвідношення*

$$B^{\perp T}(AXA^T - \rho^2 X)\,B^{\perp} < 0, \tag{13}$$

$$X \geq X_0 > 0, \quad \operatorname{rank}(X - X_0) \leq r, \tag{14}$$

$$AX_0A^T - \rho^2 X_0 < AX_0C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0A^T. \tag{15}$$

3) *Існують матриці* $X = X^T > 0$ *і* $Y = Y^T > 0$*, що задовольняють співвідношення* (13) *і*

$$C^{\perp}(A^TYA - \rho^2 Y)\, C^{\perp T} < 0. \qquad (16)$$

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \qquad (17)$$

Доведення. За теоремою Ляпунова критерієм досягнення ρ-стійкості системи (11) є існування матриць $\widehat{K}_0$ і $\widehat{X} = \widehat{X}^T > 0$ таких, що

$$(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{C})\widehat{X}(\widehat{A} + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{C})^T - \rho^2\widehat{X} < 0. \qquad (18)$$

Дана нерівність для деякої матриці $\widehat{X} > 0$ має розв'язок $\widehat{K}_0$ лише тоді, коли виконується система співвідношень (див. доведення теореми 6.1.1 в [5] при $\rho = 1$)

$$\widehat{B}^{\perp T}(\widehat{A}\widehat{X}\widehat{A}^T - \rho^2\widehat{X})\, \widehat{B}^{\perp} < 0, \qquad (19)$$

$$\widehat{A}\widehat{X}\widehat{A}^T - \rho^2\widehat{X} < \widehat{A}\widehat{X}\widehat{C}^T(\widehat{C}\widehat{X}\widehat{C}^T)^{-1}\widehat{C}\widehat{X}\widehat{A}^T. \qquad (20)$$

У даному випадку

$$\widehat{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} B^{\perp} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{C}^{\perp} = \left[C^{\perp},\ 0\right], \quad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0,$$

і за формулою Фробеніуса [11]

$$(\widehat{C}\widehat{X}\widehat{C}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} S^{-1} & -S^{-1}CX_1^TX_2^{-1} \\ -X_2^{-1}X_1C^TS^{-1} & X_2^{-1} + X_2^{-1}X_1C^TS^{-1}CX_1^TX_2^{-1} \end{bmatrix},$$

де $S = CX_0C^T$, $X_0 = X - X_1^TX_2^{-1}X_1$. Використовуючи блочну структуру наведених виразів у (19) і (20) та лему Шура, приходимо до еквівалентних співвідношень (13)–(15), де $\operatorname{rank}(X - X_0) = \operatorname{rank} X_1 \leq r$. Отже, твердження 1) і 2) еквівалентні.

Покажемо, що матриці X і X_0 задовольняють співвідношення (13) – (15) лише тоді, коли X і $Y = X_0^{-1}$ задовольняють співвідношення (13), (16) і (17). Очевидно, що формули (14) і (17) еквівалентні.

Застосовуючи лему 2.1 до блочних матриць

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} AX_0A^T - \rho^2X_0 & AX_0C^T \\ CX_0A^T & CX_0C^T \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} -\rho^2X_0 & 0 & A \\ 0 & 0 & C \\ A^T & C^T & -X_0^{-1} \end{bmatrix},$$

маємо еквівалентність співвідношень (15) і

$$\mathrm{i}(\Delta_0) = \mathrm{i}(\Delta_1) = \mathrm{i}(\Delta_2) = \{l, n, 0\},$$

де

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} X_0 \big[A^T,\ C^T\big] - \rho^2 \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} X_0 \big[I_n,\ 0\big],$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^T & -X_0^{-1} \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} 0 \\ A^T \end{bmatrix} X_0^{-1} \big[0,\ A\big],$$

$$\Delta_2 = \rho^2 G \Delta_1 G^T = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & C^{\perp} Z C^{\perp T} \end{bmatrix}, \quad Z = A^T X_0^{-1} A - \rho^2 X_0^{-1},$$

$$E = \begin{bmatrix} C^{+T} Z C^{+} & \rho^2 I_l \\ \rho^2 I_l & 0 \end{bmatrix}, \quad G^T = \begin{bmatrix} 0 & I_l & -\rho^{-2} C^{+T} Z C^{\perp T} \\ C^{+} & 0 & C^{\perp T} \end{bmatrix}.$$

Неважко переконатися, що $\mathrm{i}(E) = \{l, l, 0\}$. Оскільки G — квадратна невироджена матриця, а вираз другого діагонального блока матриці Δ_2 співпадає з (16), то рівність $\mathrm{i}(\Delta_0) = \{l, n, 0\}$ еквівалентна матричній нерівності (16).

Теорему доведено. □

Наслідок 3.1. *Нехай виконується одне із тверджень* 2) *або* 3) *теореми* 3.1 *для лінійної системи* (12) *і* $\widehat{K}_0$ *— розв'язок ЛМН*

$$P^T \widehat{K}_0 Q + Q^T \widehat{K}_0^T P < F, \tag{21}$$

де

$$P = \big[-\widehat{B}^T, 0_{m+r \times n+r}\big], \quad Q = \big[0_{l+r \times n+r}, \widehat{C}\widehat{X}\big],$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho^2 \widehat{X} & \widehat{A}\widehat{X} \\ \widehat{X}\widehat{A}^T & \widehat{X} \end{bmatrix}, \ \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \ X - X_0 = X_1^T X_2^{-1} X_1 \geq 0,$$

$$\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}, \quad K_0 \in \mathcal{K}_D, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

Тоді динамічний регулятор (10) *з матрицями*

$$\begin{gathered} K = (I_m + K_0 D)^{-1} K_0, \quad U = (I_m + K_0 D)^{-1} U_0, \\ V = V_0 (I_l + D K_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0 D (I_m + K_0 D)^{-1} U_0, \end{gathered} \tag{22}$$

забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану $\widehat{x} \equiv 0$ *та квадратичну функцію Ляпунова* $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X}^{-1} \widehat{x}$ *замкненої нелінійної системи* (8), (10).

Останнє твердження випливає із доведення теореми 3.1 і припущень відносно матричних функцій $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$ (див. доведення аналогічного твердження для неперервних систем [15]) Співвідношення (22) є наслідком такої властивості оператора $\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K})$: якщо $\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K}) = \widehat{K}_0$, то $\widehat{K} = -\widehat{\mathbf{D}}(-\widehat{K}_0)$.

На основі наслідку 3.1 сформулюємо алгоритм побудови динамічного регулятора (10), що забезпечує ρ-стійкість системи (12), а також асимптотичну стійкість нульового стану замкненої нелінійної системи (8), (10).

Алгоритм 3.1. 1) Знаходження матриць X і X_0, що задовольняють співвідношення (13)–(15).

2) Побудова розкладу Холецького невід'ємно визначеної матриці $X - X_0 = X_1^T X_1$, де $X_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $\mathrm{rank} X_1 \le r$.

3) Розв'язування ЛМН (21) відносно $\widehat{K}_0$ при умовах $X_2 = I_r$ і $\det(I_m + K_0 D) \neq 0$.

4) Обчислення матриць регулятора (10) за формулами (22).

В п. 2) даного алгоритму замість розкладу Холецького невід'ємно визначеної матриці можна використати її спектральний розклад $X - X_0 = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i h_i h_i^T$, де $\alpha_i > 0$ — власні значення даної матриці, які відповідають власним векторам h_i. Тоді $X_2^{-1} = \mathrm{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, $X_1^T = \big[h_1, \ldots, h_r\big]$. Зазначимо, що у випадку $r \ge n$ завжди виконуються рангові обмеження у (14) і (17).

4 Зважений рівень гасіння обмежених збурень.

Розглянемо динамічну систему без керування

$$x_{t+1} = A(x_t)x_t + B(x_t)w_t, \quad y_t = C(x_t)x_t + D(x_t)w_t, \tag{23}$$

яка функціонує у деякій області фазового простору $\mathcal{S}_0$, що містить точку $x = 0$. Тут $x_t \in \mathbb{R}^n$, $w_t \in \mathbb{R}^m$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, зовнішніх збурень і виходу системи, $A(x_t)$, $B(x_t)$, $C(x_t)$ і $D(x_t)$ — матриці відповідних розмірів, $x_t \in \mathcal{S}_0$, $t \in \mathcal{T}$.

Введемо критерій якості системи (23) відносно її вектора виходу:

$$J = \sup_{0<\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0 < \infty} \varphi(w, x_0), \tag{24}$$

де

$$\varphi(w,x_0)=\frac{\|y\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2+x_0^TX_0x_0}},\ \|y\|_Q^2=\sum_{t=0}^{\infty}y_t^TQy_t,\ \|w\|_P^2=\sum_{t=0}^{\infty}w_t^TPw_t,$$

$Q=Q^T>0$, $P=P^T>0$ і $X_0=X_0^T>0$ — задані матриці. Вважаємо, що вектор зовнішніх збурень w обмежений по нормі $\|w\|_P$, а x_0 — невідомий початковий вектор. Вираз (24) при фіксованому початковому векторі $x_0=0$ позначимо через J_0, при цьому $J_0\leq J$.

Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень у системі (23). Даний критерій якості у випадку вагових матриць $P=I_s$, $Q=I_k$ і $X_0=\beta I_n$ відомий [13, 14].

Означення 4.1. [5] Система (23) називається *неекспансивною*, якщо її вектор виходу при довільному $\nu>0$ задовольняє нерівність

$$\sum_{t=0}^{\nu}y_t^TQy_t\leq\sum_{t=0}^{\nu}w_t^TPw_t+x_0^TX_0x_0.$$

Очевидно, що для характеристики (24) неекспансивної системи виконується нерівність $J\leq 1$.

Лема 4.1. *Нехай існує матриця $X=X^T>0$ така, що*

$$\Phi(x)=\begin{bmatrix}\Phi_1(x) & \Phi_2^T(x)\\ \Phi_2(x) & \Phi_3(x)\end{bmatrix}<0,\quad x\in\mathcal{S}_0, \tag{25}$$

де $\Phi_1(x)=A^T(x)XA(x)-X+C^T(x)QC(x)$, $\Phi_2(x)=B^T(x)XA(x)+D^T(x)QC(x)$, $\Phi_3(x)=B^T(x)XB(x)+D^T(x)QD(x)-\gamma^2P$. Тоді виконується оцінка $J_0\leq\gamma$. Якщо до того ж $0<X\leq\gamma^2X_0$, то $J\leq\gamma$.

Доведення. Для першої різниці функції Ляпунова $v(x)=x^TXx$ у силу системи (23) виконуються співвідношення

$$v(x_{t+1})-v(x_t)+y_t^TQy_t-\gamma^2w_t^TPw_t=\left[x_t^T,\ w_t^T\right]\Phi(x_t)\begin{bmatrix}x_t\\ w_t\end{bmatrix},\ t\in\mathcal{T},$$

$$v(x_{\nu+1})-v(x_0)+\sum_{t=0}^{\nu}y_t^TQy_t-\gamma^2\sum_{t=0}^{\nu}w_t^TPw_t\leq 0.$$

Звідси при $\nu\to\infty$ маємо

$$\|y\|_Q^2\leq\gamma^2(\|w\|_P^2+x_0^TX_0x_0),\quad \varphi(w,x_0)\leq\gamma,$$

що означає $J \leq \gamma$. Зокрема, $J_0 \leq \gamma$ при $x_0 = 0$.

Лему доведено. □

Зауваження 4.1. При умові (25) леми 4.1 нульовий стан $x_t = 0$ системи (23) з невизначеністю

$$w_t = \gamma^{-1}\Theta y_t, \quad \Theta^T P \Theta \leq Q, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{26}$$

асимптотично стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^T X x$. Цей факт є наслідком леми 4.1 і теореми 6.2.1 із [5].

Розглянемо клас лінійних систем типу (23)

$$x_{t+1} = Ax_t + Bw_t, \quad y_t = Cx_t + Dw_t, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{27}$$

Лема 4.2. *Для лінійної системи* (27) *виконується оцінка* $J_0 < \gamma$ *тоді і лише тоді, коли ЛМН*

$$\Phi_\gamma = \begin{bmatrix} A^T X A - X + C^T Q C & A^T X B + C^T Q D \\ B^T X A + D^T Q C & B^T X B + D^T Q D - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \tag{28}$$

має розв'язок $X = X^T > 0$. *Більше того,* $J < \gamma$ *тоді і лише тоді, коли сумісна система ЛМН* (28) *і*

$$0 < X < \gamma^2 X_0. \tag{29}$$

Твердження достатності леми 4.2 є наслідком леми 4.1. Твердження необхідності можна встановити шляхом представлення J_0 і J аналогічними виразами з одиничними ваговими матрицями (див. доведення леми 2.3 у [15], а також [14]).

Із леми 4.2, зокрема, випливає, що критерії якості J_0 і J системи (27) можна обчислити як розв'язки відповідних оптимізаційних задач:

$$J_0 = \inf\left\{\gamma : \Phi_\gamma < 0,\ X > 0\right\}, \tag{30}$$

$$J = \inf\left\{\gamma : \Phi_\gamma < 0,\ 0 < X < \gamma^2 X_0\right\}. \tag{31}$$

5 Динамічний регулятор зі збуреннями

Розглянемо системи керування (8) і (9) з динамічним регулятором

$$\xi_{t+1} = Z\xi_t + Vy_t, \quad u_t = U\xi_t + Ky_t + w_t, \quad \xi_0 = 0, \tag{32}$$

де $\xi_t \in \mathbb{R}^r$ і $w_t \in \mathbb{R}^m$ — вектори відповідно стану регулятора та вхідних сигналів (зовнішніх збурень), Z, V, U і K — невідомі сталі матриці. При умові $K \in \mathcal{K}_D$ замкнена лінійна система (9), (32) має вигляд

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}\widehat{x}_t + \widehat{N}w_t, \quad y_t = \widehat{F}\widehat{x}_t + \widehat{G}w_t, \tag{33}$$

де

$$\widehat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \widehat{M} = \begin{bmatrix} A + BK_0C & BU_0 \\ V_0C & Z_0 \end{bmatrix} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{C}, \ \widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{N} = \begin{bmatrix} B + BK_0D \\ V_0D \end{bmatrix} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{D}_1, \ \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \ \widehat{D}_1 = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{F} = \left[C + DK_0C, \, DU_0\right] = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_2\widehat{K}_0\widehat{C}, \ \widehat{C}_1 = \left[C, \, 0\right], \ \widehat{D}_2 = \left[D, \, 0\right],$$

$$\widehat{G} = D + DK_0D = D + \widehat{D}_2\widehat{K}_0\widehat{D}_1, \quad K_0 = \mathbf{D}(K),$$

$$U_0 = (I_m - KD)^{-1}U, \ \ V_0 = V(I_l - DK)^{-1}, \ \ Z_0 = Z + VD(I_m - KD)^{-1}U.$$

Для даної системи задамо критерії якості J_0 і $\widehat{J}$ типу (24) з ваговими матрицями P, Q і $\widehat{X}_0$. Оскільки $\xi_0 = 0$, то значення $\widehat{J}$ залежить лише від першого діагонального блока X_0 матриці $\widehat{X}_0$, тобто $\widehat{J} = J$.

Нас цікавлять регулятори, які мінімізують введені критерії якості та забезпечують умови нeекспансивності відповідної замкненої системи. Закони керування, які забезпечують мінімальне значення J для замкненої системи, будемо називати *J-оптимальними*. Алгоритми пошуку J-оптимальних і J_0-оптимальних регуляторів можна реалізувати на основі побудови відповідних верхніх оцінок для J і J_0.

Теорема 5.1. *Для лінійної системи* (9) *існує динамічний регулятор* (32)*, що забезпечує критерій якості $J < \gamma$ тоді і лише тоді, коли для деяких матриць $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$ виконується система співвідношень* (7)*,* (29)*, і*

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^TXA - X + C^TQC & A^TXB + C^TQD \\ B^TXA + D^TQC & B^TXB + D^TQD - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{34}$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AYA^T - Y + BP^{-1}B^T & AYC^T + BP^{-1}D^T \\ CYA^T + DP^{-1}B^T & CYC^T + DP^{-1}D^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{35}$$

де $R = [C, D]$, $L = [B^T, D^T]$. *При цьому нульовий стан* $\widehat{x_t} \equiv 0$ *замкненої системи* (33) *з невизначеністю* (26) *робастно стійкий.*

Доведення. За лемою 4.2 оцінка $J < \gamma$ для системи (33) виконується лише тоді, коли сумісна система співвідношень

$$\begin{bmatrix} \widehat{M}^T \widehat{X} \widehat{M} - \widehat{X} + \widehat{F}^T Q \widehat{F} & \widehat{M}^T \widehat{X} \widehat{N} + \widehat{F}^T Q \widehat{G} \\ \widehat{N}^T \widehat{X} \widehat{M} + \widehat{G}^T Q \widehat{F} & \widehat{N}^T \widehat{X} \widehat{N} + \widehat{G}^T Q \widehat{G} - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \qquad (36)$$

$$0 < \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} < \gamma^2 \widehat{X}_0 = \gamma^2 \begin{bmatrix} X_0 & X_{10}^T \\ X_{10} & X_{20} \end{bmatrix}. \qquad (37)$$

Матричну нерівність (36) на основі леми Шура можна подати у вигляді ЛМН відносно $\widehat{K}_0$:

$$\begin{bmatrix} -\widehat{X} & 0 & \widehat{M}^T & \widehat{F}^T \\ 0 & -\gamma^2 P & \widehat{N}^T & \widehat{G}^T \\ \widehat{M} & \widehat{N} & -\widehat{X}^{-1} & 0 \\ \widehat{F} & \widehat{G} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} = \widehat{L}^T \widehat{K}_0 \widehat{R} + \widehat{R}^T \widehat{K}_0^T \widehat{L} + \widehat{\Omega} < 0, \quad (38)$$

де

$$\widehat{R} = [\widehat{C}, \widehat{D}_1, 0, 0] = \widehat{R}_1 E_1, \quad \widehat{L} = [0, 0, \widehat{B}^T, \widehat{D}_2^T] = \widehat{L}_1 E_2,$$

$$\widehat{R}_1 = \begin{bmatrix} C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B^T & D^T \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n+r+l} \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} I_{n+r+m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_l \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} -\widehat{X} & 0 & \widehat{A}^T & \widehat{C}_1^T \\ 0 & -\gamma^2 P & \widehat{B}_1^T & D^T \\ \widehat{A} & \widehat{B}_1 & -\gamma^{-2} \widehat{Y} & 0 \\ \widehat{C}_1 & D & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_1^T \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} = \gamma^2 \widehat{X}^{-1}.$$

При цьому із (37) випливає (29).

Враховуючи вирази $W_{\widehat{R}} = E_1^T W_{\widehat{R}_1}$ і $W_{\widehat{L}} = E_2^T W_{\widehat{L}_1}$, де

$$W_{\widehat{R}_1} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n+r+l} \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{L}_1} = \begin{bmatrix} I_{n+r+m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & W_L \end{bmatrix},$$

та застосовуючи лему 2.2 до ЛМН (38), а також лему 2.3 для блочних матриць (6), отримаємо критерій існування розв'язку $\widehat{K}_0$ даної нерівності у вигляді співвідношень (7), (34) і (35). При цьому нульовий стан $\widehat{\widehat{x}}_t \equiv 0$ замкненої системи (33) з невизначеністю (26) робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$ (див. зауваження 4.1). Отримані співвідношення залежать лише від перших діагональних блоків X і Y матриць (6).

Теорему доведено. □

Зауваження 5.1. Можна встановити, що критерієм існування статичного регулятора по виходу $u_t = Ky_t + w_t$, що забезпечує оцінку $J < \gamma$ для замкненої системи, є сумісність системи співвідношень (34), (35) і

$$0 < X < \gamma^2 X_0, \quad XY = \gamma^2 I_n. \tag{39}$$

Дані співвідношення у випадку статичного регулятора по стану ($C = I_n$, $D = 0$) зводяться до системи ЛМН відносно Y:

$$\begin{bmatrix} P & B^T \\ B & Y \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} X_0 & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} B^{\perp T}(AYA^T - Y)B^{\perp} & B^{\perp T}AY \\ YA^TB^{\perp} & Y - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

Зауваження 5.2. Якщо $K \in \mathcal{K}_D$, то $\det\big[I_m - KD(x)\big] \neq 0$ при $x \in \mathcal{S}_0$, де $\mathcal{S}_0$ — деякий окіл точки $x = 0$, і замкнена нелінійна система (8), (32) має вигляд

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}(x_t)\widehat{x}_t + \widehat{N}(x_t)w_t, \quad y_t = \widehat{F}(x_t)\widehat{x}_t + \widehat{G}(x_t)w_t, \tag{40}$$

де всі матричні коефіцієнти є неперервними функціями у $\mathcal{S}_0$. Динамічний регулятор (32) у теоремі 5.1 забезпечує робастну стійкість нульового стану системи (40) з невизначеністю (26) і спільну функцію Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$, а лема 4.1 може бути використана для оцінки критеріїв якості J_0 і J даної системи.

6 Дискретні системи з керованими і спостережуваними виходами

Розглянемо систему керування

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= A(x_t)x_t + B_1(x_t)w_t + B_2(x_t)u_t,\\
z_t &= C_1(x_t)x_t + D_{11}(x_t)w_t + D_{12}(x_t)u_t,\\
y_t &= C_2(x_t)x_t + D_{21}(x_t)w_t + D_{22}(x_t)u_t,
\end{aligned}
\tag{41}
$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$, $w_t \in \mathbb{R}^s$, $z_t \in \mathbb{R}^k$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, $t \in \mathcal{T}$. Введемо критерій якості типу (23) для даної системи відносно вектора керованого виходу:

$$
J = \sup_{0<\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0 < \infty} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}. \tag{42}
$$

Значення J у випадку нульового початкового вектора $x_0 = 0$ позначимо через J_0. Ставиться задача побудови J- та J_0-оптимальних регуляторів, які забезпечують робастну стійкість нульового стану замкненої системи та мінімізують відповідні критерії якості J і J_0.

Сформулюємо аналог теореми 5.1 для лінійної системи з керованими і спостережуваними виходами

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t + B_2 u_t,\\
z_t &= C_1 x_t + D_{11} w_t + D_{12} u_t,\\
y_t &= C_2 x_t + D_{21} w_t + D_{22} u,
\end{aligned}
\tag{43}
$$

використовуючи динамічний регулятор (10) з початковим вектором $\xi_0 = 0$. При умові $K \in \mathcal{K}_{D_{22}}$ замкнена система (10), (43) має вигляд

$$
\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}\widehat{x}_t + \widehat{N} w_t, \quad z_t = \widehat{F}\widehat{x}_t + \widehat{G} w_t, \tag{44}
$$

де

$$
\widehat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad \widehat{M} = \begin{bmatrix} A + B_2 K_0 C_2 & B_2 U_0 \\ V_0 C_2 & Z_0 \end{bmatrix} = \widehat{A} + \widehat{B}_2 \widehat{K}_0 \widehat{C}_2,
$$

$$
\widehat{N} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 K_0 D_{21} \\ V_0 D_{21} \end{bmatrix} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 \widehat{K}_0 \widehat{D}_{21},
$$

$$
\widehat{F} = \left[C_1 + D_{12} K_0 C_2, D_{12} U_0\right] = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12} \widehat{K}_0 \widehat{C}_2,
$$

$$\widehat{G} = D_{11} + D_{12}K_0D_{21} = D_{11} + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_0\widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix},\ \widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},\ \widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix},\ \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix},\ \widehat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_1 = \big[C_1, 0_{k\times r}\big], \quad \widehat{D}_{12} = \big[D_{12}, 0_{k\times r}\big].$$

Тут невідомими є блоки матриці $\widehat{K}_0$

$$K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}K, \quad U_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}U,$$

$$V_0 = V(I_l - D_{22}K)^{-1}, \quad Z_0 = Z + VD_{22}(I_m - KD_{22})^{-1}U,$$

які однозначно визначають шукані матриці регулятора (32):

$$\begin{gathered} K = (I_m + K_0D_{22})^{-1}K_0, \quad U = (I_m + K_0D_{22})^{-1}U_0, \\ V = V_0(I_l + D_{22}K_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0D_{22}(I_m + K_0D_{22})^{-1}U_0. \end{gathered} \tag{45}$$

Перепишемо співвідношення (36) для системи (44) у вигляді ЛМН (38) відносно $\widehat{K}_0$ з такими матрицями:

$$\widehat{R} = \big[\,\widehat{C}_2, \widehat{D}_{21}, 0, 0\,\big] = \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n+r+k} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} -\widehat{X} & 0 & \widehat{A}^T & \widehat{C}_1^T \\ 0 & -\gamma^2 P & \widehat{B}_1^T & D_{11}^T \\ \widehat{A} & \widehat{B}_1 & -\widehat{X}^{-1} & 0 \\ \widehat{C}_1 & D_{11} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \tag{46}$$

$$\widehat{L} = \big[\,0, 0, \widehat{B}_2^T, \widehat{D}_{12}^T\,\big] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_2^T & D_{12}^T \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n+r+s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_k \end{bmatrix}.$$

Враховуючи матриці $W_{\widehat{R}}$, $W_{\widehat{L}}$ і застосовуючи леми 2.2, 2.3 і 4.2 (див. доведення теореми 5.1), отримаємо наступний результат.

Теорема 6.1. *Для лінійної системи* (42) *існує динамічний регулятор* (10) *з нульовим початковим вектором, що забезпечує критерій якості* $J < \gamma$ *замкненої системи, тоді і лише тоді, коли для деяких матриць* $X = X^T > 0$ *і* $Y = Y^T > 0$ *виконується система співвідношень* (7), (29) *і*

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^TXA - X + C_1^TQC_1 & A^TXB_1 + C_1^TQD_{11} \\ B_1^TXA + D_{11}^TQC_1 & B_1^TXB_1 + D_{11}^TQD_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{47}$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AYA^T - Y + B_1P^{-1}B_1^T & AYC_1^T + B_1P^{-1}D_{11}^T \\ C_1YA^T + D_{11}P^{-1}B_1^T & C_1YC_1^T + D_{11}P^{-1}D_{11}^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{48}$$

де $R = \left[C_2,\, D_{21}\right]$, $L = \left[B_2^T,\, D_{12}^T\right]$. *При цьому стан* $\widehat{x}_t \equiv 0$ *замкненої системи* (44) *з невизначеністю*

$$w_t = \gamma^{-1}\Theta z_t, \quad \Theta^T P \Theta \le Q, \tag{49}$$

робастно стійкий.

Зауваження 6.1. При застосуванні динамічного регулятора (10) порядку $r \geq n$ рангове обмеження у (7) виконується автоматично і оцінка $J < \gamma$ у теоремах 5.1 і 6.1 описується у вигляді відповідних систем ЛМН відносно X і Y.

Наведемо алгоритм побудови динамічного регулятора (10), який забезпечує оцінку $J < \gamma$ у теоремі 6.1.

Алгоритм 6.1. 1) Обчислення матриць W_R і W_L, де $R = \left[C_2,\, D_{21}\right]$, $L = \left[B_2^T,\, D_{12}^T\right]$;

2) знаходження матриць $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$, які задовольняють систему співвідношень (7), (29), (47) і (48);

3) побудова розкладу Холецького $Z = Y - \gamma^2 X^{-1} = S^T S$, де $S \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $\ker S = \ker Z$, і формування блочної матриці

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & \gamma^{-1}XS^T \\ \gamma^{-1}SX & \gamma^{-2}SXS^T + I_r \end{bmatrix};$$

4) розв'язання ЛМН (38) з матрицями (46) відносно $\widehat{K}_0$ при обмеженні $\det(I_m - KD_{22}) \neq 0$;

5) обчислення матриць регулятора (10) за формулами (45).

Зауваження 6.2. Із леми Шура випливає еквівалентне представлення матричних нерівностей (47) і (48):

$$\begin{bmatrix} W_R^T & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^TXA - X & A^TXB_1 & C_1^T \\ B_1^TXA & B_1^TXB_1 - \gamma^2 P & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} < 0, \tag{50}$$

$$\begin{bmatrix} W_L^T & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AYA^T - Y & AYC_1^T & B_1 \\ C_1YA^T & C_1YC_1^T - \gamma^2 Q^{-1} & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0. \tag{51}$$

Співвідношення (50) і (51) є ЛМН відносно X, Y, P і $Q_1 = Q^{-1}$. Тому застосування даних співвідношень замість (47) і (48) у наведеному алгоритмі дає можливість разом з X і Y знаходити вагові матриці P і Q критерію якості J.

Зауваження 6.3. Можна встановити, що критерієм існування статичного регулятора по виходу $u_t = Ky_t$, що забезпечує оцінку $J < \gamma$ у теоремі 6.1, є сумісність системи співвідношень (39), (47) і (48). Дані співвідношення у випадку регулятора по стану ($C_2 = I_n$, $D_{21} = 0$, $D_{22} = 0$) зводяться до системи ЛМН відносно Y, яка включає нерівності (48) і

$$\begin{bmatrix} X_0 & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P - \gamma^{-2} D_{11}^T Q D_{11} & B_1^T \\ B_1 & Y \end{bmatrix} > 0.$$

Зауваження 6.4. Якщо $K \in \mathcal{K}_{D_{22}}$, то $\det\big[I_m - KD_{22}(x)\big] \neq 0$ при $x \in \mathcal{S}_0$, де $\mathcal{S}_0$ — деякий окіл точки $x = 0$. Тоді нелінійна замкнена система (10), (41) набуває вигляду

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}(x_t)\widehat{x}_t + \widehat{N}(x_t)w_t, \quad z_t = \widehat{F}(x_t)\widehat{x}_t + \widehat{G}(x_t)w_t, \tag{52}$$

де всі матричні коефіцієнти є неперервними функціями в $\mathcal{S}_0$. Динамічний регулятор (10) у теоремі 6.1 забезпечує робастну стійкість нульового стану системи (52) з невизначеністю (49) і спільну функцію Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$, а лема 4.1 може бути використана для оцінки критеріїв якості J_0 і J даної системи.

7 Приклад. Двомасова механічна система

Проілюструємо викладену методику синтезу системи керування на прикладі двомасової механічної системи. Ця система складається із двох твердих тіл з масами m_1 і m_2, які з'єднані пружиною з коефіцієнтом жорсткості k і ковзають без тертя вздовж нерухомої горизонтальної поверхні (рис. 1). Неперервна модель збурених коливань системи описується рівняннями

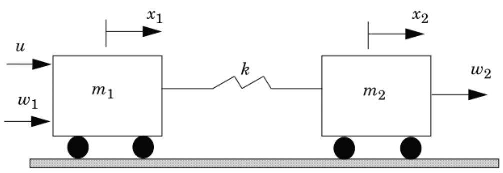

Рис. 1. Двомасова механічна система.

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \widetilde{A}x + \widetilde{B}_1 w + \widetilde{B}_2 u, \quad x(0) = x_0, \\ &z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ &y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \tag{53}$$

де

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 + w_3 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} u \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m_1} & \dfrac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{k}{m_2} & -\dfrac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \widetilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} & 0 \end{bmatrix}, \ \widetilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = 0_{2\times 3}, \quad D_{22} = 0_{2\times 1}.$$

Керування u прикладене до тіла з масою m_1 з метою стабілізації системи і мінімізації впливу зовнішніх і початкових збурень. Компоненти w_1 і w_2 вектора збурень діють відповідно на перше і друге тіло, а компонента w_3 характеризує неточність вимірюваного виходу y. Вектор керованого виходу складають керування u і зміщення другого тіла x_2.

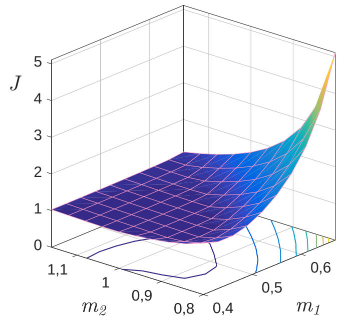

Рис. 2. Залежність J від m_1 і m_2.

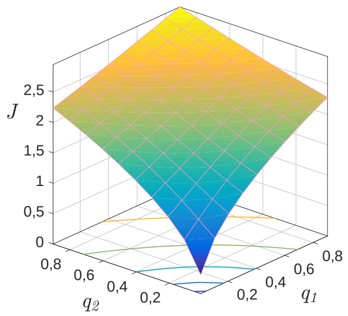

Рис. 3. Залежність J від q_1 і q_2.

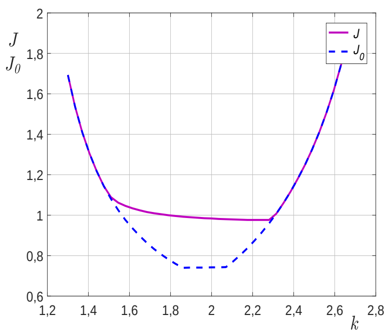

Рис. 4. Залежності J і J_0 від k.

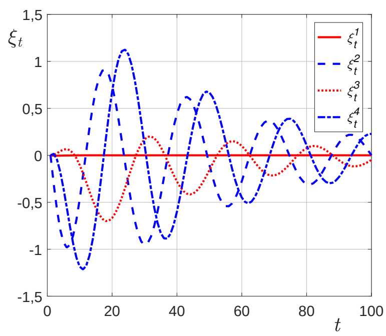

Рис. 5. Поведінка динамічного регулятора.

Дискретний аналог системи керування (53) має вигляд (43), де

$$A = e^{d\widetilde{A}} \approx I_4 + d\widetilde{A} + \frac{d^2}{2}\widetilde{A}^2 + \frac{d^3}{6}\widetilde{A}^3, \; B_1 = \int_0^d e^{\tau\widetilde{A}}\widetilde{B}_1 d\tau, \; B_2 = \int_0^d e^{\tau\widetilde{A}}\widetilde{B}_2 d\tau,$$

$d = 0,1$ — крок дискретизації, а значення інших матричних коефіці-

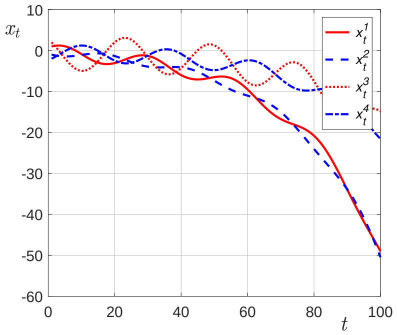

Рис. 6. Поведінка системи без керування.

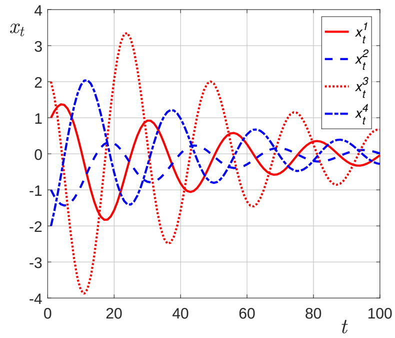

Рис. 7. Поведінка керованої системи.

єнтів наведено у (53). Дана система без керування нестійка.

Поклавши

$$m_1 = 0,5, m_2 = 1, k = 2, P = \operatorname{diag}\{p_1, p_2, p_3\}, Q = \operatorname{diag}\{q_1, q_2\}, X_0 = 4I_4,$$

де $p_1 = p_2 = 2$, $p_3 = 0,5$ і $q_1 = q_2 = 0,1$, за допомогою алгоритму 6.1 проводилась мінімізація параметра γ, при якому виконувались система співвідношень (7), (47) і (48) у теоремі 6.1. У результаті при $\gamma = 0,984$ наближено отримано J-оптимальний динамічний регулятор (10) повного порядку $r = 4$ з матрицями

$$K = \begin{bmatrix} -0,55838 & -2,48726 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0,00045 & 0,00512 \\ -0,11062 & 0,19995 \\ 0,07103 & 0,06702 \\ -0,04030 & -0,05621 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} -0,03419 & 2,16121 & 3,17227 & 0,03458 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0,00001 & -0,00449 & -0,00483 & -0,00144 \\ 0,00309 & 0,67937 & -0,01313 & -0,24402 \\ 0,00134 & -0,04211 & 0,79986 & 0,06285 \\ -0,00186 & 0,26189 & 0,01718 & 0,95941 \end{bmatrix},$$

який забезпечує неекспансивність і ρ-стійкість замкненої системи, при цьому $\rho = 0,98609$, $J_0 = 0,74219$ і $J = 0,98389$.

Досліджено залежність характеристик J_0 і J від механічних параметрів m_0, m_1 і k, а також вагових коефіцієнтів q_1 і q_2 (див. рис. 2 – 4). Значення J характеризує рівень погашення коливань у системі, що залежать від зовнішніх збурень і початкового вектора. Дана характеристика збільшується при збільшенні маси m_1 і зменшенні маси m_2 у розглянутих межах (рис. 2).

На рис. 6 і 7 показана поведінка компонент фазового вектора x_t відповідно системи без керування і замкненої системи при наведених значеннях параметрів і початкового вектора $x_0 = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right]$, а на рис. 5 — поведінка динамічного регулятора з нульовим початковим вектором. При цьому вектор збурення взято у вигляді (49), де $\Theta = \sqrt{P}^{-1} E \sqrt{Q}$ і $E = \left[\begin{array}{cc} I_2 & 0_{2\times 1} \end{array}\right]^T$, причому $\Theta^T P \Theta = Q$.

8 Висновок

Для деяких класів лінійних та нелінійних систем керування з дискретним часом отримано умови існування та методи побудови стабілізуючих динамічних регуляторів по вимірюваному виходу. Для дискретних систем з керованими і спостережуваними виходами запропоновано метод побудови динамічних регуляторів, які забезпечують оцінку та мінімізацію зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень, а також робастну стійкість стану рівноваги відносно деякої множини невизначеностей. Відповідний алгоритм синтезу керування з використанням динамічного регулятора повного порядку або статичного регулятора по стану зводяться до розв'язування системи лінійних матричних нерівностей. Використовуючи засоби комп'ютерної системи Matlab, проведена чисельна реалізація даного алгоритму на прикладі двомасової механічної системи.

[1] *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.

[2] *Кунцевич В. М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 264 с.

[3] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.

[4] *Ларин В. Б., Туник А. А.* О компенсации внешних возмущений динамической обратной связью по выходной переменной // Прикладная механика. — 2006. — **42**, 5. — С. 132–144.

[5] *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Праці Інституту математики НАН України, 2016. — **102**. — 332 с.

[6] *Dullerud G. E., Paganini F. G.* A Course in Robust Control Theory. A Convex Approach. — Berlin: Springer-Verlag, 2000. — 419 p.

[7] *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421 – 448.

[8] *Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106–125.

[9] *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика.— 2005. — № 5. — С. 7–46.

[10] *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M.* The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. — Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995. — 138 p.

[11] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[12] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления. — Нижний Новгород: ННГУ, 2010. — 93 с.

[13] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 6. — С. 20–38.

[14] *Баландин Д. В., Коган М. М, Кривдина Л. Н., Федюков А. А.* Синтез обобщенного H_∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 1. — С. 3–22.

[15] *Мазко О. Г., Кусій С. М.* Задачі стабілізації і гасіння зовнішніх збурень в системах керування // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, 5. — С. 90–108.

[16] *Мазко А. Г., Кусий С. Н.* Стабилизация по измеряемому выходу и оценка уровня гашения возмущений в системах управления // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, 3. — С. 373–387.