Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 2, 122–132

УДК 517.9

Граничні стани дискретних динамічних систем з притягальною взаємодією

О. Р. Сатур

Інститут математики НАН України, Київ; kseniajasko@gmail.com

We study a model of discrete conflict dynamical system with attractive interaction, which describes the redistribution of the conflict space between two opponents. Existence of the equilibrium state of the dynamical systems is proved and explicit formulas for the limit distributions in terms of stochastic vectors are derived. The evolution of the redistribution of the conflict space is illustrated for a case.

Досліджується модель дискретної динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією, що описує перерозподіл конфліктного простору між двома опонентами. Доведено існування рівноважного стану системи та отримано явні формули для граничних розподілів динамічної системи у термінах стохастичних векторів. На конкретному прикладі продемонстровано еволюцію перерозподілу конфліктного простору.

Исследуется модель дискретной динамической системы конфликта с притягательним взаимодействием, которая описывает перераспределение конфликтного пространства между двумя оппонентами. Доказано существование равновесного состояния системы и получены явные формулы для предельных распределений динамической системы в терминах стохастических векторов. На конкретном примере продемонстрировано эволюцию перераспределения конфликтного пространства.

Вступ

У цій роботі досліджується динамічна система, що описує модель поведінки двох опонентів. Ми спираємось, зокрема, на роботи [2, 6–8], присвячені теорії динамічних систем конфлікту з притягальною та відштовхувальною взаємодією.

Розглянемо фізичну систему, яка складається з двох протидіючих сторін. Ці сторони називаємо опонентами та позначимо через A та

© Сатур О. Р., 2017

B. Вважаємо, що опоненти A, B у початковий (доконфліктний) момент часу задані стохастичними розподілами їхньої присутності на спільному просторі існування Ω. У загальному випадку опонентам A, B відповідають ймовірнісні міри μ, ν, визначені на деякій $\sigma-$алгебрі підмножин з простору Ω. Символом $\divideontimes$ позначаємо конфліктну взаємодію між опонентами.

Задача полягає у побудові та дослідженні моделі складної динамічної системи, яка описує поведінку в часі фізичної системи $\{A, B, \divideontimes\}$ із конфліктною взаємодією між A та B. Таку модель можна зобразити як динамічну систему

$$\left\{ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right\} \xrightarrow{\divideontimes, t} \left\{ \begin{array}{c} A^t \\ B^t \end{array} \right\}, \ \ t \geqslant 0. \tag{1}$$

Математично еволюція фізичної системи $\{A, B, \divideontimes\}$ задається траєкторіями динамічної системи у термінах мір:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu \end{array} \right\} \xrightarrow{\divideontimes, t} \left\{ \begin{array}{c} \mu^t \\ \nu^t \end{array} \right\}, \ \ t \geqslant 0, \tag{2}$$

де $\divideontimes, t$ позначає конфліктне перетворення на момент часу t. Динамічна система такого типу називається *динамічною системою конфлікту* [5].

У загальному випадку простір існування Ω, на якому співіснують опоненти A та B, природним чином розкладається на обмежену кількість регіонів:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i, 2 \leqslant n < \infty.$$

Кожен окремий регіон Ω_i $(\Omega_i = \omega_i)$ називається *позицією конфлікту.* Боротьба між опонентами відбувається за кожну спірну позицію.

У роботах [1–3, 5, 7, 9] побудовано динамічні системи конфлікту, що описують поведінку складних систем з внутрішньою конфліктною взаємодією. Зокрема у роботах [1, 3] досліджується динамічна система конфлікту в дискретному часі, задана у просторі стохастичних векторів. Ця система описана наступним чином.

Кожному опоненту відповідає стохастичний вектор з евклідового простору $\mathbb{R}^n$, тобто розглядається пара векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ...p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, ...r_n)$ $\|\mathbf{p}\|_1 = \|\mathbf{r}\|_1 = 1$ (тут $\| \cdot \|_1$ позначає l_1-норму на $\mathbb{R}^n$, тобто $\|\mathbf{p}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |p_i|$). Конфліктна взаємодія між опонентами задана різницевими рівняннями виду

$$p_i^{N+1} = \frac{1}{z^N} p_i^N (1 - \alpha r_i^N), r_i^{N+1} = \frac{1}{z^N} r_i^N (1 - \alpha p_i^N), \qquad (3)$$

де $N = 0, 1, ...,$ $p_i^0 = p_i$, $r_i^0 = r_i$ — координати стартових векторів, $-1 \geq \alpha \geq 1$ $(\alpha \neq 0)$ позначає константу зв'язку. А нормувальний коефіцієнт z^N вибирається таким чином, щоб нова пара векторів залишалась стохастичною ($\|\mathbf{p}^{N+1}\|_1 = \|\mathbf{r}^{N+1}\|_1 = 1$). Легко визначити, що $z^N = 1 - \alpha \sum_{i=1}^{n} p_i^N r_i^N$, при чому вважаємо, що $\alpha \neq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i^N r_i^N}$.

Зауважимо, що, залежно від знаку константи зв'язку α, рівняння (3) описують систему з відштовхувальною ($\alpha > 0$) або притягальною ($\alpha < 0$) взаємодією. Зокрема, дослідження динамічних систем з притягальною взаємодією описано у роботах [2, 7].

У роботах [6, 8] запропоновано побудову динамічної системи конфлікту з відштовхувальною взаємодією в просторі мір, яка у випадку стохастичних векторів має такий вигляд:

$$\begin{array}{l} p_i^{N+1} = \frac{1}{z^N}(p_i^N(1+\theta^N) - \tau_i^N), \\ r_i^{N+1} = \frac{1}{z^N}(r_i^N(1+\theta^N) - \tau_i^N), \ N = 0, 1, 2... \end{array} \qquad (4)$$

θ^N — показник глобальної еволюції $(0 < \theta^N \leq 1)$, τ_i^N — показник конфлікту ($\tau^N \in \mathbb{R}^n$, $\tau_i^N \geq 0$). Доведено існування нерухомих граничних точок (рівноважних станів) та дано їх опис у термінах розкладу Гана-Жордана.

У цій роботі досліджується динамічна система конфлікту з взаємодією притягання, тобто з коефіцієнтом $\alpha = +1$ перед показником захоплення τ_i^N.

1 Існування граничних координат

Нехай Ω — деяка скінченна множина, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n\}$, $n > 1$. Зафіксуємо пару ймовірнісних дискретних мір μ, ν на Ω. Розподіли цих мір визначають пару векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$:

$$\mu(\omega_i) = p_i \geq 0, \ \nu(\omega_i) = r_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots n.$$

Зрозуміло, що вектори $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ...p_n)$ та $\mathbf{r} = (r_1, r_2, ...r_n)$ належать $\mathbb{R}_+^n$ і є стохастичними векторами, тобто

$$p_i \geq 0, \ \|p\|_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \mu(\omega_i) = \mu(\Omega) = 1,$$

$$r_i \geq 0,\ \|r\|_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} \nu(\omega_i) = \nu(\Omega) = 1.$$

Задамо нелінійне, некомутативне перетворення конфлікту $\divideontimes$ між двома стохастичними векторами $\mathbf{p}, \mathbf{r}$:

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{p} \divideontimes \mathbf{r},\ \mathbf{r}^1 = \mathbf{r} \divideontimes \mathbf{p},$$

де нова пара векторів $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{r}^1$ визначається за правилом:

$$p_i^1 = \frac{p_i(\theta+1)+\tau_i}{z},\ r_i^1 = \frac{r_i(\theta+1)+\tau_i}{z},$$

де $\theta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i r_i}$, $\tau_i = \min\{p_i, r_i\}$, коефіцієнт $z = 1+\theta+W$, де $W = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$.

Нормуючий коефіцієнт z забезпечує стохастичність векторів $\mathbf{p}^1$ та $\mathbf{r}^1$, які очевидно належать $\mathbb{R}_+^n$.

Таким чином, для заданої пари векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$ перетворення $\divideontimes$ породжує траєкторію динамічної системи конфлікту

$$\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\} \xrightarrow{\divideontimes} \{\mathbf{p}^{N+1}, \mathbf{r}^{N+1}\},\ N = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

де $\mathbf{p^0} = \mathbf{p}$, $\mathbf{r^0} = \mathbf{r}$ та

$$p_i^{N+1} = \frac{p_i^N(\theta^N+1)+\tau_i^N}{z^N}, \quad r_i^{N+1} = \frac{r_i^N(\theta^N+1)+\tau_i^N}{z^N}, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \theta^N = \sum_{i=1}^{2} \sqrt{p_i^N r_i^N}, \\ \tau_i^N = \min\{p_i^N, r_i^N\}, \\ z^N = \theta^N + 1 + W^N, \quad W^N = \sum_{i=1}^{n} \tau_i^N. \end{gathered} \tag{7}$$

Теорема 1.1. *Кожна траєкторія динамічної системи конфлікту* (5) *з довільною початковою парою стохастичних векторів* $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$ $(n > 1)$, *збігається до граничного стану* $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$. *Тобто для послідовностей векторів* $\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N$, *координати яких задані формулами* (6), *існують границі:*

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{N\to\infty} \mathbf{p}^N, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{N\to\infty} \mathbf{r}^N.$$

Доведення. Зафіксуємо довільний індекс $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Розглянемо послідовність $(\tau_i^N)_{N=0}^{\infty}$. Оскільки $\tau_i^N = \min\{p_i^N, r_i^N\}$, причому $0 \leq p_i^N, r_i^N \leq 1$, то
$$0 \leq \tau_i^N \leq 1, \tag{8}$$
тобто $(\tau_i^N)_{N=0}^{\infty}$ є обмеженою при $N \to \infty$.

Покажемо, що $(\tau_i^N)_{N=0}^{\infty}$ – монотонна. З рівності (6) та (7) випливає, що
$$\tau_i^{N+1} = \frac{\tau_i^N(\theta^N + 1) + \tau_i^N}{z^N} = \frac{\tau_i^N(\theta^N + 2)}{z^N},$$
$$\tau_i^{N+1} = \tau_i^N \cdot \frac{\theta^N + 2}{\theta^N + 1 + W^N.} \tag{9}$$

Позначимо $s^N = \frac{\theta^N+2}{\theta^N+1+W^N}$, тоді
$$\tau_i^{N+1} = \tau_i^N \cdot s^N.$$

Очевидно, що $0 \leq \theta^N \leq 1$. Оцінимо $W^N = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i^N$. З (7) та умови нормованості векторів випливає, що $W^N \leq 1$. Звідси $s^N \geq 1$, і тому
$$\tau_i^{N+1} \geq \tau_i^N. \tag{10}$$
Отже, $(\tau_i^N)_{N=0}^{\infty}$ – монотонна.

Оскільки $(\tau_i^N)_{N=0}^{\infty}$ – монотонна обмежена послідовність, то для довільного $i = \overline{1, n}$ існує
$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \tau_i^N = \tau_i^{\infty}.$$

У випадку рівних початкових векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$, враховуючи умову (7), отримуємо $\mathbf{p}^N = \mathbf{r}^N = \tau^N$, тобто $p_i^N = r_i^N = \tau_i^N \ \forall\ i = \overline{1, n}$. З вищедоведеного випливає існування граничних векторів $\mathbf{p}^{\infty}$ та $\mathbf{r}^{\infty}$, причому $\mathbf{p}^{\infty} = \mathbf{r}^{\infty} = \tau^{\infty}$.

Розглянемо випадок різних початкових векторів, тобто $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$. Нехай для деякого i між координатами p_i, r_i виконується нерівність $p_i > r_i$. Виконавши тотожні перетворення даної нерівності, а саме: домноживши нерівність на $(\theta + 1)$, додавши до обох її частин τ_i та поділивши на z, отримаємо
$$\frac{p_i(\theta + 1) + \tau_i}{z} > \frac{r_i(\theta + 1) + \tau_i}{z},$$

тобто $p_i^1 > r_i^1$. Аналогічними міркуваннями отримуємо нерівність для усіх N:

$$p_i^N > r_i^N, \quad N = 0, 1, \ldots$$

Оскільки $\tau_i^N = \min\{p_i^N, r_i^N\}$, то $r_i^N = \tau_i^N$. Вже доведено, що $(\tau_i^N)_{N=0}^{\infty}$ – монотонна обмежена послідовність, тому $(r_i^N)_{N=0}^{\infty}$ також монотонна обмежена послідовність, тобто існує границя:

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} r_i^N = r_i^{\infty} = \tau_i^{\infty}.$$

Безпосередньо встановлюємо, що для всіх координат τ_j, $j = \overline{1,n}$ вектора τ виконуються співвідношення:

$$\frac{\tau_j^{N+1}}{\tau_i^{N+1}} = \frac{\tau_j^N \cdot \frac{\theta^N+2}{\theta^N+1+W^N}}{\tau_i^N \cdot \frac{\theta^N+2}{\theta^N+1+W^N}} = \frac{\tau_j^N}{\tau_i^N}$$

$$\frac{\tau_j^N}{\tau_i^N} = \frac{\tau_j^{N-1} \cdot \frac{\theta^{N-1}+2}{\theta^{N-1}+1+W^{N-1}}}{\tau_i^{N-1} \cdot \frac{\theta^{N-1}+2}{\theta^{N-1}+1+W^{N-1}}} = \frac{\tau_j^{N-1}}{\tau_i^{N-1}}$$

$$\ldots$$

$$\frac{\tau_j^1}{\tau_i^1} = \frac{\tau_j^0 \cdot \frac{\theta^0+2}{\theta^0+1+W^0}}{\tau_i^0 \cdot \frac{\theta^0+2}{\theta^0+1+W^0}} = \frac{\tau_j^0}{\tau_i^0}.$$

Отже, відношення

$$\frac{\tau_j^N}{\tau_i^N} = \frac{\tau_j^0}{\tau_i^0} \tag{11}$$

є незалежним від N.

Розглянемо співвідношення

$$\frac{\tau_i^N}{W^N} = \frac{\tau_i^N}{\tau_1^N + \cdots + \tau_i^N + \cdots + \tau_n^N} = \frac{1}{\frac{\tau_1^N}{\tau_i^N} + \cdots + 1 + \cdots + \frac{\tau_n^N}{\tau_i^N}}.$$

З рівняння (11) випливає, що

$$\frac{\tau_i^N}{W^N} = \frac{1}{\frac{\tau_1^N}{\tau_i^N} + \cdots + 1 + \cdots + \frac{\tau_n^N}{\tau_i^N}} = \frac{1}{\frac{\tau_1^0}{\tau_i^0} + \cdots + 1 + \cdots + \frac{\tau_n^0}{\tau_i^0}} = \frac{\tau_i^0}{W^0}.$$

Тобто

$$\frac{\tau_i^0}{W^0} = \frac{\tau_i^N}{W^N} \tag{12}$$

для будь-якого $N = 1, 2, ...$

Припустимо, що для деякого фіксованого i виконується нерівність $p_i < \frac{\tau_i}{W}$. Домноживши цю нерівність на $(\theta + 1)$, додавши до обох її частин τ_i та поділивши на z, отримаємо

$$\frac{p_i(\theta+1)+\tau_i}{z} < \frac{\tau_i}{W} \cdot \frac{\theta+1+W}{z},$$

тобто $p_i^1 < \frac{\tau_i}{W} \cdot 1$. Враховуючи вищедоведену рівність (12), можна стверджувати, що $p_i^1 < \frac{\tau_i^1}{W^1}$. Отже, згідно з принципом математичної індукції, нерівність

$$p_i^N < \frac{\tau_i^N}{W^N} \tag{13}$$

справедлива для довільного N.

Розглянемо різницю деякої фіксованої $i-$тої координати вектора $\mathbf{p}$ на $N-$му та $(N+1)-$му кроках

$$p_i^{N+1} - p_i^N = \frac{p_i^N(\theta^N+1)+\tau_i^N}{z^N} - p_i^N =$$

$$= \frac{\tau_i^N - p_i^N \cdot W^N}{z^N} = \frac{W^N}{z^N}\left(\frac{\tau_i^N}{W^N} - p_i^N\right).$$

Очевидно, $\frac{W^N}{z^N} > 0$. Тому, якщо для деякого фіксованого i виконується (13), то для довільного $N = 0, 1, \ldots$ виконується нерівність $p_i^N < \frac{\tau_i^N}{W^N}$, тобто послідовність $(p_i^N)_{N=0}^{\infty}$ зростає. Аналогічно послідовність $(p_i^N)_{N=0}^{\infty}$ спадає при умові $p_i^N > \frac{\tau_i}{W}$.

З попередніх міркувань випливає, що $(p_i^N)_{N=0}^{\infty}$ — монотонна по N. За теоремою про монотонну обмежену послідовність отримуємо, що існує

$$\lim_{N\to\infty} p_i^N = p_i^{\infty}.$$

Отже, існують граничні вектори $\mathbf{p}^{\infty}$, $\mathbf{r}^{\infty}$ з координатами

$$p_i^{\infty} = \lim_{N\to\infty} p_i^N, \quad r_i^{\infty} = \lim_{N\to\infty} r_i^N.$$

Теорему доведено.

2 Нерухомі точки динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією

Наведемо теорему, яка описує інваріантні граничні міри μ^∞, ν^∞ у термінах граничних значень координат p_i^∞, r_i^∞ стохастичних векторів $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$.

Теорема 2.1. *Нехай траєкторія динамічної системи конфлікту* (5)*, породжена парою стохастичних векторів* $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$*, збігається до граничного стану* $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$*. Тоді граничний стан* $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ *є нерухомою точкою, тобто*

$$\mathbf{p}^\infty = \mathbf{p}^\infty * \mathbf{r}^\infty, \ \mathbf{r}^\infty = \mathbf{r}^\infty * \mathbf{p}^\infty.$$

Причому, якщо $\mathbf{p} = \mathbf{r}$*, то* $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{p}, \ \mathbf{r}^\infty = \mathbf{r}$*. Якщо* $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$*, то* $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$ *і*

$$p_i^\infty = r_i^\infty = \frac{\tau_i}{W},$$

де $\tau_i = \min\{p_i, r_i\}, W = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$.

Для доведення теореми 2.1 використаємо наступне твердження.

Твердження 2.1. *Для довільного* $i = \overline{1,n}$ *при* $N \to \infty$ *виконується*

$$p_i^N - r_i^N \to 0.$$

Доведення. Розглянемо різницю i-тих координат векторів $\mathbf{p}^{N+1}$ та $\mathbf{r}^{N+1}$. Позначимо $d_i^{N+1} = p_i^{N+1} - r_i^{N+1}$,

$$d_i^{N+1} = \frac{p^N(\theta^N + 1) + \tau_i^N}{z^N} - \frac{r^N(\theta^N + 1) + \tau_i^N}{z^N} = (p_i^N - r_i^N)\frac{\theta^N + 1}{z^N}.$$

Тоді

$$d_i^{N+1} = d_i^N \cdot k^N, \tag{14}$$

де

$$k^N = \frac{\theta^N + 1}{\theta^N + 1 + W^N}.$$

Припустимо супротивне. Нехай для довільного $i = \overline{1,n}$ при $N \to \infty$

$$d_i^N \nrightarrow 0.$$

Розглянемо рівність (14) при $N \to \infty$. За теоремою 1.1, існують границі $lim_{N\to\infty} p_i^N = p_i^\infty$ та $lim_{N\to\infty} r_i^N = r_i^\infty$. Отже, існують границі $lim_{N\to\infty} d_i^N = d_i^\infty$, $lim_{N\to\infty}\theta^N = \theta^\infty \geq 0$, $lim_{N\to\infty} W^N = W^\infty > 0$. Таким чином отримаємо рівність $d_i^\infty = \frac{\theta^\infty+1}{\theta^\infty+1+W^\infty} \cdot d_i^\infty$. Ця рівність можлива лише у випадку $d_i^\infty = 0$. Отримали суперечність. Отже, припущення невірне, тобто для довільного $i = \overline{1,n}$

$$d_i^\infty \to 0.$$

Доведення теореми 2.1. З твердження 2.1 випливає рівність граничних векторів. Враховуючи (7), отримуємо рівність $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = \tau^\infty$.

Якщо початкові вектори рівні, то $\forall\ i\ p_i = r_i = \tau_i$ і $W = 1$. Використовуючи формулу (6), отримуємо $p_i^1 = p_i = r_i = r_i^1$. Аналогічно $p_i^N = p_i = r_i = r_i^N$. Тому при $N \to \infty$

$$\mathbf{p}^\infty = \mathbf{p} = \mathbf{r} = \mathbf{r}^\infty.$$

Доведемо теорему для випадку різних початкових векторів. Знайдемо значення τ_i^∞. Використавши формули (9) для деякої i-тої координати вектора τ та враховуючи рівність (12), отримаємо

$$\tau_i^{N+1} = \tau_i^N \cdot \frac{\theta^N + 2}{\theta^N + 1 + W^N} = \frac{\tau_i^N}{W^N} \cdot \frac{\theta^N + 2}{\frac{\theta^N+1}{W^N} + 1} = \frac{\tau_i}{W} \cdot \frac{\theta^N + 2}{\frac{\theta^N+1}{W^N} + 1}.$$

Оскільки $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = \tau^\infty$, то

$$\sum_{i=1}^n p_i^\infty = \sum_{i=1}^n r_i^\infty = \sum_{i=1}^n \tau_i^\infty = 1,$$

тобто $\lim_{N\to\infty} W^N = 1$. Тоді

$$\tau_i^\infty = \lim_{N\to\infty} \tau_i^{N+1} = \lim_{N\to\infty} (\frac{\tau_i}{W} \cdot \frac{\theta^N + 2}{\frac{\theta^N+1}{W^N} + 1}) = \frac{\tau_i}{W} \lim_{N\to\infty} (\frac{\theta^N + 2}{\frac{\theta^N+1}{W^N} + 1}) = \frac{\tau_i}{W}.$$

Отже, при $N \to \infty$

$$p_i^\infty = r_i^\infty = \frac{\tau_i}{W}.$$

Теорему доведено.

Твердження 2.2. *Граничні вектори* $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$ *є нестабільними.*

Доведення. Довільне ε-збурення граничних точок

$$\mathbf{p}^{\infty} \to \mathbf{p}^{\infty} + \varepsilon = \{p_i^{\infty} + \varepsilon_i\},$$

$$\mathbf{r}^{\infty} \to \mathbf{r}^{\infty} + \varepsilon^{'} = \{r_i^{\infty} + \varepsilon_i^{'}\},$$

де $\sum\limits_i \varepsilon_i = 0$, $\sum\limits_i \varepsilon_i^{'} = 0$ змінює τ_i та W. Тому існують нові значення границь, відмінні від $\mathbf{p}^{\infty} = \lim_{N\to\infty} \mathbf{p}^N, \mathbf{r}^{\infty} = \lim_{N\to\infty} \mathbf{r}^N$. А це означає, що вектори $\mathbf{p}^{\infty}, \mathbf{r}^{\infty}$ є нестабільними.

Розглянемо приклад. Нехай маємо вектори $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^3$ з координатами:

$$\mathbf{p} = (0.58; 0.06; 0.36),$$

$$\mathbf{r} = (0.43; 0.3; 0.27).$$

На рис. 1 зображено траєкторію динамічної системи конфлікту (5) з векторами $\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N$, координати яких визначаються за формулами (6).

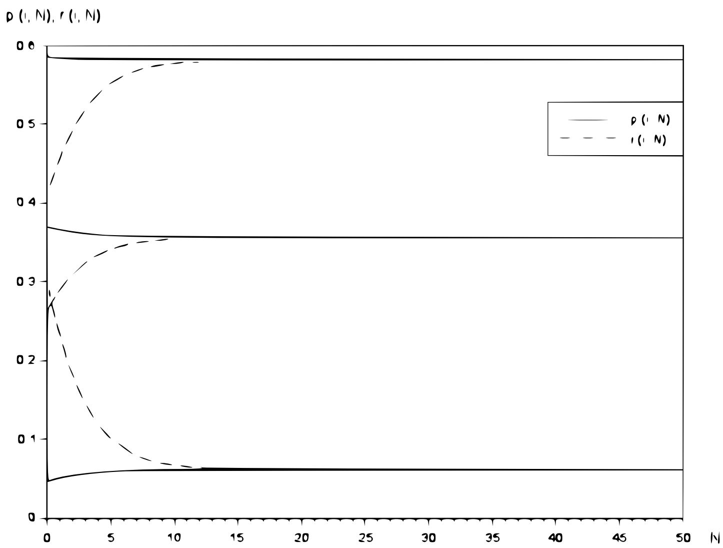

Рис. 1

Це типовий варіант динаміки з трьома спірними позиціями. У цьому випадку граничному стану системи, згідно з теоремою 2.1, відповідають вектори

$$\mathbf{p}^{\infty} = \mathbf{r}^{\infty} = (0.5733; 0.08; 0.3476).$$

За побудовою граничний стан такої системи є нерухомою точкою.

Цей приклад демонструє твердження теореми 2.1 для конкретної моделі динамічної системи конфлікту, еволюція у часі векторів $\mathbf{p}^N$ та $\mathbf{r}^N$ якої задається формулами (6).

[1] *Боднарчук М. В., Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.* Властивості граничних станів динамічної системи конфлікту // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, 4. — С. 446–461.

[2] *Боднарчук М. В., Кошманенко В. Д., Самойленко І. В.* Динаміка взаємодії конфлікту між системами з внутрішньою структурою // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, 4. — С. 435–450.

[3] *Кошманенко В. Д.* Теорема про конфликт для пары стохастических векторов // Укр. матем. журн. — 2003. — **55**, 4. — С. 555–560.

[4] *Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.* Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі кусково-рівномірно розподілених мір // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, 7. — С. 927–938.

[5] *Кошманенко В. Д.* Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. — К.: Наук. думка, 2016. — 287 с.

[6] *Кошманенко В. Д., Петренко С. М.* Розклад Гана-Жордана як рівноважний стан системи конфлікту // Укр. мат. журн. — 2016. — **67**, 1. — С. 64–77.

[7] *Albeverio S., Bodnarchyk M., Koshmanenko V.* Dynamics of Discrete Conflict Interactions Between Non-annihilating Opponent // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2005. — **11**, 4. — P. 309–319.

[8] *Koshmanenko V.* Existence theorems of the ω-limit states for conflict dynamical systems // Methods Funct. Anal. Topology. — 2014. — **20**, 4. — P. 379–390.

[9] *Koshmanenko V., Kharchenko N.* Fixed points of complex system with attarachtive interaction / V. Koshmanenko, N. Kharchenko // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2017. — **23**, 2. — P. 164–176.