Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 2, 25–31

УДК 531:383-62:50

# Адаптивна ідентифікація керованої системи зі збуреною кососиметричною матрицею коефіцієнтів *

**О. П. Коломійчук**[1], **В. В. Новицький**[2]

[1] *Інститут математики НАН України, Київ; kolomithyk@imath.kiev.ua;*
[2] *Інститут математики НАН України, Київ; Novyc@imath.kiev.ua*

The model of a controlled object in the form of a system with perturbed skew-symmetric non-degenerate coefficient matrix is investigated. An adaptive identification algorithm is developed for identifying unknown parameters of the system.

Досліджено модель керованого об'єкта у вигляді системи зі збуреною кососиметричною невиродженою матрицею коефіцієнтів. Розвинуто алгоритм адаптивної ідентифікації для визначення невідомих параметрів системи.

## 1 Вступ

Розглянемо повністю керовану систему, яка описується наступним рівнянням:

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + Bu, \tag{1}$$

де $x = [x_1, \cdots, x_{2n}]^T$ — $2n$-вимірний вектор стану, $u = [u_1, \cdots, u_m]^T$ — $m$-вимірний вектор керувань, $A_0 = -A_0^T \in \Re_{2n\times 2n}$ — кососиметрична невироджена матриця, $A_1 \in \Re_{2n\times 2n}$, $B \in \Re_{2n\times m}$, $\varepsilon$ — відомий малий параметр, а матриці $A_0, A_1$ та $B$ невідомі.

*Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0117U004077

У вигляді (1) описується деякий клас реальних керованих об'єктів, зокрема, гіроскопічні системи. У роботі [1] матриці коефіцієнтів системи вважаються відомими. Для такої системи розроблено алгоритм побудови оптимального керування, який ґрунтується на другому методі Ляпунова. Щоб побудувати адаптивне керування [2] для системи (1) з невідомими параметрами і застосувати існуючий алгоритм, необхідно відновити матриці $A_0, A_1$ та $B$.

## 2 Ідентифікація системи з кососиметричною невиродженою матрицею коефіцієнтів методом квазілінеаризації

Відновимо матриці $A_0, A_1$ та $B$ за допомогою методу квазілінеаризації [3]. Нехай $\tilde{p}$ — 4n-вимірний вектор параметрів

$$\tilde{p} = [a_1, ...a_{2n}, b_1, ..., b_{2n}]^T, \tag{2}$$

де $a_i$ — рядки матриці $A = A_0 + \varepsilon A_1$, а $b_i$ — рядки матриці $B$.

Записавши вектор $\tilde{p}$ у вигляді (2), для (1), стає зрозумілим, що деякі його компоненти можуть бути нульовими. У зв'язку з цим утворимо з (2) $r$-вимірний вектор параметрів

$$p = [p_1, p_2, \ldots, p_r]^T, \tag{3}$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — ненульові компоненти $\tilde{p}$.

Компоненти $p$ невідомі і підлягають ідентифікації, тоді як вектори $x$ та $u$ вимірюються. Система рівнянь (1) підпорядкована $(2n+r)$ граничним умовам, які задаються $(2n+r)$ відомими функціями $x_j(t_i)$, що вимірюються для різних станів $x_j$ у різні моменти часу $t_i$. Вважаючи компоненти вектора $p$ сталими, доповнимо (1) наступним рівнянням:

$$\dot{p} = 0. \tag{4}$$

Поєднавши рівняння (1) та (4), отримаємо

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u, \tag{5}$$

де

$$z = [x_1, \cdots, x_{2n}, p_1, \cdots, p_r]^T \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0 + \varepsilon A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\tilde{A} \in \Re_{2n+r\times 2n+1}, \quad \tilde{B} \in \Re_{2n+r\times m}.$$

Система (1) має особливу форму (структуру). Ця форма впливає на структуру векторів $p$ та $z$. Цей факт призводить до певних спрощень при відновленні невідомих параметрів системи (1), а саме: до зменшення розміру системи, яку треба буде розв'язувати для відновлення вектора $p$.

У випадку, коли система (5) нелінійна, слід враховувати у розкладі у ряд Тейлора тільки члени першого порядку [3], для отримання $(\mu+1)$ оцінки $\dot{z}$ з $\mu$, оцінки у вигляді

$$\hat{\dot{z}}_{\mu+1} = \hat{\psi}_{\mu+1} = \hat{\psi}_{\mu} + \frac{\partial\hat{\psi}_{\mu}}{\partial z}(\hat{z}_{\mu+1} - \hat{z}_{\mu}), \tag{7}$$

де

$$\psi = \begin{bmatrix} (A_0 + \varepsilon A_1)x + Bu \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

У (8) кількість нулів дорівнює $r$ та виконується наступне:

$$\frac{\partial\hat{\psi}_{\mu}}{\partial z} = \left.\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}\right|_{z=\hat{z}_{\mu}}. \tag{9}$$

Рівняння (7) — лінійне відносно $\hat{z}_{\mu+1}$. Тому

$$\hat{\dot{z}}_{\mu+1}(t) = \hat{A}_{\mu} \cdot \hat{z}_{\mu+1}(t) + \hat{V}_{\mu}, \tag{10}$$

де

$$\hat{V}_{\mu} = \hat{\psi}_{\mu} - \frac{\partial\hat{\psi}_{\mu}}{\partial z}\hat{z}_{\mu} = \hat{\psi}_{\mu} - \hat{A}\hat{z}_{\mu}, \tag{11}$$

$$\hat{A} = \frac{\partial\hat{\psi}_{\mu}}{\partial z}. \tag{12}$$

Рівняння (10) має загальний розв'язок

$$\hat{z}_{\mu+1}(t) = \hat{\phi}(t, t_0)\hat{z}_{\mu+1}(t_0) + \hat{q}_{\mu+1}(t), \tag{13}$$

де

$$\hat{\dot{\phi}}_{\mu+1}(t, t_0) = \frac{\partial\hat{\psi}_{\mu}(t)}{\partial z})\hat{\phi}_{\mu+1}(t, t_0), \tag{14}$$

$$\hat{\phi}_{\mu+1}(t,t_0) = I, \quad \forall\mu,$$

а $\hat{q}_{\mu+1}(t)$ — частковий розв'язок:

$$\hat{q}_{\mu+1}(t) = \hat{\psi}_\mu(\hat{z},t) - \frac{\partial\hat{\psi}_\mu(t)}{\partial z} z_\mu(t) + \frac{\partial\hat{\psi}_\mu(t)}{\partial z}\hat{q}_{\mu+1}(t), \qquad (15)$$

за умови

$$\hat{q}_{\mu+1}(t_0) = 0.$$

Вектор початкових умов $\hat{z}_{\mu+1}(t_0), \forall\mu$, будується таким чином, що задовольняє багатоточкову граничну умову, яка задається $(2n+r)$ величинами, або функціями $x_j(t_i)$, які вимірюються і які є вимірами стану $x_j$ у момент часу $t_i$.

Для (13) маємо

$$x_j(t_i) = \hat{\phi}_{j,\mu+1}(t_i,t_0)\hat{z}_{\mu+1}(t_0) + q_{j,\mu+1}(t_i), \qquad (16)$$

де $\phi_{j,\mu+1}$ — $j$-й рядок $\phi_{\mu+1}$, а $x_j(t_i)$ — $j$-а змінна стану в момент часу $t = t_i$. Граничні умови дають $2n+r$ рівнянь вигляду (16) для $2n+r$ різних $x_j(t_i)$. Маємо $2n+r$ лінійних рівнянь для $\hat{z}_\mu(t_0)$, звідки є можливість знайти $2n+r$ компонент $\hat{z}_\mu(t_0)$. З (16) випливає, що має бути початкова оцінка для $\hat{x_0}(t_0)$. Ця оцінка використовується разом з попередньо прийнятою оцінкою $\hat{p}$ для того, щоб отримати початкову оцінку розв'язку в часі рівняння (1) з моменту часу $t = 0$ до моменту часу $t_i$ у (16). Цей розв'язок має вигляд (13). За допомогою останнього визначаємо початкові оцінки $\phi$ та $q$ у (16). Для отримання наступних $\mu = 1, 2, \cdots$ оцінок $x(t_0)$ та $p$ оцінка $x$ з моменту $t = 0$ до останнього момента $t_i$ повторюється у наведеному порядку. У зв'язку з цим обчислювальні затрати на ідентифікацію методом квазілінеаризації можуть бути значні та застосування методу у загальному випадку обмежується. Доцільно застосовувати наведений підхід у випадках, коли є можливість вимірювати тільки деякі (необов'язково однакові) стани у різні моменти часу. Для об'єктів реального світу, які описуються за допомогою (1), застосування описаного методу у певних ситуаціях буде доцільним.

Розв'язуючи систему (16), отримуємо елементи невідомих матриць для (1). Після чого будується оптимальне керування, вже для відновленої системи. Останній алгоритм [1] ґрунтується на другому методі Ляпунова. Запропонований підхід дає можливість аналітично отримувати необхідне керування для системи з моделлю (1). Цей факт дає можливість програмувати блок керування реального об'єкта і фактично вирішувати проблему керування на "борту".

**Приклад 2.1.** Розглянемо систему (1) другого порядку, де вектори $x$ та $u$ вимірюються, а матриці

$$
\begin{gathered}
A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \\
A = A_0 + \varepsilon A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},
\end{gathered} \tag{17}
$$

необхідно ідентифікувати (відновити). Утворимо вектор $z$ відповідно до (6):

$$
z = [x, a_1, a_2, \tilde{b}]^T, \tag{18}
$$

де

$$
x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}.
$$

Запишемо $\psi$ та $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ для нашого прикладу:

$$
f = Ax + Bu, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\beta \\ c\alpha + d\beta + bu \end{bmatrix},
$$

$$
\psi = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial a_1} & \frac{\partial f}{\partial a_2} & \frac{\partial f}{\partial b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

де $0 \in \Re_{1\times 2}$.

Раніше було зауважено, що слід враховувати структуру вектора $\tilde{p}$. Тому для нашого прикладу $z$ буде таким:

$$
z = [\alpha, \beta, a, c, d, b]^T,
$$

$$
\psi = \begin{bmatrix} a\beta \\ c\alpha + d\beta + bu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & \alpha & \beta & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Оцінка вектора $z$ $(\mu + 1)$-го порядку згідно з (7):

$$\dot{\hat{z}}_{\mu+1} = \hat{\psi}_\mu + \frac{\partial \hat{\psi}_\mu}{\partial z}(\hat{z}_{\mu+1} - \hat{z}_\mu) = \begin{bmatrix} \hat{a}\hat{\beta} \\ \hat{\alpha}\hat{c} + \hat{\beta}\hat{d} + \hat{b}u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_\mu +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \hat{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{c} & \hat{d} & 0 & \hat{\alpha} & \hat{\beta} & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_\mu \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{\mu+1} - \hat{\alpha}_\mu \\ \hat{\beta}_{\mu+1} - \hat{\beta}_\mu \\ \hat{a}_{\mu+1} - \hat{a}_\mu \\ \hat{c}_{\mu+1} - \hat{c}_\mu \\ \hat{d}_{\mu+1} - \hat{d}_\mu \\ \hat{b}_{\mu+1} - \hat{b}_\mu \end{bmatrix}.$$

Запишемо (10) для нашого прикладу:

$$\dot{\hat{z}}_{\mu+1}(t) = \hat{A}_\mu \cdot \hat{z}_{\mu+1}(t) + \hat{V}_\mu =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \hat{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{c} & \hat{d} & 0 & \hat{\alpha} & \hat{\beta} & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_\mu \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{a} \\ \hat{c} \\ \hat{d} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_{\mu+1} + \begin{bmatrix} \hat{a}\hat{\beta} \\ \hat{\alpha}\hat{c} + \hat{\beta}\hat{d} + \hat{b}u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_\mu -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & \hat{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{c} & \hat{d} & 0 & \hat{\alpha} & \hat{\beta} & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_\mu \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{a} \\ \hat{c} \\ \hat{d} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_\mu.$$

Відповідно (14) матиме вигляд:

$$\dot{\hat{\phi}}_{\mu+1}(t, t_0) = \begin{bmatrix} 0 & \hat{a}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{c}(t) & \hat{d}(t) & 0 & \hat{\alpha}(t) & \hat{\beta}(t) & u(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_\mu \hat{\phi}_{\mu+1}(t_i, t_0), \qquad (19)$$

де
$$\hat{\phi}_{\mu+1}(t_0, t_0) = I, \quad \forall \mu.$$

Вектор початкових умов $\hat{z}(t_0)$ у (13) будується за допомогою апріорно заданих граничних значень $x(t_1)$, $x(t_2)$, …, $x(t_8)$ за допомогою (16), наступним чином (враховуючи факт, що кількість граничних значень має бути більше 6, вектора $z$):

$$\begin{gathered}
x(t_1) = \hat{\phi}_{11,\mu+1}(t_1,t_0)\hat{\alpha}_{\mu+1}(t_0) + \hat{\phi}_{12,\mu+1}(t_1,t_0)\hat{\beta}_{\mu+1} + \\
+\hat{\phi}_{13,\mu+1}(t_1,t_0)\hat{a}_{\mu+1} + \hat{\phi}_{14,\mu+1}(t_1,t_0)\hat{c}_{\mu+1} + \hat{\phi}_{15,\mu+1}(t_1,t_0)\hat{d}_{\mu+1} + \\
+\hat{\phi}_{16,\mu+1}(t_1,t_0)\hat{b}_{\mu+1} + q_{1,\mu+1}(t_1), \\
x(t_2) = \hat{\phi}_{11,\mu+1}(t_2,t_0)\hat{\alpha}_{\mu+1}(t_0) + \hat{\phi}_{12,\mu+1}(t_2,t_0)\hat{\beta}_{\mu+1} + \\
+\hat{\phi}_{13,\mu+1}(t_2,t_0)\hat{a}_{\mu+1} + \hat{\phi}_{14,\mu+1}(t_2,t_0)\hat{c}_{\mu+1} + \hat{\phi}_{15,\mu+1}(t_2,t_0)\hat{d}_{\mu+1} + \\
+\hat{\phi}_{16,\mu+1}(t_2,t_0)\hat{b}_{\mu+1} + q_{1,\mu+1}(t_2), \\
\cdots \\
x(t_8) = \hat{\phi}_{11,\mu+1}(t_8,t_0)\hat{\alpha}_{\mu+1}(t_0) + \hat{\phi}_{12,\mu+1}(t_8,t_0)\hat{\beta}_{\mu+1} + \\
+\hat{\phi}_{13,\mu+1}(t_8,t_0)\hat{a}_{\mu+1} + \hat{\phi}_{14,\mu+1}(t_8,t_0)\hat{c}_{\mu+1} + \hat{\phi}_{15,\mu+1}(t_8,t_0)\hat{d}_{\mu+1} + \\
+\hat{\phi}_{16,\mu+1}(t_8,t_0)\hat{b}_{\mu+1} + q_{1,\mu+1}(t_8).
\end{gathered} \tag{20}$$

Параметри $\hat{\phi}_{1j,\mu+1}(t,t_0)$ залежать від похідних $\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}|_\mu$ відповідно з (14) і не залежать від $\hat{x}_{\mu+1}(t_0)$. Аналогічно $\hat{q}_{\mu+1}(t_i)$ обчислюється за допомогою (15) і також не залежать від $\hat{x}_{\mu+1}(t_0)$. Таким чином, визначити $\hat{z}_{\mu+1}$ можливо за допомогою регресії з (20), коли маємо початкові наближення для координат $z$. Безпосереднє (нерегресійне) визначення невідомих координат вектора $z$ з (20) можливе тільки коли маємо 6 граничних значень для $x$, а виміри не мають шумів.


[1] *Новицкий В. В., Хуан Чэнь.* Оптимальное управление почти консервативными системами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України: Технічні науки. — 2004. — № 2. — С. 152–157.

[2] *Тертичний-Даури В. Ю.* Адаптивная механика — М.: Наука, 1998. — 480 с.

[3] *Гроп Д.* Методы идентификации систем. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1979. — 302 с.

[4] *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. — М.: Наука, 1974. — 344 с.

[5] *Квакернак Х.* Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.

[6] *Ларин В. Б.* О слабом управлении слабодемпфированными системами // ПММ: Технічні науки. — 1978. — № 6. — С. 1000–1005.