УДК 313.42

ДИНАМИКА РЫНОЧНОЙ КОНЪЮНКТУРЫ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ В СИСТЕМЕ «СПРОС – ПРЕДЛОЖЕНИЕ»

© 2014 **ВОРОНИН А. В., ГУНЬКО О. В.**

УДК 313.42

Воронин А. В., Гунько О. В. Динамика рыночной конъюнктуры с непрерывными запаздываниями в системе «спрос – предложение»

В настоящей работе предложена модификация динамической модели рыночного взаимодействия цены и объема товара в непрерывном времени. В отличие от классических постулатов Вальраса, Маршалла и Самуэльсона фактор запаздывания формулируется при помощи интегральных соотношений как на стороне спроса, так и на стороне предложения. Рассмотрены различные виды так называемой «динамической памяти» в интегральных составляющих исходной математической модели, которые продуцируют разнообразные эффекты учета последействия. Особое внимание уделено синтезу математической модели рассматриваемого экономического объекта в виде дифференциального уравнения второго порядка, приводимого к виду вырожденного гипергеометрического дифференциального уравнения. Выполнен анализ поведенческих свойств исследуемой математической модели с соответствующими графическими иллюстрациями.

***Ключевые слова:** цена, объем, спрос, предложение, баланс, устойчивость, колебание, равновесие.*
***Рис.:** 2. **Формул:** 33. **Библ.:** 8.*

***Воронин Анатолий Витальевич** – кандидат технических наук, доцент, кафедра высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (пр. Ленина, 9а, Харьков, 61166, Украина)*
***E-mail:** voronin61@ ukr.net*

***Гунько Ольга Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (пр. Ленина, 9а, Харьков, 61166, Украина)*
***E-mail:** Gunko-Olga@lenta.ru*

УДК 313.42

Воронін А. В., Гунько О. В. Динаміка ринкової кон'юнктури з безперервними запізнюваннями в системі «попит – пропозиція»

У даній роботі запропоновано модифікацію динамічної моделі ринкової взаємодії ціни і обсягу товару в безперервному часі. На відміну від класичних постулатів Вальраса, Маршалла і Самюельсона фактор запізнювання формулюється за допомогою інтегральних співвідношень як на боці попиту, так і на боці пропозиції. Розглянуто різні види так званої «динамічної пам'яті» в інтегральних складових вихідної математичної моделі, які продукують різноманітні ефекти обліку післядії. Особливу увагу приділено синтезу математичної моделі розглянутого економічного об'єкта у вигляді диференціального рівняння другого порядку, що приводиться до виду виродженого гіпергеометричного диференціального рівняння. Виконано аналіз поведінкових властивостей досліджуваної математичної моделі з відповідними графічними ілюстраціями.

***Ключові слова:** ціна, обсяг, попит, пропозиція, баланс, стійкість, коливання, рівновага.*
***Рис.:** 2. **Формул:** 33. **Бібл.:** 8.*

***Воронін Анатолій Віталійович** – кандидат технічних наук, доцент, кафедра вищої математики й економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (пр. Леніна, 9а, Харків, 61166, Україна)*
***E-mail:** voronin61@ ukr.net*

***Гунько Ольга Володимирівна** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики й економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (пр. Леніна, 9а, Харків, 61166, Україна)*
***E-mail:** Gunko-Olga@lenta.ru*

UDC 313.42

Voronin Anatolii V., Hunko Olha V. Dynamics of Market Conditions with Continuous Delays in the "Demand – Supply" System

In this paper we suggest a modification of the dynamic model of the interaction of market prices and volume of the goods in continuous time. Unlike classical postulates of Walras, Marshall and Samuelson the lag factor is formulated by means of integral relations on both the demand and the supply side. The different types of so-called "dynamic memory" integral components in the original mathematical model were considered, which produce a variety of effects accounting aftereffect. Particular attention is paid to the synthesis of a mathematical model of the entity under consideration as a second order differential equation driven to the form of the confluent hypergeometric differential equation. The analysis of behavioral properties of the investigated mathematical model was conducted with relevant graphic illustrations.

***Key words:** price, volume, demand, supply, balance, stability, swing, balance.*
***Pic.:** 2. **Formulae:** 33. **Bibl.:** 8.*

***Voronin Anatolii V.**– Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Department of Mathematics and Economic and Mathematical Methods, Kharkiv National Economic University named after S. Kuznets (pr. Lenina, 9a, Kharkiv, 61166, Ukraine)*
***E-mail:** voronin61@ ukr.net*

***Hunko Olha V.**– Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematics and Economic and Mathematical Methods, Kharkiv National Economic University named after S. Kuznets (pr. Lenina, 9a, Kharkiv, 61166, Ukraine)*
***E-mail:** Gunko-Olga@lenta.ru*

Проблема определения характера влияния производственно-экономической специфики предприятия на эволюцию рыночного ценообразования по-прежнему еще очень далека от своего разрешения [1, 2]. Ключевым моментом в изучении вышеуказанной тематики является наличие двух подходов, практикующих механизмы формирования цен и объемов продукции как с позиций потребителя на рынке, так и со стороны производителя. В экономической теории принято полагать, что цена товара «нащупывает» свое равновесное значение в условиях существования баланса между спросом и предложением данной продукции (закон Вальраса), а величина объема товара определяется соответствием между ценой спроса и ценой предложения [3]. Последний тезис, с позиции теории фирмы, формируется следующим образом: в случае производственного равновесия цена выпускаемой продукции должна быть равна предельным издержкам [4]. Таким образом, вполне естественным действием является попытка объединить в единую модель рыночный баланс «спрос – предложение» с производственной схемой учета затрат и прибыли.

Целью данной работы является формирование универсального подхода для построения модели экономической динамики с учетом эффекта последействия (запаздывания).

Будем рассматривать математическую модель производственно-экономической системы, описывающей динамическое взаимодействие цены и объема продукции фирмы на рынке одного товара.

Ради простоты полагаем, что имеется всего один вид продукции и реализуется она на одном (или нескольких одинаковых) рынке.

Введем следующие обозначения: $p = p(t)$ – цена, зависящая от времени t единицы продукции (товара); $y = y(t)$ – объем выпускаемой продукции, также изменяющийся во времени t; $D(p, y, t)$ – объем спроса на рынке; $S(p, y, t)$ – предложение произведенной продукции; $P_d(p, y, t)$ – цена рыночного спроса; $P_s(p, y)$ – цена рыночного предложения. Динамическая модель получается при наличии запаздываний на стороне спроса или предложения. Простейшее предложение в дискретном временном анализе включает сосредоточенное запаздывание или отставание предложения на один интервал:

$$D_{(t)} = S_{(t-T_1)}.$$

Данное равенство имеет место в случае, когда требуется определенный период времени T_1 для производства данного объема товара. При этом предполагается отсутствие запасов, т.е. весь производимый товар поставляется на рынок. С другой стороны, производитель строит свои ожидания будущей цены на основе фактической цены, которая имела место на рынке, то есть на цену предыдущего периода T_2:

$$P_S(t) = P_d(t - T_2).$$

Далее мы будем изучать интересующие нас процессы в непрерывном времени и произведем замену сосредоточенных запаздываний на непрерывно распределенные. Тогда математическая модель исследуемой производственно-экономической системы получит следующее представление:

$$D(p, y, t) = \int_0^t K_s(t,\tau) S(p, y, \tau) d\tau; \quad (1)$$

$$P_s(p, y, t) = \int_0^t K_d(t,\tau) P_d(p, y, \tau) d\tau. \quad (2)$$

Интегральные соотношения (1), (2) относительно переменных $p(t)$ и $y(t)$ называются системой интегральных уравнений Вольтерры с соответствующими ядрами $K_d(t, \tau)$ и $K_s(t, \tau)$, характеризующими свойства запаздываний в каждом из уравнений системы.

Система (1), (2) является слишком общей для конкретного анализа ее поведенческих свойств и особенностей. Поэтому выдвинем дополнительные гипотезы, уточняющие явный вид уравнений (1), (2). Предположим, что предложение товара $S(p, y, t)$ равно объему произведенной продукции $y(t)$, а цена спроса $P_d(p, y, t)$ равна цене единицы продукции $p(t)$. По поводу спроса $D(p, y, t)$ заметим, что он является линейной убывающей функцией цены $p(t)$ и имеет автономную тенденцию $d_0(t)$:

$$D(p, t) = d_0(t) - d_1 p(t),$$

где $d_1 = const > 0$.

Относительно цены предложения $P_s(p, y)$, являющейся предельными из-держками по объему производства, допустим, что она состоит из условно переменных затрат, линейно зависящих от объема производства $y(t)$, и условно постоянных затрат $S_0(t)$, зависящих от времени t и не зависящих от $y(t)$:

$$P_s(y, t) = -S_0(t) + S_1 y(t),$$

где $S_1 = const > 0$.

С учетом выдвинутых допущений система (1), (2) примет вид системы линейных интегральных уравнений Вольтерры второго рода:

$$d_0(t) - d_1 p(t) = \int_0^t K_s(t,\tau) y(\tau) d\tau, \quad (3)$$

$$-S_0(t) + S_1 y(t) = \int_0^t K_d(t,\tau) p(\tau) d\tau. \quad (4)$$

В случае задания явных выражений для ядер $K_s(t, \tau)$ и $K_d(t, \tau)$ система (3), (4) будет иметь единственное решение для цены $p(t)$ и объема $y(t)$ продукта на данном рынке.

Рассмотрим примеры решения системы (3), (4) для некоторых фиксиро-ванных видов ядер интегральных уравнений.

Пример 1. Пусть даны $K_s(t,\tau) = \mu_1 e^{\mu_1(\tau - t)}$ и $K_d(t,\tau) = \mu_2 e^{\mu_2(\tau - t)}$, где постоянные величины, имеющие размерность обратную времени и характеризующие интенсивность убывания «памяти» о прошлых состояниях системы (3),(4) в геометрической прогрессии.

Система (3), (4) в таком случае перепишется следующим образом:

$$d_0(t) - d_1 p(t) = \int_0^t \mu_1 e^{\mu_1(\tau - t)} y(\tau) d\tau, \quad (5)$$

$$-S_0(t) + S_1 y(t) = \int_0^t \mu_2 e^{\mu_2(\tau - t)} p(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Систему (5), (6) легко разрешить с помощью методов операционного исчисления, используя прямое и обратное преобразование Лапласа [5]. Однако мы выполним дифференцирование по времени уравнений (5), (6) и получим систему двух дифференциальных уравнений для $p(e)$ и $y(e)$, содержащую всю необходимую информацию о свойствах решений. В результате дифференцирования по времени t уравнений (5), (6) и выполнения необходимых тождественных преобразований получим

$$\dot{p} = -\mu_1 p - \frac{\mu_1}{d_1} y + p^*(t); \quad (7)$$

$$\dot{y} = \frac{\mu_2}{d_1} p - \mu_2 y + y^*(t), \quad (8)$$

где $p^*(t) = \frac{1}{d_1}(\dot{d}_0 + \mu_1 d_0(t)),\ \ y^*(t) = -\frac{1}{S_1}(\dot{S}_0 + \mu_2 S_0(t)),$

а символы $\dot{p},\ \dot{y}, \dot{d}_0, \dot{S}_0$ являются производными по времени соответствующих функций.

Очевидно, что система двух дифференциальных уравнений (7),(8) является стационарной и неоднородной. При заданных начальных условиях $p(0)$ и $y(0)$ найти решение системы (7),(8) не представляет никаких принципиальных затруднений. Матрица динамики данной системы дифференциальных уравнений обладает характеристическим полиномом второго порядка

$$\lambda^2+(\mu_1+\mu_2)\lambda+\mu_1\mu_2\left(1+\frac{1}{S_1d_1}\right)=0,$$

корни которого λ_1, λ_2 всегда имеют отрицательные вещественные части в силу положительности коэффициентов квадратного уравнения. Если предположить, что функции $S_0(t)$, $d_0(t)$ являются постоянными положительными числами, то есть $S_0(t) = S_0$, $d_0(t) = d_0$, то система дифференциальных уравнений (7),(8) будет иметь правые части независящие явным образом от времени t:

$$\dot{p}=\frac{\mu_1}{d_1}(-d_1p-y+d_0), \tag{9}$$

$$\dot{y}=\frac{\mu_2}{S_1}(p-S_1y-S_0). \tag{10}$$

Приравнивая нулю правые части (9), (10), определим равновесные значения цены P_e и объема продукции Y_e:

$$P_e=\frac{S_0+S_1d_0}{1+S_1d_1},\ Y_e=\frac{d_0-d_1S_0}{1+S_1d_1} \qquad (d_0>d_1S_0).$$

Если ввести новые координаты $\tilde{P}=P-P_e$ и $\widetilde{Y}=-Y_e$, являющиеся отклонениями базовых переменных от своих равновесных значений, то система (9), (10) трансформируется к виду однородной стационарной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\tilde{P}}=-\mu_1\tilde{P}-\frac{\mu_1}{\partial_1}\tilde{Y}; \tag{11}$$

$$\dot{\tilde{Y}}=-\frac{\mu_2}{S_1}\tilde{P}-\mu_2\tilde{Y}. \tag{12}$$

Очевидно, что система (11), (12) имеет такие же характеристические числа λ_1, λ_2, как и система (7), (8) (или система (9), (10)). Поэтому можно утверждать, что положение равновесия P_e, Y_e является асимптотически устойчивым.

Таким образом, система (9), (10) имеет решение

$$P(t)=Pe+A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2};\tag{13}$$

$$Y(t)=Ye+B_1e^{\lambda_1 t}+B_2e^{\lambda_2},\tag{14}$$

где $$\lambda_{1,2}=-\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)^2-\mu_1\mu_2\left(1+\frac{1}{S_1d_1}\right)}$$ – корни характеристического уравнения. Постоянные A_1, A_2, B_1, B_2 определяются исключительно начальными условиями $p(0)$ и $y(0)$ и находятся в результате решения двух систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}A_1+A_2=P(0)-P_e\\ \lambda_1A_1+\lambda_2A_2=-\mu_1(P(0)-P_e)-\dfrac{\mu_1}{D_1}(Y(0)-Y_e)\end{cases}; \tag{15}$$

$$\begin{cases}B_1+B_2=Y(0)-Y_e\\ \lambda_1B_1+\lambda_2B_2=-\dfrac{\mu_2}{S_1}(P(0)-P_e)-\mu_2(Y(0)-Y_e)\end{cases}. \tag{16}$$

Заметим, что решения (13) и (14) справедливы лишь при $\lambda_1\neq\lambda_2$. Резонансный случай $\lambda_1=\lambda_2$ мы оставим вне рассмотрения.

Несколько ранее мы установили устойчивость положения равновесия P_e, Y_e, однако достижение его на больших временах будет по-разному зависеть от структуры собственных чисел λ_1, λ_2. В случае когда λ_1, λ_2 – действительные числа, переходный процесс из начального положения $p(0)$, $y(0)$ в равновесие P_e, Y_e носит монотонный (экспоненциальный) характер. Если же λ_1, λ_2 есть комплексно сопряженные числа, то вышеуказанный процесс сопровождается затухающими колебаниями с частотой

$$\omega=\sqrt{\mu_1\mu_2\left(1+\frac{1}{S_1d_1}\right)-\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)^2}.$$

В результате анализа динамики системы (7) и (8) при условиях неизменности автономного спроса d_0 и условно постоянных затрат S_0 нами доказана устойчивость единственного нетривиального положения равновесия P_e, Y_e и выявлен качественный характер соответствующего переходного режима поведения функций $p(t)$, $y(t)$.

Пример 2. В предыдущем примере были предложены ядра интегральных уравнений (3) и(4) с конкретными (экспоненциальными) функциями, зависящими от разности аргументов. В данном примере мы ограничимся ядрами более общего вида

$$K_S(t,\tau)=K_S(t-\tau),$$
$$K_d(t,\tau)=K_d(t-\tau)$$

Тогда система интегральных уравнений (3), (4) получит представление:

$$d_0(t)-d_1p(t)=\int_0^t K_S(t-\tau)y(\tau)d\tau;\tag{17}$$

$$S_0(t)+S_1y(t)=\int_0^t K_d(t-\tau)p(\tau)d\tau.\tag{18}$$

Так как правые части системы интегральных уравнений представляют собой свертку двух функций, то целесообразно применить к уравнениям (17) и (18) прямое преобразование Лапласа [5] следующим образом:

$$P(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p(t)dt;\quad Y(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}y(t)dt,$$

где λ – комплекснозначная переменная.

Используя основные свойства операционного исчисления, преобразуем (17) и (18) к виду системы линейных алгебраических уравнений для нахождения $P(\lambda)$ и $Y(\lambda)$:

$$d_0(\lambda)-d_1P(\lambda)=K_S(\lambda)Y(\lambda);\tag{19}$$

$$-S_0(\lambda)+S_1Y(\lambda)=K_d(\lambda)P(\lambda).\tag{20}$$

Система (19), (20) может быть переписана иначе:

$$d_1P(\lambda)+K_S(\lambda)Y(\lambda)=d_0(\lambda);\tag{21}$$

$$S_1Y(\lambda)-K_d(\lambda)Y(\lambda)=S_0(\lambda),\tag{22}$$

с соответствующими решениями:

$$P(\lambda)=\frac{-K_S(\lambda)S_0(\lambda)+S_1d_0(\lambda)}{K_S(\lambda)K_d(\lambda)+S_1d_1};\tag{23}$$

$$Y(\lambda)=\frac{K_d(\lambda)d_0(\lambda)+d_1S_0(\lambda)}{K_S(\lambda)K_d(\lambda)+S_1d_1}.\tag{24}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (23) и (24), можно получить явные формулы для $p(t)$, $y(t)$, но это может оказаться крайне не простой задачей. На наш взгляд, более перспективным видится применение обратного преобразования Лапласа непосредственно к (21) и (22):

$$\begin{aligned} &S_1 d_1 P(t) + \int_0^t \varphi(t-\tau) p(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t K_S(t-\tau) S_0(\tau) d\tau + S_1 d_0(t); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &S_1 d_1 Y(t) + \int_0^t \varphi(t-\tau) y(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t K_d(t-\tau) d_0(\tau) d\tau + d_1 S_0(t), \end{aligned} \quad (26)$$

где $\varphi(t) = \int_0^t K_S(t-\tau) K_d(\tau) d\tau.$

Нам удалось получить в явном виде для автономных интегральных уравнения Вольтерры второго рода для нахождения цены $p(t)$ и объема продукции $y(t)$. Весьма примечательно, что оба интегральных уравнения отличаются друг от друга только правыми частями (то есть внешними функциями). Данный факт означает, что (25) и (26) могут быть решены независимо аналитическими либо численными методами при помощи единой вычислительной процедуры [6].

Пример 3. Предположим, что на стороне предложения реализуется равномерный эффект последействия по отношению к выпущенной продукции $y(\tau)$ на интервале времени $\tau \in [0, t]$. Иначе говоря, ядро интегрального уравнения (3) имеет вид $K_S(t,\tau) = \frac{1}{t}$. В качестве ядра уравнения (4) возьмем экспоненциальную функцию разностного аргумента, аналогичную примеру (1).

$K_d(t,\tau) = ae^{a(\tau - t)}$, $a > 0$ – характеристика постоянного времени.

Тогда система (3), (4) получает следующее представление:

$$d_0 - d_1 p(t) = \frac{1}{t} \int_0^t y(\tau) d\tau; \quad (27)$$

$$-S_0 + S_1 y(t) = \int_0^t ae^{a(\tau - t)} p(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Здесь, как и в примере 1, все переменные – положительные числа.

Система линейных интегральных уравнений (27), (28) относительно переменных $p(t)$ и $y(t)$ легко преобразуется путем дифференцирования к форме системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными по времени коэффициентами

$$\dot{p} = \frac{-p}{t} - \frac{y}{d_1 t} + \frac{d_0}{d_1 t}; \quad (29)$$

$$\dot{y} = \frac{a}{S_1} p - ay - \frac{aS_0}{S_1}. \quad (30)$$

Из системы (29), (30) двух дифференциальных уравнений первого порядка нетрудно получить дифференциальные уравнения второго порядка для каждой из переменных $p(t)$, $y(t)$.

Так, например, динамика изменения цены будет описана при помощи следующего уравнения:

$$t\ddot{p} + (at+2)\dot{p} + a\left(1 + \frac{1}{d_1 S_1}\right) p = \frac{a(d_0 S_1 + S_0)}{d_1 S_1}. \quad (31)$$

Если ввести переменную $x(t) = p(t) - \bar{p}$, где $\bar{p} = \frac{d_0 S_1 + S_0}{d_1 S_1 + 1}$, то неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка преобразуется в соответствующее однородное уравнение:

$$t\ddot{x} + (at+2)\dot{x} + a\left(1 + \frac{1}{d_1 S_1}\right) x = 0. \quad (32)$$

Дифференциальное уравнение (32) является так называемым вырожденным гипергеометрическим уравнением, свойства решения которого подробно изучены в теории специальных функций [7]. В частности, одним из решений является ряд Куммера:

$$\varphi(g,2,\theta) = 1 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(g)_\kappa}{(\kappa+1)!} \cdot \frac{\theta^\kappa}{\kappa!}, \quad (33)$$

где

$\theta = -at$, $g = 1 + \frac{1}{d_1 S_1}$, $(g)_k = g(g+1)...(g+k-1)$, $(g)_0 = 1$.

Важным для нас является то обстоятельство, что решение дифференциального уравнения (32) на больших временах приближенно описывается убывающей степенной функцией, а не экспонентой.

На *рис. 1* и *рис. 2* представлены результаты численного моделирования системы (27), (28) при следующих значениях параметров: a = 0,1; d_1 = 1,8; d_0 = 1,2; S_0 = 3; S_1 = 1 в среде Mathcad [8].

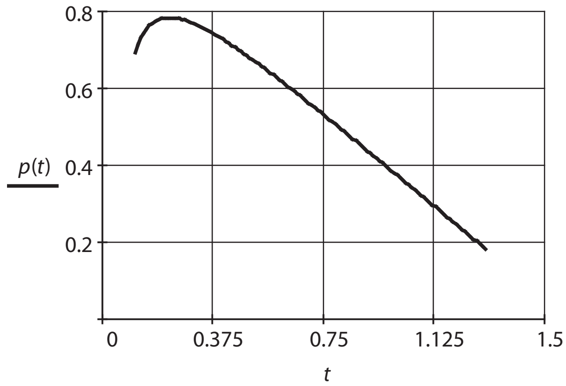

Рис. 1. Динамика цены товара

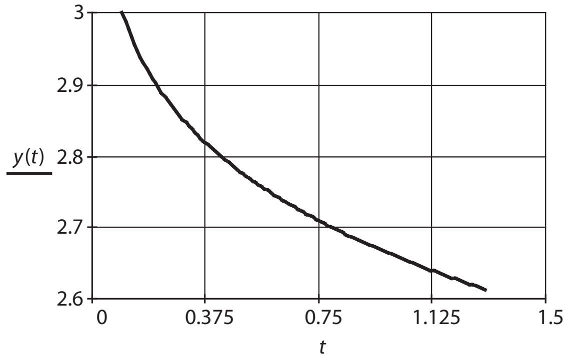

Рис. 2. Динамика изменения объема товара

Выводы. Рассмотренные три примера с различными механизмами учета эффекта последействия наглядно демонстрируют разнообразие динамических режимов иделизированной модели производственно-экономической системы. Разумеется, анализ таких моделей во всех рассмотренных нами случаях проведен исключительно на качественном уровне и не использует данных реально наблюдаемых экономических процессов. Необходимо также подчеркнуть, что использование идейных предпосылок распределенного запаздывания сводит задачу к решению линейного дифференциального уравнения с переменными по времени коэффициентами, что, в свою очередь, существенно расширяет класс решений при сохраняющейся неопределенности в выборе структурных параметров модели. На практике вышеуказанная проблема решается традиционными эконометрическими методами анализа временных рядов для цен и объёмов произведенной продукции. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронин А. В. Дискретная модель рыночной адаптации / А. В. Воронин, О. В. Гунько // Управління розвитком. – 2013. – Т. 6. – № 6. – С. 37 – 44.

2. Внукова Н. Н. Адаптационные механизмы производственно-экономической системы / Н. Н. Внукова, А. В. Воронин, А. В. Бондаренко // Економіка: проблеми теорії та практики : збірник наукових праць. – Випуск 253 : В 7 т. – Т. III. – Дніпропетровськ : ДНУ, 2009. – С. 765 – 774.

3. Гальперин В. М. Микроєкономика. В 2-х т. / В. М. Гальперин, С. М. Игнатьев, В. И. Моргунов. – СПб. : Экономическая школа, 2000. – Т. 1. – 349 с.

4. Балацкий Е. В. Рыночное ценообразование и производственные циклы / Е. В. Балацкий //Экономика и математические методы. – 2005. – Т. 41. – № 1. – С. 37 – 44.

5. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Г. Дёч. – М. : Физматгиз,1958. – 208 с.

6. Краснов М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1975. – 303 с.

7. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения / Ф. Трикоми. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1962. – 352 с.

8. Гунько О. В. Використання середовища Mathcad при вивченні навчальної дисципліни «Математика для економістів» / О. В. Гунько. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2010, – 288 с.

REFERENCES

Balatskiy, E. V. “Rynochnoe tsenoobrazovanie i proizvodstvennye tsikly“ [Market pricing and production cycles]. *Ekonomika i matematicheskie metody,* vol. 41, no. 1 (2005): 37-44.

Dech, G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniiu preobrazovaniia Laplasa* [Guide to the Practical Application of the Laplace transform]. Moscow: Fizmatgiz, 1958.

Galperin, V. M., Ignatev, S. M., and Morgunov, V. I. *Mikroekonomika* [Microeconomics]. St. Petersburg: Ekonomicheskaia shkola, 2000.

Hunko, O. V. *Vykorystannia seredovyshcha Mathcad pry vyvchenni navchalnoi dystsypliny «Matematyka dlia ekonomistiv»* [Using Mathcad environment in the study of the discipline "Mathematics for Economists"]. Kharkiv: KhNEU, 2010.

Krasnov, M. L. *Integralnye uravneniia* [Integral equations]. Moscow: Nauka, 1975.

Trikomi, F. *Differentsialnye uravneniia* [Differential equations]. Moscow: Izdatelstvo inostrannoy literatury, 1962.

Vnukova, N. N., Voronin, A. V., and Bondarenko, A. V. “Adaptatsionnye mekhanizmy proizvodstvenno-ekonomicheskoi sistemy“ [Adaptive mechanisms of production and economic system]. *Ekonomika: problemy teorii ta praktyky*, no. 253 (2009): 765-774.

Voronin, A. V., and Gunko, O. V. “Diskretnaia model rynochnoi adaptatsii“ [Discrete model of market adaptation]. *Upravlinnia rozvytkom,* vol. 6, no. 6 (2013): 37-44.