6. *Божко А. Е., Пермяков В. И., Пушня В. А.* Методы проектирования электромеханических вибровозбудителей. – Киев: Наук. думка, 1989. – 206 с.
7. *Ступель Ф. А.* Электромеханические реле. – Харьков: Университет, 1956. – 355 с.
8. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 30.11.2006

УДК 534.3+611:539

А. О. Борисюк

Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в нескінченній прямій жорсткостінній трубі кругового поперечного перерізу. Спрощена форма розв'язку

(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)

Another form of a solution to the problem of sound generation by a limited region of the disturbed flow in an infinite straight rigid-walled pipe of a circular cross-section is presented. This form is more simplified compared to that obtained earlier and is more acceptable for making the corresponding calculations.

1. Постановка та розв'язок задачі. Перш ніж переходити до пошуку іншого розв'язку розглянутої в [1] задачі, нагадаємо її постановку і наведемо одержаний в [1] її розв'язок. Отже, розглядається нескінченна пряма жорсткостінна труба кругового поперечного перерізу радіусом a (див. рис. 1). У ній з осередненою осьовою швидкістю U тече рідина, яка має густину ρ і в'язкість ν. Течія характеризується малим числом Маха (M). У скінченному об'ємі V_0 течія збурена, і цей об'єм створює в трубі акустичне поле. Необхідно знайти це поле і встановити кількісний зв'язок між його характеристиками та параметрами труби і потоку.

Шукане поле описується рівнянням Лайтхіла, в якому права частина містить як об'ємні квадрупольні $\partial^2 T_{ij}/\partial y_i \partial y_j$, так і зумовлені наявністю стінки поверхневі дипольні $\partial F_i/\partial y_i$ джерела [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i}, \qquad 0 < r < a, \qquad 0 < \phi < 2\pi, \qquad |z| < \infty. \tag{1}$$

Граничними умовами є рівність нулю радіальної компоненти швидкості на стінці трубки:

$$\left.\frac{\partial p_a}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \tag{2}$$

та умова випромінювання в нескінченність.

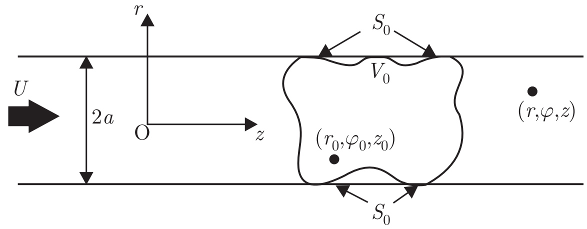

Рис. 1. Геометрія задачі

У співвідношеннях (1) і (2) ρ_a та p_a — акустичні флуктуації густини й тиску, які зв'язані співвідношенням [1, 2]

$$p_a = c_0^2\rho_a; \tag{3}$$

$T_{ij} \approx \rho u_i u_j$ і $F_i = n_j(\tau_{ij} + p\delta_{ij})$ — напруження Лайтхіла та компоненти прикладених до стінки трубки сил (T_{ij} та F_i зникають відповідно за межами об'єму V_0 і поверхні S_0, яка його обмежує); $\tau_{ij} = (2/3)\mu\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - 2\mu\varepsilon_{ij}$ — дотичні напруження; $\varepsilon_{ij} = (1/2)(\partial u_i/\partial y_j + + \partial u_j/\partial y_i)$ — швидкості деформації; n_j — компоненти зовнішньої нормалі до стінки трубки; u_i — компоненти швидкості рідини; p — тиск; $\mu = \rho\nu$ — динамічна в'язкість рідини; δ_{ij} — символ Кронекера; r, ϕ, z — циліндричні координати; t — час. Крім того, тут і надалі передбачається підсумовування за індексами, що повторюються.

Задача (1), (2) розв'язується методом функцій Гріна [1] і її розв'язок для густини ρ_a у квадратурах має такий вигляд:

$$\begin{gathered}\rho_a(\vec{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iiint\limits_{V_0} \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0,t_0)}{\partial y_i \partial y_j} G(\vec{r},t;\vec{r}_0,t_0)dV_0(\vec{r}_0) + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iint\limits_{S_0} \frac{\partial F_i(\vec{r}_{oa},t_0)}{\partial y_i} G(\vec{r},t;\vec{r}_{0a},t_0)dS_0(\vec{r}_{0a}),\end{gathered} \tag{4}$$

$$dV_0(\vec{r}_0) = r_0 dr_0 d\phi_0 dz_0, \qquad dS_0(\vec{r}_{0a}) = a d\phi_0 dz_0.$$

Відповідно акустичний тиск p_a знаходиться за формулою (3) (тут $\vec{r} = (r,\phi,z)$, $\vec{r}_0 = = (r_0,\phi_0,z_0) \in V_0$ і $\vec{r}_{0a} = \vec{r}_0|_{r_0=a} = (a,\phi_0,z_0) \in S_0$ — радіус-вектори точки поля, квадрупольних і дипольних джерел; t_0 — пов'язаний з джерелом час).

Підстановка у вираз для тиску p_a виразу для функції Гріна G [1]:

$$G(\vec{r},t;\vec{r}_0,t_0) = -\frac{i}{4\pi c_0^2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0,\phi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2}\Psi_{nm}^{(j)}(r,\phi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik_{nm}|z-z_0|}}{k_{nm}}e^{-i\omega(t-t_0)}d\omega, \tag{5}$$

а одержаного співвідношення в інтеграл

$$P(\omega)\delta(\omega-\omega') = \int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi}\langle\breve{p}_a^*(r,\phi,z,\omega)\breve{v}_{az}(r,\phi,z,\omega')\rangle r dr d\phi, \tag{6}$$

де $\delta(\ldots)$ — дельта-функція Дірака, дужки $\langle\ldots\rangle$ означають операцію осереднення за множиною реалізацій, зірочка вказує на комплексне спряження, а $\breve{p}_a$ і $\breve{v}_{az}$ — відповідно образи

Фур'є акустичного тиску та осьової компоненти акустичної швидкості, дає загальний вираз для акустичної енергії P, згенерованої на частоті ω нерівномірно розподіленими в об'ємі V_0 квадрупольними і на поверхні S_0 дипольними джерелами [1]:

$$P(\omega) = \sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}^{(q)}(\omega) = \sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\|\Psi_{nm}^{(q)}\|^2 k_{nm}\rho_0\omega}\Bigg[\iiint\limits_{V_0} dV_0(\vec{r}_0)\times$$

$$\times \iiint\limits_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0,\vec{r}\,'_0,\omega)}{\partial y_i\partial y_j\partial y'_k\partial y'_l}\Psi_{nm}^{(q)}(r_0,\phi_0)\Psi_{nm}^{(q)}(r'_0,\phi'_0)e^{-\operatorname{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z'_0-z_0)}dV_0(\vec{r}\,'_0) +$$

$$+ \iint\limits_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a})\iint\limits_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}_{0a},\vec{r}\,'_{0a},\omega)}{\partial y_i\partial y'_k}\Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0)\Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi'_0)\times$$

$$\times e^{-\operatorname{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z'_0-z_0)}dS_0(\vec{r}\,'_{0a}) + 2\operatorname{Re}\Bigg(\iiint\limits_{V_0} dV_0(\vec{r}_0)\times$$

$$\times \iint\limits_{S_0} \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0,\vec{r}\,'_{0a},\omega)}{\partial y_i\partial y_j\partial y'_k}\Psi_{nm}^{(q)}(r_0,\phi_0)\Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi'_0)e^{-\operatorname{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z'_0-z_0)}dS_0(\vec{r}\,'_{0a})\Bigg)\Bigg]. \quad (7)$$

Тут $\vec{r}_0$, $\vec{r}\,'_0$ і $\vec{r}_{0a}$, $\vec{r}\,'_{0a}$ — радіуси-вектори квадрупольних і дипольних джерел звуку відповідно; $\Psi_{nm}^{(1)} = J_n(\alpha_{nm}r)\cos(n\phi)$ та $\Psi_{nm}^{(2)} = J_n(\alpha_{nm}r)\sin(n\phi)$ — акустичні моди труби; $\|\Psi_{nm}^{(q)}\|^2$ — квадрат їх норми:

$$\|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2 = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m}a), & n=0,\\ \dfrac{\pi a^2}{2}J_n^2(\alpha_{nm}a)\left[1-\dfrac{n^2}{\alpha_{nm}^2a^2}\right], & n\geqslant 1,\end{cases} \qquad \|\Psi_{nm}^{(2)}\|^2 = \begin{cases} 0, & n=0,\\ \|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2, & n\geqslant 1;\end{cases}$$

J_n — циліндричні функції Бесселя першого роду порядку n; $\alpha_{nm} = \zeta_{nm}/a$ — радіальні хвильові числа; ζ_{nm} — корені рівняння $J'_n(\zeta_{nm}) = 0$ $(m = 1, 2, \dots)$; $k_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \alpha_{nm}^2}$ — осьові хвильові числа; $k_0 = \omega/c_0$ —акустичне хвильове число. Крім того, у співвідношенні (7) функції S_{ijkl}^T та S_{ik}^F є взаємними спектрами образів Фур'є відповідно напружень Лайтхіла T_{ij}:

$$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0,\vec{r}\,'_0,\omega)\delta(\omega-\omega') = \langle \breve{T}_{ij}^*(\vec{r}_0,\omega)\breve{T}_{kl}(\vec{r}\,'_0,\omega')\rangle$$

та сил F_k:

$$S_{ik}^F(\vec{r}_{0a},\vec{r}\,'_{0a},\omega)\delta(\omega-\omega') = \langle \breve{F}_i^*(\vec{r}_{0a},\omega)\breve{F}_k(\vec{r}\,'_{0a},\omega')\rangle,$$

S_{ijk}^{TF} — взаємним спектром образів Фур'є напружень T_{ij} та сил F_k:

$$S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0,\vec{r}\,'_{0a},\omega)\delta(\omega-\omega') = \langle \breve{T}_{ij}^*(\vec{r}_0,\omega)\breve{F}_k(\vec{r}\,'_{0a},\omega')\rangle,$$

а $\operatorname{Re}(\dots)$ означає дійсну частину вказаної в дужках комплексної величини.

У разі рівномірного розподілу квадрупольних і дипольних джерел звуку формула (7) спрощуєтстя за рахунок спрощення виразів для спектрів S_{ijkl}^T, S_{ik}^F та S_{ijk}^{TF}, які стають функціями лише на відстані між джерелами (відповідно $\vec{\xi} = \vec{r'}_0 - \vec{r}_0$, $\vec{\xi}_{aa} = \vec{r'}_{0a} - \vec{r}_{0a}$ та $\vec{\xi}_a = \vec{r'}_{0a} - \vec{r}_0$) і частоти [1–3]:

$$
\begin{aligned}
&S^T_{ijkl}(\vec{r}_0, \vec{r'}_0, \omega) = S^T_{ijkl}(\vec{\xi}, \omega),\\
&S^F_{ik}(\vec{r}_{0a}, \vec{r'}_{0a}, \omega) = S^F_{ik}(\vec{\xi}_{aa}, \omega),\\
&S^{TF}_{ijk}(\vec{r}_0, \vec{r'}_{0a}, \omega) = S^{TF}_{ijk}(\vec{\xi}_a, \omega).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Аналіз співвідношення (7) показує, що енергія P дорівнює сумі енергій $P^{(q)}_{nm}$ акустичних мод труби $\Psi^{(q)}_{nm}$. Енергія ж окремої моди $P^{(q)}_{nm}$ визначається трьома доданками. Перший являє собою звукову енергію, згенеровану квадруполями, другий — енергію, випромінену диполями, а третій доданок зумовлений взаємодією квадруполів і диполів.

2. Інша форма розв'язку. Повернемося до інтегральної форми розв'язку задачі для акустичних флуктуацій густини (4). Згідно з [3], використання тотожності

$$
\frac{\partial}{\partial y_i}\left(G\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j}\right) - \frac{\partial}{\partial y_j}\left(T_{ij}\frac{\partial G}{\partial y_i}\right) = G\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} - T_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j}
$$

і застосування теореми Гаусса дозволяє замінити у формулі (4) диференціювання напружень Лайтхіла T_{ij} та сил F_i відповідним диференціюванням функції Гріна G:

$$
\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} G \to T_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j}, \qquad \frac{\partial F_i}{\partial y_i} G \to F_i \frac{\partial G}{\partial y_i}.
$$

Це приводить до іншої форми зображення величини ρ_a:

$$
\begin{aligned}
\rho_a(\vec{r}, t) = &\int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iiint_{V_0} T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)\frac{\partial^2 G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} dV_0(\vec{r}_0) + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iint_{S_0} F_i(\vec{r}_{oa}, t_0)\frac{\partial G(\vec{r}, t; \vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial y_i} dS_0(\vec{r}_{0a}),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

а відтак — і тиску (3). Тоді підстановка виразу (5) для функції Гріна у формулу (9) і далі в (3), а одержаного співвідношення — в інтеграл (6) дозволяє знайти інший вираз для акустичної енергії P. У разі нерівномірного розподілу квадрупольних і дипольних джерел звуку він має такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
P(\omega) = \sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} P^{(q)}_{nm}(\omega) = \sum_{q=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\|\Psi^{(q)}_{nm}\|^2 k_{nm}\rho_0\omega}\Bigg[\iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \times \\
\times \iiint_{V_0} S^T_{ijkl}(\vec{r}_0, \vec{r'}_0, \omega)\frac{\partial^2 \Psi^{(q)}_{nm}(r_0, \phi_0) e^{\operatorname{sign}(z-z_0) i k_{nm} z_0}}{\partial y_i \partial y_j} \times \\
\times \frac{\partial^2 \Psi^{(q)}_{nm}(r'_0, \phi'_0) e^{-\operatorname{sign}(z-z_0) i k_{nm} z'_0}}{\partial y'_k \partial y'_l} dV_0(\vec{r'}_0) + \iint_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \iint_{S_0} S^F_{ik}(\vec{r}_{0a}, \vec{r'}_{0a}, \omega) \times
\end{aligned}
$$

$$\times \frac{\partial \Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0) e^{\operatorname{sign}(z-z_0) i k_{nm} z_0}}{\partial y_i} \frac{\partial \Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0') e^{-\operatorname{sign}(z-z_0) i k_{nm} z_0'}}{\partial y_k'} dS_0(\vec{r}'_{0a}) +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\Bigg(\iiint\limits_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iint\limits_{S_0} S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega) \frac{\partial^2 \Psi_{nm}^{(q)}(r_0,\phi_0) e^{\operatorname{sign}(z-z_0) i k_{nm} z_0}}{\partial y_i \partial y_j} \times$$

$$\times \frac{\partial \Psi_{nm}^{(q)}(a,\phi_0') e^{-\operatorname{sign}(z-z_0) i k_{nm} z_0'}}{\partial y_k'} dS_0(\vec{r}'_{0a})\Bigg)\Bigg]. \qquad (10)$$

Якщо ж джерела звуку розподілені рівномірно у зайнятих ними областях, співвідношення (10) спрощується внаслідок спрощення виразів для S_{ijkl}^{T}, S_{ik}^{F} та S_{ijk}^{TF} (див. (8)).

Аналіз виразу (10) показує, що, як і у (7), звукова енергія P є сумою енергій $P_{nm}^{(q)}$ акустичних мод труби $\Psi_{nm}^{(q)}$. Проте, у формулі (10) відображена інша фізична суть досліджуваного явища. В ній енергія моди $P_{nm}^{(q)}$ дорівнює сумі енергій, згенерованих напруженнями Лайтхіла T_{ij} і силами F_i, а також у результаті їх взаємодії (тоді як в (7) $P_{nm}^{(q)}$ визначається внесками квадруполів, диполів та їх взаємодією). Крім того, у (10) похідні 2-го, 3-го та 4-го порядку величин S_{ik}^{F}, S_{ijk}^{TF} та S_{ijkl}^{T} із (7) (ці величини мають визначатися з розв'язку відповідної задачі динаміки рідини або з відповідного експерименту) замінено похідними 1-го та 2-го порядку акустичних мод трубки, які є відомими. Остання обставина вказує на те, що розв'язок (10) задачі про генерацію звуку обмеженою областю збуреної течії у нескінченній прямій жорсткостінній трубі загалом є простішим від одержаного раніше розв'язку (7).

Таким чином, у даній роботі одержано іншу форму розв'язку проблеми генерації звуку обмеженою областю збуреної течії в трубі, яка була розглянута у [1]. Загалом ця форма є простішою від одержаної в [1], а відтак прийнятнішою для проведення відповідних розрахунків.

1. *Борисюк А. О.* Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в нескінченній прямій жорсткостінній трубі кругового поперечного перерізу // Доп. НАН України. – 2004. – № 5. – С. 34–40.
2. *Blake W. K.* Mechanics of flow-induced sound and vibration. – New York: Acad. Press, 1986. – Vol. 1, 2. – 974 p.
3. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика. – Москва: Машиностроение, 1981. – 294 с.

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Надійшло до редакції 21.03.2007