

В. Л. Поляков

Промачивание слоистого грунта с образованием на его поверхности слоя воды

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Я. Олейником)

The task of intensive infiltration for multilayer soil due to a severe rainfall taking into account ponding is formulated. A number of formulae are obtained to calculate the water depth H of the surface layer, position of the water saturation front, and surface intake rate at a constant precipitation. The analysis of several factors which affect the depth H is performed.

Важную роль в пополнении запасов грунтовых (подземных) вод нередко играют атмосферные осадки и поливы. При их высокой интенсивности может сформироваться, причем на значительной площади, нисходящий почти одномерный фильтрационный поток, который с относительно большой скоростью распространяется в глубь грунта. Характер и темп промачивания пористых сред в подобных условиях стали предметом обширных теоретических и экспериментальных исследований, например [1–3]. Полученные таким образом результаты способствовали решению гидрологами, гидрогеологами, мелиораторами целого ряда насущных практических задач, как-то: образование поверхностного стока, определение коэффициента фильтрации грунтов, проникновение в них извне химических веществ и т. д. Основным инструментом при изучении интенсивного поступления воды в грунт стала модель Грина–Ампта [4–6]. С одной стороны, она в принципе правильно отражает закономерности насыщения грунта влагой, притекаемой с его поверхности, а с другой — является простой и дает возможность разрабатывать удобные для инженерных расчетов формулы. Благодаря ряду усовершенствований эта модель была еще более приближена к реальным условиям. В этом же направлении выполнена и данная работа, обобщающая указанные разработки благодаря комплексному учету капиллярных сил около зоны промачивания, многослойности увлажняемой среды, а также динамики поверхностного слоя воды. Предлагаемые расчетные формулы базируются на строгом решении соответствующей фильтрационной задачи для упомянутой многослойной зоны и поэтому позволяют надежно определять изменение положения фронта промачивания z_a , скорости инфильтрации V и глубины воды на поверхности грунта H со временем. Максимальное упрощение преобразований и конечных выражений достигается вследствие рассмотрения промачивания отдельного произвольного (i -го) слоя и надлежащего выбора безразмерных переменных.

Математическая задача распространения жидкости (воды), накопившейся на поверхности пористой среды, с полным насыщением в пределах верхних i слоев формулируется следующим образом:

$$\frac{dH}{dt} = I - V, \quad \frac{\partial^2 h_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad (1)$$

$$z = 0, \quad h_1 = H; \quad z = -z_a, \quad h_i = -z_a - z_{wi};$$

$$z = -M_j, \quad h_j = h_{j+1}; \quad k_j \frac{\partial h_j}{\partial z} = k_{j+1} \frac{\partial h_{j+1}}{\partial z}, \quad j = 1, 2, \dots, i - 1, \quad (2)$$

$$t = t_{i-1}, \quad H = H_{i-1}. \quad (3)$$

Здесь h_j — напор в j -м слое; I, V — интенсивности притока воды на поверхность грунта (осадков) и инфильтрации; M_j — общая мощность верхних j -х слоев; k_j — коэффициент фильтрации j -го слоя; z_{wi} — дополнительный напор на фронте промачивания вследствие действия капиллярных сил; H_{i-1} — глубина слоя воды на поверхности грунта к моменту t_{i-1} . Расчетный период в задаче (1)–(3) ограничен моментами достижения вышеупомянутым фронтом верхней t_{i-1} и нижней t_i границ i -го слоя. Ось OZ направлена вверх, а ее начало расположено на поверхности грунта.

После несложных преобразований уравнения и условия (1)–(3) сводятся к эквивалентной задаче относительно H

$$\frac{dH}{dt} + k_i \frac{H + z_{wi} + z_a}{z_a - M_{i-1} + k_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{M_j}{k_j}} = I; \quad t = t_{i-1}, \quad H = H_{i-1}. \quad (4)$$

Неизвестная величина z_a выражается через H и I с помощью условия баланса воды в грунте

$$\int_{t_{*,i-1}}^t V d\tau = n_{0i}(z_a - M_{i-1})$$

и будет

$$z_a = M_{i-1} + \frac{H_{i-1} - H + W_i}{n_{0i}}, \quad (5)$$

где $W_i = \int_{t_{*,i-1}}^t I d\tau$; n_{0i} — разница между полным и исходным влагосодержанием в i -м слое.

В дальнейшем считается, что приток воды к поверхности грунта происходит равномерно во времени ($I = I_0 = \text{const}$). В других случаях вполне оправдано заменять переменную $I(t)$ ее средней величиной $I_{\text{ср}}$, так что $I_0 = I_{\text{ср}}$. Корректирующие коэффициенты \bar{z}_w считаются переменными величинами, а именно,

$$\bar{z}_{wi} = \alpha_i \bar{t} + \beta_i, \quad (6)$$

что дает возможность улучшать результаты расчетов на базе модели Грина–Ампта при начальном и ненасыщенном промачивании.

Благодаря подстановке выражений (5), (6) в (4) уравнение относительно H окончательно принимает форму

$$\frac{dH}{dt} = \frac{a_1 t + a_2 H + b_1}{I_0 t - H + b_2}, \quad (7)$$

где $a_1 = I_0(I_0 - k_i - \alpha k_i n_{0i})$, $a_2 = k_i(1 - n_{0i}) - I_0$,

$$b_1 = (I_0 - k_i)(H_{i-1} - I_0 t_{i-1}) + k_i n_{0i} I_0 \sum_{j=1}^{i-1} \frac{M_j}{k_j} - k_i n_{0i} (\beta + M_{i-1}),$$

$$b_2 = H_{i-1} - I_0 t_{i-1} + k_i n_{0i} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{M_j}{k_j}.$$

В результате замены

$$t = u + \frac{b_1 + a_2 b_2}{k_i n_{0i} I_0 (1 + \alpha)}, \quad H = v(u) + \frac{I_0 b_1 - a_1 b_2}{k_i n_{0i} I_0 (1 + \alpha)}$$

уравнение (7) трансформируется следующим образом:

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 t + a_2 H}{I_0 t - H}. \quad (8)$$

И, наконец, замена $v = u\varphi(u)$ позволяет свести (8) к уравнению с разделяющимися переменными

$$u \frac{d\varphi}{du} = \frac{a_1 + a_2 \varphi}{I_0 - \varphi} - \varphi. \quad (9)$$

Связь между φ и u находится при условии $u = u^0$, $\varphi = \varphi^0$ из решения уравнения (9)

$$u = u^0 \sqrt{\frac{\varphi^0{}^2 + (a_2 - I_0)\varphi^0 + a_1}{\varphi^2 + (a_2 - I_0)\varphi + a_1}} \exp\left[-\frac{a_2 + I_0}{2} R(\varphi, \varphi^0)\right]. \quad (10)$$

Здесь

$$u^0 = t_{i-1} - \frac{b_1 + a_2 b_2}{k_i n_{0i} I_0 (1 + \alpha)}, \quad \varphi^0 = H_{i-1} - \frac{I_0 b_1 - a_1 b_2}{k_i n_{0i} I_0 (1 + \alpha)},$$

$$R(\varphi, \varphi^0) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_i}} \ln\left(\frac{2\varphi^0 - I_0 + a_2 - \sqrt{\Delta_i}}{2\varphi^0 - I_0 + a_2 + \sqrt{\Delta_i}} \frac{2\varphi - I_0 + a_2 + \sqrt{\Delta_i}}{2\varphi - I_0 + a_2 - \sqrt{\Delta_i}}\right).$$

Для трехчлена в (10) справедливо представление

$$\varphi^2 + (a_2 - I_0)\varphi + a_1 = (\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2), \quad (11)$$

где

$$\varphi_{1,2} = I_0 - \frac{k_i(1 - n_{0i})}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta_i}}{2}, \quad \Delta_i = k_i^2(1 - n_{0i})^2 + 4k_i n_{0i} I_0.$$

Тогда с учетом (11) выражение (10) существенно видоизменится

$$\frac{u}{u^0} \left(\frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi^0 - \varphi_1}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{k_i(1 - n_{0i})}{2\sqrt{\Delta_i}}} \left(\frac{\varphi - \varphi_2}{\varphi^0 - \varphi_2}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{k_i(1 - n_{0i})}{2\sqrt{\Delta_i}}} = 1. \quad (12)$$

При возвращении к прежним переменным H , t следует положить

$$u = t + \frac{H_{i-1} - I_0 t_{i-1} + M_{i-1} + \beta - k_i(1 + n_{0i}) \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_j}{k_j}}{I_0(1 + \alpha)},$$

$$u^0 = \frac{H_{i-1} + M_{i-1} + \beta - k_i(1 - n_{0i}) \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_j}{k_j}}{I_0(1 + \alpha)},$$

$$\varphi = I_0 \frac{(1 + \alpha)H + M_{i-1} + \beta - k_i(1 + \alpha n_{0i}) \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_j}{k_j}}{I_0(t + \alpha t - t_{i-1}) + H_{i-1} + M_{i-1} + \beta - k_i(1 - n_{0i}) \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_j}{k_j}},$$

$$\varphi^0 = I_0 \frac{H_{i-1} + M_{i-1} + \beta - k_i(1 + \alpha n_{0i}) \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_j}{k_j}}{\alpha t_{i-1} I_0 + H_{i-1} + M_{i-1} + \beta - k_i(1 - n_{0i}) \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_j}{k_j}}.$$

Значения t_{i-1} , H_{i-1} находятся на предыдущем этапе расчетов при известных t_{i-2} , H_{i-2} . Для этого используется уравнение, аналогичное (12) и отвечающее $i - 1$ -му слою. Вместо t и H в него подставляются t_{i-1} , H_{i-1} , а затем оно решается относительно искомых параметров совместно с соотношением

$$H_{i-1} = H_{i-2} - n_{0,i-1} m_{i-1} + I_0(t_{i-1} - t_{i-2}).$$

Введение безразмерных переменных и параметров в случае многослойной среды не дает ощутимого эффекта и облегчает анализ процесса насыщения только того слоя, коэффициент фильтрации и мощность которого выбираются в качестве масштабов. Вместе с тем, при промачивании однородного грунта использование относительных величин оправдано, а само уравнение (12) при $z_w = \text{const}$ сведется к такому виду:

$$\begin{aligned} & \left[-\bar{H} - \bar{z}_w + \bar{\varphi}_1 \left(\bar{t} + \frac{1 + \bar{z}_w}{\bar{I}_0} \right) \right]^{\frac{1}{2} - \frac{1 - n_{0i}}{2\sqrt{\bar{\Delta}}}} \left[\bar{H} + \bar{z}_w - \bar{\varphi}_2 \left(\bar{t} + \frac{1 + \bar{z}_w}{\bar{I}_0} \right) \right]^{\frac{1}{2} + \frac{1 - n_{0i}}{2\sqrt{\bar{\Delta}}}} = \\ & = \frac{1 + \bar{z}_w}{\bar{I}_0} \left(-\frac{1 - n_0}{2} + \frac{\sqrt{\bar{\Delta}}}{2} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1 - n_{0i}}{2\sqrt{\bar{\Delta}}}} \left(\frac{1 - n_0}{2} + \frac{\sqrt{\bar{\Delta}}}{2} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{1 - n_{0i}}{2\sqrt{\bar{\Delta}}}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\bar{H} = H/H_0$; $\bar{z}_w = z_w/H_0$; $\bar{\varphi}_{1,2} = \varphi_{1,2}/I_0$; $\bar{I}_0 = I_0/k$; $\bar{\Delta} = 4n_0\bar{I}_0 + (1 - n_0)^2$; H_0 — начальная глубина поверхностного слоя.

Если капиллярные силы оказываются пренебрежимо малыми, то в (12), (13) оправдано полагать $\bar{z}_{wi} = 0$. При отсутствии указанного слоя перед выпадением осадков такого масштаба уже нет и зависимость для H опять-таки лучше представить в размерной форме

$$H = \frac{kt}{2} G \left(2\bar{I}_0 - 1 + n_0 - \sqrt{\bar{\Delta}} \right) \frac{kt}{2}. \quad (14)$$

Из (14) вытекает, что скорость инфильтрации в данной ситуации будет постоянной

$$\bar{V} = \bar{I}_0 - \frac{1 - n_0 + \sqrt{\bar{\Delta}}}{2}. \quad (15)$$

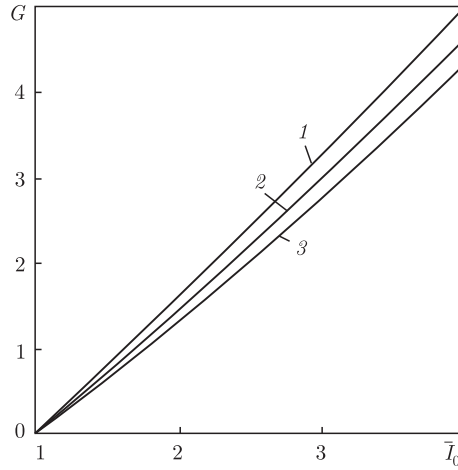


Рис. 1. Графики зависимости $G(\bar{T}_0)$: 1 — $n_0 = 0,3$; 2 — $n_0 = 0,5$; 3 — $n_0 = 0,7$

В общем случае V в момент времени t ($t_{i-1} \leq t \leq t_i$) находится при соответствующей ему глубине H (согласно (12)) по формуле

$$V = k_i \frac{(1 - n_{0i})(H - H_{i-1}) - n_{0i}(H_{i-1} + M_{i-1} + z_{wi})I_0 t}{H - H_{i-1} - k_i n_{0i} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_j}{k_j} - I_0(t)}, \quad (16)$$

где m_j — мощность j -го слоя.

Наконец, положение фронта промачивания в пределах i -го слоя ($M_{i-1} \leq z_a \leq M_i$) определяется при известном H по (5).

Применение представленной выше методики расчета интенсивного промачивания слоистого грунта иллюстрируется рядом примеров. Предметом анализа стало влияние начального дефицита влаги n_0 , интенсивности I_0 и корректива z_w на уровень поверхностной воды, что дало основание ограничиться рассмотрением промачивания верхнего грунта. Прежде всего, рассчитывалась зависимость $G(\bar{T}_0)$, согласно (14), где $G = 2H/(kt)$, при фиксированных n_0 , характерных для минеральных ($n_0 = 0,3$) и органических ($n_0 = 0,5; 0,7$) почвогрунтов, а также $z_w = 0$. Как свидетельствуют данные вычислений, представленные на рис. 1, даже двойное увеличение n_0 почти не отражается на отношении H/k . Вместе с тем изменение интенсивности I_0 и проницаемости грунта существенно сказывается на глубине поверхностного слоя воды и скорости инфильтрации. Кроме того, выполнялись расчеты относительной высоты слоя воды \bar{H} на протяжении длительного времени при $n_0 = 0,3$, $z_w = 0$ и типичных значениях \bar{T}_0 . Соответствующие кривые 1–3 на рис. 2, а имеют немотонный характер. Этот факт объясняется большим по абсолютной величине градиентом напора в грунте на начальной стадии его промачивания, так что скорость инфильтрации даже некоторое время превалирует над интенсивностью I_0 . С увеличением I_0 уровень H практически перестает снижаться и при малых \bar{t} . При значениях $\bar{t} \geq 1$ \bar{H} растет почти линейным образом, а значит, скорость инфильтрации можно считать постоянной.

Ускорение промачивания грунта за счет действия капиллярных сил оценивалось путем сопоставления кривых изменения высоты \bar{H} со временем, рассчитанных при значениях $\bar{z}_w = 0,5$ и 1, причем $\bar{H}(t)$ определялось параллельно при двух дефицитах n_0 (0,3 и 0,6). Приведенные на рис. 2, б кривые подтверждают существенность вышеупомянутых сил для

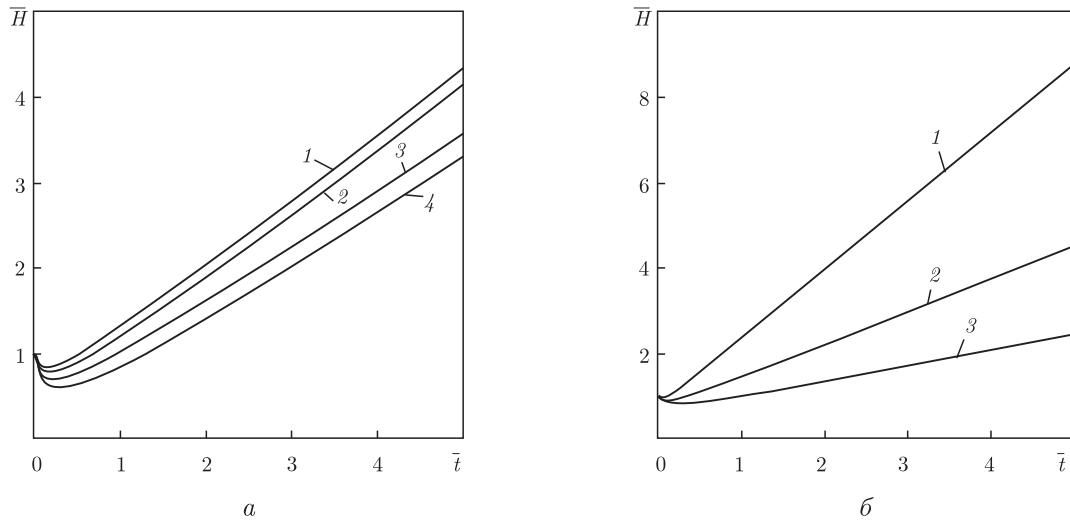


Рис. 2. Изменение высоты слоя воды на поверхности грунта: 1 – $\bar{I}_0 = 3$; 2 – $\bar{I}_0 = 2$; 3 – $\bar{I}_0 = 1,5$ (а); 1, 2 – $n_0 = 0,3$; 3, 4 – $n_0 = 0,6$; 1, 3 – $\bar{z}_w = 0,5$; 2, 4 – $\bar{z}_w = 1$ (б)

рассматриваемого процесса в начале расчетного периода ($\bar{t} < 1$), когда наблюдается снижение уровня воды на поверхности грунта почти вдвое (кривая 4). В то же время значение n_0 оказывается малосущественным для динамики поверхностного слоя.

1. Гусев Е. М. Экспериментальное исследование напорного впитывания // Физика почв. вод. – Москва: Наука, 1980. – С. 81–97.
2. Parlange J.-Y., Haverkamp R., Touma J. Infiltration under ponded conditions: 1. Optimal analytic solution and comparison with experimental observations // Soil Sci. – 1985. – **139**. – P. 305–311.
3. Si B., Kachanovski R. G., Zhang F. et al. Measurement of hydraulic properties during constant flux infiltration: field average // Soil Sci. Soc. Am. J. – 1999. – **63**. – P. 793–799.
4. Flerchinger G. N., Watts F. J., Bloomsburg G. L. Explicit solution to Green-Ampt equation for nonuniform soils // J. Irrig. and Drain. Engng. – 1988. – **114**. – P. 561–565.
5. Salvucci G. D., Entekhabi D. Explicit expressions for Green-Ampt (delta function diffusivity) infiltration rate and cumulative storage // Wat. Resour. Res. – 1994. – **30**. – P. 2661–2663.
6. Watson K. K., Awadalla S. A. Comparative study of the Green and Ampt analysis for a falling water table in a stratified profile // Ibid. – 1986. – **22**. – P. 723–730.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 23.03.2007