ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:519.46

А. Ф. Баранник, Т. А. Баранник, І. І. Юрик

Про точні розв'язки нелінійного хвильового рівняння

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

New extended classes of exact solutions to a nonlinear wave equation are constructed.

У роботі розглядається рівняння

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 = 0, \tag{1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_\mu = \partial u/\partial x_\mu$, $u_{\mu\nu} = \partial^2 u/(\partial x_\mu \partial x_\nu)$, $\mu, \nu = 0, 1$, $F(u)$ — довільна диференційовна функція, яка широко використовується для опису нелінійних хвильових процесів. Його групові властивості детально вивчені методом Лі в [1]. Результати дослідження умовної симетрії рівняння (1) викладені в [2], при цьому виділено всі випадки, коли рівняння (1) допускає оператори умовної симетрії. За допомогою цих операторів побудовані анзаци, які редукують рівняння (1) до звичайних диференціальних рівнянь і знайдено деякі класи точних розв'язків даного рівняння.

У даній роботі істотно розширено список відомих точних розв'язків рівняння (1). Запропоновано спеціальні анзаци, які дозволяють ефективно конструювати точні розв'язки рівняння (1). Для їх знаходження використовуються як метод умовних симетрій, так і метод прямого пошуку анзаців. Розглянуті анзаци без істотних змін можуть бути узагальнені на багатовимірне нелінійне хвильове рівняння.

Виділимо такі властивості рівняння (1):

1) рівняння

$$u_{00} - (u^{-k/(k+1)}u_1)_1 = 0, \qquad k \neq -1, \tag{2}$$

заміною $u \to u^{k+1}$, $x_0 \to x_1$, $x_1 \to x_0$ переводиться в рівняння

$$u_{00} - (u^k u_1)_1 = 0; \tag{3}$$

2) рівняння

$$u_{00} - (e^u u_1)_1 = 0, \tag{4}$$

заміною $u \to \ln u$, $x_0 \to x_1$, $x_1 \to x_0$ переводиться в рівняння

$$u_{00} - (u^{-1}u_1)_1 = 0; \tag{5}$$

3) для довільної функції $F(u)$ розв'язком рівняння (1) є функція

$$F(u) = x_0^{-2}x_1^2. \tag{6}$$

Розглянемо більш детально рівняння

$$u_{00} - (u^k u_1)_1 = 0, \qquad k \neq -1. \tag{7}$$

Рівняння (7) має розв'язки з відокремленими змінними $u = a(x_0)b(x_1)^{1/(k+1)}$, де функції $a = a(x_0)$, $b = b(x_1)$ задовольняють систему рівнянь

$$a'' = \lambda a^{k+1}, \qquad b'' = \lambda(k+1)b^{1/(k+1)}. \tag{8}$$

Кожне з рівнянь системи (8) є рівнянням Емдена–Фаулера. У випадку $\lambda = 2(2+k)/k^2$ система (8) має розв'язок

$$a = x_0^{-2/k}, \qquad b = x_1^{-2(k+1)/k}, \tag{9}$$

який визначає розв'язок

$$u^k = x_0^{-2}x_1^2$$

рівняння (7). Якщо $\lambda = 0$, то система (8) має розв'язок

$$a = x_0, \qquad b = x_1, \tag{10}$$

який визначає розв'язок

$$u = x_0 x_1^{1/(k+1)}$$

рівняння (7). Розглянемо випадки, коли існують розв'язки системи (8), відмінні від розв'язків (9) і (10), а також рівняння (4) і (5).

I. Випадок $k = 1$. Рівняння (7) має вигляд

$$u_{00} - u_1^2 - uu_{11} = 0. \tag{11}$$

Система (8) має розв'язок $a = \wp(x_0)$, $b = x_1^2$ для $\lambda = 6$, де $\wp(x_0)$ є функція Вейєрштрасса з інваріантами $g_2 = 0$, g_3. Тому розв'язком рівняння (11) є функція $u = \wp(x_0)x_1^2$. Досліджуючи умовну симетрію, отримуємо такі анзаци, редуковані рівняння і точні розв'язки рівняння (11).

а) Анзац

$$u = \mu_2(x_0)x_1^2 + \mu_1(x_0)x_1 + \mu_0(x_0) \tag{12}$$

редукує рівняння (10) до системи

$$\mu_2'' = 6\mu_2^2, \qquad \mu_1'' = 6\mu_2\mu_1, \qquad \mu_0'' = \mu_1^2 + 2\mu_2\mu_0. \tag{13}$$

Тому розв'язками рівняння (11) є функції:

$$u = x_1^2 \wp(x_0) + \Lambda(x_0),$$

де

$$\Lambda(x_0) = \frac{\sigma(x_0 \pm \alpha)}{\sigma(x_0)} \exp(\mp x_0 \varsigma(\alpha)),$$

σ, ς — функції Вейєрштрасса, а α визначається з умови $\wp(\alpha) = 0$;

$$u = x_0^{-2} x_1^2 + C_1 x_0^3 x_1 + \frac{C_1^2}{54} x_0^8 + C_2 x_0^{-1} + C_3 x_0^2,$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — довільні сталі;

$$u = 2(x_1 + x_0^2),$$

якщо в (12) покласти $\mu_2(x_0) = 0$, $\mu_1(x_0) = 2$, $\mu_0(x_0) = 2x_0^2$.

b) Анзац

$$u = \mu_1(x_0) x_1^2 + \mu_0(x_0) x_1^{1/2}$$

редукує рівняння (11) до системи

$$\mu_1'' = 6\mu_1^2, \qquad \mu_0'' = \frac{15}{4} \mu_1 \mu_0.$$

Тому розв'язками рівняння (11) є функції

$$u = x_0^{-2} x_1^2 + (C_1 x_0^{5/2} + C_2 x_0^{-3/2}) x_1^{1/2}, \qquad u = x_0 (C_1 x_1 + C_2)^{1/2},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

c) Оператор умовної симетрії

$$X = \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_0 \frac{\partial}{\partial u}.$$

Симетричний анзац

$$u = \omega(z) + x_0^2, \qquad z = x_1 + \frac{1}{2} x_0^2.$$

Редуковане рівняння

$$\omega \omega'' + (\omega')^2 - \omega' - 2 = 0. \tag{14}$$

d) Оператор умовної симетрії

$$X = \frac{\partial}{\partial x_0} + \left(\frac{1}{2} x_0^{-1} x_1 - \frac{3}{2} \mu x_0 \right) \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{x_0} (u + 3\mu x_1 - 9\mu^2 x_0^2) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Симетричний анзац

$$u = x_0^{-1}\omega(z) + \left(-\frac{1}{2}x_0^{-1}x_1 + \frac{3}{2}\mu x_0\right)^2, \qquad z = x_0^{-1/2}x_1 + \mu x_0^{3/2}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Редуковане рівняння

$$\omega\omega'' + (\omega')^2 - \frac{3}{4}z\omega' - \frac{3}{2}\omega - \frac{9}{8}z^2 = 0. \tag{15}$$

e) Оператор умовної симетрії

$$X = \frac{\partial}{\partial x_0} + (-x_0^{-1}x_1 - \mu x_0^4)\frac{\partial}{\partial x_1} + (2ux_0^{-1} - 6x_0^{-3}x_1^2 - 2\mu x_0^2 x_1 + 4\mu^2 x_0^7)\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Симетричний анзац

$$u = x_0^2\omega(z) + x_0^{-2}x_1^2 + 2\mu x_0^3 x_1 + \mu^2 x_0^8, \qquad z = x_0 x_1 + \frac{1}{6}\mu x_0^6.$$

Редуковане рівняння

$$\omega\omega'' + (\omega')^2 - 5\mu\omega' - 50\mu^2 = 0. \tag{16}$$

f) Анзац, наведений у п. d, є частинним випадком більш загального анзацу

$$u = a(x_0)^2\omega(z) + \frac{(a'x_1 + b')^2}{a^2}, \qquad z = a(x_0)x_1 + b(x_0), \tag{17}$$

де $a = a(x_0)$ є розв'язком рівняння

$$a'' = \lambda a^5, \tag{18}$$

а $b = b(x_0)$ є розв'язком рівняння

$$b'' = \lambda a^4 b. \tag{19}$$

Анзац (17) редукує рівняння (11) до рівняння

$$\omega\omega'' + (\omega')^2 - \lambda z\omega' - 2\lambda\omega - 2\lambda^2 z^2 = 0.$$

Крім розв'язку, наведеного в п. d, система (18), (19) має такий розв'язок для $\lambda = -\frac{3}{4}g_3$:

$$a = \wp(x_0)^{-1/2}, \qquad b(x_0) = \frac{1}{3}\mu g_3^{-1}\wp(x_0)^{-1/2}\int\limits_0^{x_0}\wp(s)ds, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Відповідний анзац має вигляд

$$u = \wp(x_0)^{-1}\omega(z) + \wp(x_0)^{-1}\left[\frac{1}{2}z\wp(x_0)^{-1} + \frac{1}{3}\mu g_3^{-1}\wp(x_0)^{3/2}\right]^2,$$

$$z = \wp(x_0)^{-1/2}x_1 + \frac{1}{3}\mu g_3^{-1}\wp(x_0)^{-1/2}\int\limits_0^{x_0}\wp(s)ds,$$

і редукує рівняння (11) до рівняння

$$\omega\omega'' + (\omega')^2 + \frac{3}{4}g_3 z\omega' + \frac{3}{2}g_3\omega - \frac{9}{8}g_3^2 z^2 = 0.$$

II. Випадок $k = 2$. Маємо рівняння

$$u_{00} - 2uu_1^2 - u^2 u_{11} = 0. \tag{20}$$

Система (8) для визначення функцій $a = a(x_0)$, $b = b(x_0)$ має вигляд

$$a'' = \lambda a^3, \qquad b'' = 3\lambda b^{1/3}. \tag{21}$$

Якщо в системі (21) $\lambda \neq 0$, то можна вважати, що $\lambda = \pm 2$. Розглянемо випадок $\lambda = 2$. Рівняння $a'' = 2a^3$ рівносильне рівнянню

$$(a')^2 = a^4 + C_n, \tag{22}$$

де C_n — стала інтегрування. Якщо $C_n = -1/4$, то рівняння (22) має розв'язок

$$u = ds\left(x_0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \tag{23}$$

де $ds(x_0, k)$ — еліптична функція Якобі, що задовольняє рівняння

$$\left(\frac{d\eta}{dx_0}\right)^2 = k^2(k^2 - 1) + (2k^2 - 1)\eta^2 + \eta^4.$$

Рівняння (22) досліджувалося в [3], де встановлені такі властивості його розв'язків.

a) Якщо $a^{(n)}$ є розв'язком рівняння (22), то функція

$$a^{(n+1)} = \frac{a_{x_0}^{(n)}}{a^{(n)}}, \qquad \text{де} \qquad a_{x_0}^{(n)} = \frac{da^{(n)}}{dx_0}, \tag{24}$$

теж є розв'язком рівняння (22), причому

$$(a_{x_0}^{(n+1)})^2 = (a^{(n)})^4 + C_{n+1}, \qquad C_{n+1} = -4C_n.$$

b) Якщо $a^{(n)}$ є розв'язком рівняння (22) для $C_n > 0$, то функція

$$\widetilde{a}^{(n)} = \frac{\sqrt{C_n}}{a^{(n)}} \tag{25}$$

теж є розв'язком рівняння (22).

Використовуючи властивості a і b, ми знаходимо нескінченні серії розв'язків рівняння (20):

$$u^{(n)} = x_1 a^{(n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\widetilde{u}^{(2k+1)} = x_1 \widetilde{a}^{(2k+1)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

де функція $\widetilde{a}^{(2k+1)}$ визначається формулою (25), а функція $a^{(n)}$ задовольняє рекурентне співвідношення

$$a^{(n)} = \frac{a^{(n-1)}_{x_0}}{a^{(n-1)}}, \qquad a^{(0)} = ds\left(x_0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Відзначимо також, що анзац

$$u = \mu_1(x_0)x_1 + \mu_0(x_0)$$

редукує рівняння (20) до системи

$$\mu_1'' = 2\mu_1^3, \qquad \mu_0'' = 2\mu_1^2\mu_0,$$

а тому розв'язком рівняння (20) є функція $u = x_0^{-1}x_1 + Cx_0^2$, C — довільна стала.

III. Випадок $k = -1$. Маємо рівняння

$$u_{00} + u^{-2}u_1^2 - u^{-1}u_{11} = 0. \tag{26}$$

Анзац

$$u = \omega(x_0)d(x_1)$$

редукує рівняння (26) до рівняння

$$\omega^2\omega'' d^3 + \omega^2(d'^2 - dd'') = 0,$$

а тому

$$d'^2 - dd'' = Ad^3, \tag{27}$$

$$\omega'' + A = 0, \qquad A \text{ — стала.} \tag{28}$$

Якщо $A = 0$, то отримуємо такий розв'язок рівняння (26):

$$u = C_2 e^{C_1 x_1}(C_3 x_0 + C_4),$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — довільні сталі.

Якщо $A \neq 0$, то можна вважати $A = 1$. Інтегруючи систему (27), (28), знаходимо такий розв'язок рівняння (26):

$$u = (x_0^2 + \delta_1 x_0 + \delta_0)\left(\wp(x_1) - \frac{C_1}{12}\right), \tag{29}$$

де $\wp(x_1)$ є функцією Вейєрштрасса з інваріантами $g_2 = C_1^2/12$, $g_3 = -C_1^3/216$, C_1, δ_1, δ_0 — довільні сталі. Частинними випадками сімейства (29) є розв'язки

$$u = 4(x_0^2 + \delta_1 x_0 + \delta_0)\cos^{-2} x_1, \qquad \text{якщо} \qquad C_1 = -4;$$

$$u = -(x_0^2 + \delta_1 x_0 + \delta_0) sh^{-2} x_1, \qquad \text{якщо} \qquad C_1 = -2.$$

IV. Випадок $k = -1/2$. Рівняння (7) має вигляд

$$u_{00} + \frac{1}{2} u^{-3/2} u_1^2 - u^{-1/2} u_{11} = 0. \tag{30}$$

Використовуючи властивість 1, яка стосується рівнянь (2) і (3), а також результати п. I, отримуємо такі анзаци, редуковані рівняння і точні розв'язки рівняння (30).

a) Анзац

$$u^{1/2} = \mu_2(x_1) x_0^2 + \mu_1(x_1) x_0 + \mu_0(x_1)$$

редукує рівняння (30) до системи

$$\mu_2'' = 6\mu_2^2, \qquad \mu_1'' = 6\mu_2\mu_1, \qquad \mu_0'' = \mu_1^2 + 2\mu_2\mu_0.$$

Тому розв'язками рівняння (30) є функції

$$u^{1/2} = x_0^2 \wp(x_1) + \Lambda(x_1),$$

де

$$\Lambda(x_1) = \frac{\sigma(x_1 \pm \alpha)}{\sigma(x_1)} \exp(\mp x_1 \varsigma(\alpha)),$$

σ, ς — функції Вейєрштрасса, а α визначається з умови $\wp(\alpha) = 0$;

$$u^{1/2} = x_1^{-2} x_0^2 + C_1 x_1^3 x_0 + \frac{C_1^2}{54} x_1^2 + C_2 x_1^{-1} + C_3 x_1^2,$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — довільні сталі;

$$u^{1/2} = 2(x_0 + x_1^2).$$

b) Анзац

$$u^{1/2} = \mu_1(x_1) x_0^2 + \mu_0(x_1) x_0^{1/2}$$

редукує рівняння (30) до системи

$$\mu_1'' = 6\mu_1^2, \qquad \mu_0'' = \frac{15}{4}\mu_1\mu_0.$$

Тому розв'язками рівняння (30) є функції

$$u^{1/2} = x_1^{-2} x_0^2 + (C_1 x_1^{5/2} + C_2 x_1^{-3/2}) x_0^{1/2}, \qquad u^{1/2} = x_1 (C_1 x_0 + C_2)^{1/2},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

c) Симетричний анзац

$$u^{1/2} = \omega(z) + x_1^2, \qquad z = x_0 + \frac{1}{2} x_1^2.$$

Редуковане рівняння

$$\omega\omega'' + (\omega')^2 - \omega' - 2 = 0.$$

d) Симетричний анзац

$$u^{1/2} = x_1^{-1}\omega(z) + \left(-\frac{1}{2}x_1^{-1}x_0 + \frac{3}{2}\mu x_1\right)^2, \qquad z = x_1^{-1/2}x_0 + \mu x_1^{3/2}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Редуковане рівняння

$$\omega\omega'' + (\omega')^2 - \frac{3}{4}z\omega' - \frac{3}{2}\omega - \frac{9}{8}z^2 = 0.$$

e) Симетричний анзац

$$u^{1/2} = x_1^2\omega(z) + x_1^{-2}x_0^2 + 2\mu x_1^3x_0 + \mu^2x_1^8, \qquad z = x_1x_0 + \frac{1}{6}\mu x_1^6.$$

Редуковане рівняння

$$\omega\omega'' + (\omega')^2 - 5\mu\omega' - 50\mu^2 = 0.$$

f) Симетричний анзац

$$u^{1/2} = a(x_1)^2\omega(z) + \frac{(a'x_0 + b')^2}{a^2}, \qquad z = a(x_1)x_0 + b(x_1), \tag{31}$$

де $a = a(x_1)$ є розв'язком рівняння

$$a'' = \lambda a^5,$$

а $b = b(x_1)$ є розв'язком рівняння

$$b'' = \lambda a^4 b.$$

Анзац (31) редукує рівняння (30) до рівняння

$$\omega\omega'' + (\omega')^2 - \lambda z\omega' - 2\lambda\omega - 2\lambda^2z^2 = 0.$$

Частинним випадком анзацу (31) є анзац

$$u^{1/2} = \wp(x_1)^{-1}\omega(z) + \wp(x_1)^{-1}\left[\frac{1}{2}z\wp(x_1)^{-1} + \frac{1}{3}\mu g_3^{-1}\wp(x_1)^{3/2}\right]^2,$$

$$z = \wp(x_1)^{-1/2}x_0 + \frac{1}{3}\mu g_3^{-1}\wp(x_1)^{-1/2}\int\limits_0^{x_1}\wp(s)ds,$$

який редукує рівняння (30) до рівняння

$$\omega\omega'' + (\omega')^2 + \frac{3}{4}g_3z\omega' + \frac{3}{2}g_3\omega - \frac{9}{8}g_3^2z^2 = 0.$$

Використовуючи властивості 1 і 2, які стосуються рівнянь (2) і (3), (4) і (5) відповідно, а також результати пп. II і III, можна отримати анзаци, редуковані рівняння і точні розв'язки таких рівнянь:

$$u_{00} + \frac{2}{3}u^{-\frac{5}{3}}u_1^2 - u^{-\frac{2}{3}}u_{11} = 0,$$

$$u_{00} - e^u u_1^2 - e^u u_{11} = 0.$$

1. *Amines W. F., Lohner R. J.* Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non-Linear Mech. – 1981. – **16**, No 5/6. – P. 439–447.
2. *Фущич В. І., Сєров М. І., Репета В. К.* Умовна симетрія, редукція і точні розв'язки нелінійного хвильового рівняння // Доп. АН України. – 1991. – № 5. – С. 29–34.
3. *Nikitin A. G., Barannyk T. A.* Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations // Centr. Eur. J. Math. – 2004. – **2**, No 5. – P. 840–858.

Національний університет харчових технологій, Київ

Надійшло до редакції 21.02.2007

УДК 517.944

Н. А. Вирченко, О. А. Репин

О разрешимости в замкнутой форме нелокальной задачи для уравнения смешанного типа второго рода

(Представлено академиком НАН Украины И. И. Ляшко)

The paper is devoted to the solvability of a nonlocal problem for a fractional differential equation of the mixed type of the second kind.

Дробные производные и интегралы имеют много приложений [1], возникли они из потребностей применений (в теории дифференциальных и интегральных уравнений, в механике, математической физике, химической физике, гидрологии, теории гравитации и др.).

Использование дробного исчисления в теории дифференциальных уравнений смешанного типа открывает возможности решения и исследования сложных задач аэродинамики, гидродинамики и др., а также решения новых краевых задач.

1. Уравнение смешанного типа. Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y}u, & y > 0, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy}, & y < 0, \qquad 0 < m < 1, \end{cases} \tag{1}$$