Використовуючи властивості 1 і 2, які стосуються рівнянь (2) і (3), (4) і (5) відповідно, а також результати пп. II і III, можна отримати анзаци, редуковані рівняння і точні розв'язки таких рівнянь:

$$u_{00} + \frac{2}{3}u^{-\frac{5}{3}}u_1^2 - u^{-\frac{2}{3}}u_{11} = 0,$$
$$u_{00} - e^u u_1^2 - e^u u_{11} = 0.$$


1. *Amines W. F., Lohner R. J.* Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non-Linear Mech. – 1981. – **16**, No 5/6. – P. 439–447.
2. *Фущич В. І., Серов М. І., Репета В. К.* Умовна симетрія, редукція і точні розв'язки нелінійного хвильового рівняння // Доп. АН України. – 1991. – № 5. – С. 29–34.
3. *Nikitin A. G., Barannyk T. A.* Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations // Centr. Eur. J. Math. – 2004. – **2**, No 5. – P. 840–858.



*Національний університет харчових технологій, Київ*



*Надійшло до редакції 21.02.2007*



УДК 517.944





**Н. А. Вирченко, О. А. Репин**


# О разрешимости в замкнутой форме нелокальной задачи для уравнения смешанного типа второго рода

*(Представлено академиком НАН Украины И. И. Ляшко)*


*The paper is devoted to the solvability of a nonlocal problem for a fractional differential equation of the mixed type of the second kind.*


Дробные производные и интегралы имеют много приложений [1], возникли они из потребностей применений (в теории дифференциальных и интегральных уравнений, в механике, математической физике, химической физике, гидрологии, теории гравитации и др.).

Использование дробного исчисления в теории дифференциальных уравнений смешанного типа открывает возможности решения и исследования сложных задач аэродинамики, гидродинамики и др., а также решения новых краевых задач.

**1. Уравнение смешанного типа.** Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y}u, & y > 0, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy}, & y < 0, \quad 0 < m < 1, \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,y}$ — частная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha$, $0 < \alpha < 1$, от функции $u(x,y)$ по второй переменной [1, с. 341]:

$$(D^{\alpha}_{0+,y}u)(x,y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y \frac{u(x,t)}{(y-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad 0 < \alpha < 1,\ y > 0. \tag{2}$$

Пусть $D$ — область, которая представляет собой объединение верхней полуплоскости $D^+ = \{(x,y)\colon -\infty < x < +\infty,\ y > 0\}$ и области $D_-$, лежащей в нижней полуплоскости $(y < 0)$, ограниченной характеристиками

$$AC\colon x - \frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2} = 0, \qquad BC\colon x + \frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

уравнения (1) и отрезком $[0,\ 1]$ прямой $y = 0$.

Обозначим через $J = (0,1)$ единичный интервал прямой $y = 0$, а через $\Theta_0(x)$ — аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0) \in J$, с характеристикой $AC$:

$$\Theta_0(x) = \frac{x}{2} - i\biggl(\frac{1}{1-2\beta}\frac{x}{2}\biggr)^{1-2\beta},$$

где

$$\beta = \frac{m}{2(m-2)}, \qquad -\frac{1}{2} < \beta < 0. \tag{3}$$

Пусть $I^{\alpha,\beta,\eta}_{0+}$ — оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса ${}_2F_1(a,b;c;z)$, введенный в [2] и имеющий при действительных $\alpha$, $\beta$, $\eta$ и $x > 0$ вид

$$(I^{\alpha,\beta,\eta}_{0+}f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}{}_2F_1\biggl(\alpha+\beta,-\alpha;\ \eta;\ 1-\frac{t}{x}\biggr)f(t)\,dt, \qquad \alpha > 0, \tag{4}$$

$$(I^{\alpha,\beta,\eta}_{0+}f)(x) = \biggl(\frac{d}{dx}\biggr)^n (I^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}_{0+}f)(x), \qquad \alpha \leqslant 0, \qquad n = [-\alpha]+1; \tag{5}$$

в частности

$$(I^{0,0,\eta}_{0+}f)(x) = f(x). \tag{6}$$

Заметим, что если $\alpha > 0$, то справедливы формулы

$$(I^{\alpha,-\alpha,\eta}_{0+}f)(x) = (I^{\alpha}_{0+}f)(x), \qquad (I^{-\alpha,\alpha,\eta}_{0+}f)(x) = (D^{\alpha}_{0+}f)(x), \tag{7}$$

где $I^{\alpha}_{0+}$ и $D^{\alpha}_{0+}$ — операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$ [1].

Для уравнения (1) изучим следующую нелокальную задачу. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области $D$, удовлетворяющее краевым условиям

$$y^{1-\alpha}u|_{y=0} = 0, \qquad -\infty < x \leqslant 0, \qquad 1 \leqslant x < \infty, \tag{8}$$

$$A(I_{0+}^{a,b,\beta-a-1}u[\theta_0])(x) + B(I_{0+}^{a+\beta,b,\beta-a-1}u(t,0))(x) = g(x), \qquad x \in J, \tag{9}$$

а также условия сопряжения

$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}u(x,y) = \lim_{y\to 0-0} u(x,y), \qquad x \in \overline{J}, \tag{10}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y = \lim_{y\to 0-0} u_y(x,y), \qquad x \in J. \tag{11}$$

Здесь $g(x) \in C^1(\overline{J}) \bigcap C^2(J)$ — заданная функция, $\alpha > -\beta$, $b > 2\beta - 1$, $A$ и $B$ — действительные числа, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, которые будут указаны далее.

Будем искать решение $u(x,y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области $D$ таких, что

$$y^{1-\alpha}u(x,y) \in C(\overline{D}^+), \qquad u(x,y) \in C(\overline{D}^-),$$

$$y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u)_y \in C(D^+) \bigcup \{(x,y)\colon 0 < x < 1,\ y = 0\},$$

$$u_{xx} \in C(D^+) \bigcup C(D^-), \qquad u_{yy} \in C(\overline{D}^-).$$

**2. Единственность решения задачи.** Пусть существует решение исследуемой задачи. Введем обозначения

$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}u(x,y) = \tau_1(x), \qquad \lim_{y\to 0-0} u(x,y) = \tau_2(x),$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y = \nu_1(x), \qquad \lim_{y\to 0-0} u_y(x,y) = \nu_2(x).$$

Известно (см., напр., [3, 4]), что решение уравнения (1) в полуплоскости $y > 0$, удовлетворяющее условию (8) и условию

$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}u(x,y) = \tau_1(x), \qquad x \in \overline{J},$$

дается формулой

$$u(x,y) = \int\limits_0^1 G(x,y,t)\tau_1(t)\,dt, \tag{12}$$

где

$$G(x,y,t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2} y^{\alpha/2-1} e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2}(-|x-t|y^{-\alpha/2}),$$

$$e_{b,c}^{p,q} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(p+kb)\Gamma(q-ck)}, \qquad b > c.$$

Также известно (см., напр., [3]), что функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из параболической части $D^+$ на линию $y = 0$, имеет вид

$$\nu_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\tau_1''(x). \tag{13}$$

Найдем соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесенное на линию $y=0$ из гиперболической части $D^-$ области $D$.

В полуплоскости $y<0$ уравнение (1) в характеристических координатах $\xi$, $\nu$ переходит в уравнение Эйлера–Дарбу–Пуассона

$$u_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}(u_\eta-u_\xi)=0. \tag{14}$$

Известно, что обобщенное решение уравнения (14) с начальными данными Коши

$$\begin{aligned} &u(x,0)=\tau_2(x)=\Gamma(1-2\beta)(I_{0+}^{1-2\beta}T)(x),\\ &\lim_{y\to 0-0}u_y(x,y)=[2(1-2\beta)]^{-2\beta}\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2\beta}(u_\xi-u_\eta)=\nu_2(x)\end{aligned} \tag{15}$$

имеет вид [5]

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_0^\xi T(t)(\eta-t)^{-\beta}(\xi-t)^{-\beta}dt+\int\limits_\xi^\eta N(t)(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}dt, \tag{16}$$

где

$$N(t)=\frac{1}{2\cos\pi\beta}T(t)-\chi_2\nu_2(t),\qquad \chi_2=[2(1-2\beta)]^{2\beta-1}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

причем функции $T(x)$ и $\nu_2(x)$ непрерывны в интервале $(0,1)$ и интегрируемы на отрезке $[0,\ 1]$, $\tau(0)$ обращается в нуль порядка не меньше $-2\beta$.

Из (16) определим $u[\theta_0(x)]$, положив $\xi=0$ и $\eta=x$:

$$u[\theta_0(x)]=k_1(I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}T(t))(x)+k_2(I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu_2(t))(x), \tag{17}$$

где

$$k_1=\frac{\Gamma(1-\beta)}{2\cos\pi\beta},\qquad k_2=-\Gamma(1-\beta)\chi_2.$$

Подставляя (17) в (9) и применяя соотношение

$$I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f(x)=I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f(x),\qquad \gamma>0 \tag{18}$$

(см., напр., [1, с. 327]), получаем

$$A(I_{0+}^{a+1-\beta,b+2\beta-1,\beta-a-1}(k_1T(t)+k_2\nu_2(t)))(x)+B(I_{0+}^{a+\beta,b,\beta-a-1}u(t,0))(x)=g(x). \tag{19}$$

Применяя к обеим частям (19) оператор $I_{0+}^{\beta-a-1,1-b-2\beta,0}$, используя (18) и (6), имеем

$$A[k_1T(x)+k_2\nu_2(x)]+B(I_{0+}^{2\beta-1,1-2\beta,\beta-a-1}\tau_2(t))(x)=(I_{0+}^{\beta-a-1,1-b-2\beta,0}g(t))(x). \tag{20}$$

Поскольку на основании (7)

$$B(I_{0+}^{2\beta-1,1-2\beta,\beta-a-1}\tau_1(t))(x)=\frac{B}{\Gamma(1-2\beta)}(D_{0+}^{1-2\beta}\tau_2(t))(x),$$

то из (20) получаем

$$T(x) = -\frac{Ak_2\Gamma(1-2\beta)}{Ak_1\Gamma(1-2\beta)+B}\nu_2(x) + \frac{g_1(x)}{Ak_1\Gamma(1-2\beta)+B},$$

где

$$g_1(x) = \Gamma(1-2\beta)(I_{0+}^{\beta-a-1,1-b-2\beta,0}g(t))(x). \tag{21}$$

Подставляя (21) в (15), находим

$$(Ak_1\Gamma(1-2\beta)+B)\tau_2(x) = -Ak_2\Gamma^2(1-2\beta)(I_{0+}^{1-2\beta}\nu_2(t))(x) + \Phi(x), \tag{22}$$

где

$$\Phi(x) = \Gamma(1-2\beta)(I_{0+}^{1-2\beta}g_1(t))(x).$$

Теперь рассмотрим соответствующую однородную задачу ($g(x) \equiv 0$) и применим ту же, что и в работах [3, 6], методику.

Оценим интеграл

$$J_1 = \int\limits_0^1 \tau_2(x)\nu_2(x)\,dx.$$

Согласно условиям (10) и (11) имеем

$$J_1 = \int\limits_0^1 \tau_1(x)\nu_1(x)\,dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$, получаем

$$J_1 = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^1 \tau_1(x)\tau_1''(x)\,dx = -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^1 (\tau_1''(x))^2 dx \leqslant 0. \tag{23}$$

Покажем, что для гиперболической области $D^-$ справедливо неравенство $J_1 \geqslant 0$.

При $g(x) = 0$ равенство (22) принимает вид

$$\tau_2(x) = \frac{k_3}{\Gamma(1-2\beta)}\int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta}\nu_2(t)\,dt,$$

где $k_3 = -\dfrac{Ak_2}{Ak_1\Gamma(1-2\beta)+B}$. Тогда

$$J_1 = \frac{k_3}{\Gamma(1-2\beta)}\int\limits_0^1 \nu_2(x)\,dx\int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta}\nu_2(t)\,dt.$$

Будем считать, что выполняются следующие условия: $A < 0$, $Ak_1\Gamma(1-2\beta)+B > 0$ или $A > 0$, $Ak_1\Gamma(1-2\beta)+B < 0$. При выполнении этих условий $k_3 < 0$.

Воспользуемся теперь следующей формулой для гамма-функции [7, с. 385]:

$$\int\limits_0^\infty s^{\mu-1}\cos ksds = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}\cos\frac{\mu\pi}{2}, \qquad k > 0, \qquad 0 < \mu < 1.$$

Взяв в ней $k = |x-t|$, $\mu = -2\beta$, запишем

$$|x-t|^{2\beta} = \frac{1}{\Gamma(-2\beta)\cos\pi\beta}\int\limits_0^\infty s^{-2\beta-1}\cos(s|x-t|)\,ds, \qquad -\frac{1}{2} < \beta < 0.$$

После некоторых вычислений находим

$$J_1 = \frac{k_3\sin\pi\beta}{\pi}\int\limits_0^\infty s^{-2\beta-1}\left[\left(\int\limits_0^1 \nu_2(x)\cos sxdx\right)^2 + \left(\int\limits_0^1 \nu_2(x)\sin sxdx)^2\right)\right]ds \geqslant 0. \tag{24}$$

Из полученных нами неравенств (23) и (24) вытекает, что $J_1 = 0$ и $\int\limits_0^1(\tau_1'(x))^2dx = 0$. Отсюда, в силу того, что $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$, получим $\tau_1(x) = 0$ для всех $x \in \overline{J}$. А тогда $u(x,y) \equiv$ в области $\overline{D}$, что и доказывает единственность решения исходной задачи.

**3. Существование решения задачи.** Учитывая условия (10) и (11), положим $\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$, $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$. Дифференцируя дважды равенство (22) по $x$, мы получаем соотношение

$$[Ak_1\Gamma(1-2\beta)+B]\tau''(x) = -Ak_2\Gamma^2(1-2\beta)\frac{d^2}{dx^2}(I_{0+}^{1-2\beta}\nu(t))(x) + \Phi''(x)$$

или

$$\tau''(x) = \mu_1(D_{0+}^{1+2\beta}\nu(t))(x) + \mu_2\Phi''(x), \tag{25}$$

где $\mu_1 = -\dfrac{Ak_2\Gamma^2(1-2\beta)}{Ak_1\Gamma(1-2\beta)+B}$, $\mu_2 = \dfrac{1}{Ak_1\Gamma(1-2\beta)+B}$.

Принимая во внимание (13), (25) и условия сопряжения (10), (11), приходим к уравнению дробного порядка

$$\mu_1(D_{0+}^{1+2\beta}\nu(t))(x) - \Gamma(1+\alpha)\nu(x) = -\mu_2\Phi''(x). \tag{26}$$

Известно [1], что общее решение дифференциального уравнения дробного порядка

$$\begin{aligned} &D_{0+}^\alpha(x) - \lambda y(x) = h(x), \qquad \alpha > 0,\\ &n = -[-\alpha], \qquad n-1 < \alpha \leqslant n, \end{aligned} \tag{27}$$

дается формулой

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^{\alpha-k}E_{\alpha,1+\alpha-k}(\lambda x^\alpha) + \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(x-t)^\alpha)h(t)\,dt, \tag{28}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные, $E_{\alpha,\beta}(z)$ — функция Миттаг–Леффлера [8, 9].

Уравнение (26) — это уравнение вида (27) с $y(x)=\nu(x)$, $\alpha=1+2\beta$, $0<1+2\beta<1$, $\lambda=\Gamma(1+\alpha)/\mu_1$, $h(x)=-(\mu_2/\mu_1)\Phi''(x)$. Поэтому общее решение уравнения (26) будет иметь вид

$$\nu(x)=c_1x^{2\beta}E_{1+2\beta,1+2\beta}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}x^{1+2\beta}\right)-$$
$$-\frac{\mu_2}{\mu_1}\int\limits_0^x(x-t)^{2\beta}E_{1+2\beta,1+2\beta}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}(x-t)^{1+2\beta}\right)\Phi''(t)\,dt. \qquad (29)$$

Подставим $\nu(x)$ в (22) и получим явный вид для $\tau(x)$:

$$(Ak_1\Gamma(1-2\beta)+B)\tau(x)=$$
$$=-Ak_2\Gamma^2(1-2\beta)c_1\left(I_{0+}^{1-2\beta}t^{2\beta}E_{1+2\beta,1+2\beta}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}t^{1+2\beta}\right)\right)(x)-$$
$$-\left(I_{0+}^{1-2\beta}\int\limits_0^t(t-s)^{2\beta}E_{1+2\beta,1+2\beta}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}(t-s)^{1+2\beta}\right)\right)\Phi''(s)\,ds(x)+\Phi(x). \qquad (30)$$

Преобразуем правую часть равенства (30):

$$\left(I_{0+}^{1-2\beta}t^{2\beta}E_{1+2\beta,1+2\beta}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}t^{1+2\beta}\right)\right)(x)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}\int\limits_0^x(x-t)^{-2\beta}t^{2\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}t^{1+2\beta}\right)^m}{\Gamma((2\beta+1)m+2\beta+1)}dt=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}\right)^m x^{1+(1+2\beta)m}}{\Gamma(1-2\beta)\Gamma((2\beta+1)m+2\beta+1)}\int\limits_0^1 z^{2\beta+(1+2\beta)m}(1-z)^{-2\beta}dz=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x\left(\dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}x^{1+2\beta}\right)^m}{\Gamma(1-2\beta)\Gamma((2\beta+1)m+2\beta+1)}B(1-2\beta,1+2\beta+(1+2\beta)m)=$$
$$=x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}x^{1+2\beta}\right)^m}{\Gamma((1+2\beta)m+2)}=xE_{1+2\beta,2}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}x^{1+2\beta}\right). \qquad (31)$$

Мы использовали здесь интегральное представление бета-функции [9].

Для преобразования второго слагаемого в (28) применим последовательную формулу Дирихле [9], осуществим перестановку операций суммирования и интегрирования (такая перестановка возможна в силу вышеуказанных условий):

$$\left(I_{0+}^{1-2\beta}\int_0^t (t-s)^{2\beta}E_{1+2\beta,1+2\beta}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}(t-s)^{1+2\beta}\Phi''(s)\,ds\right)\right)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}\int_0^x (x-t)^{-2\beta}dt\int_0^t (t-s)^{2\beta}E_{1+2\beta,1+2\beta}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}(t-s)^{1+2\beta}\right)\Phi''(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}\int_0^x \Phi''(s)\,ds\int_0^x (x-t)^{-2\beta}(t-s)^{2\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}(t-s)^{1+2\beta}\right)}{\Gamma((1+2\beta)m+1+2\beta)}\,dt=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}\right)^m}{\Gamma((1+2\beta)m+2)}\int_0^x \Phi''(s)(x-s)^{(1+2\beta)m+1}ds=$$

$$=\int_0^x (x-s)E_{1+2\beta,2}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}(x-s)^{1+2\beta}\right)\Phi''(s)\,ds. \qquad (32)$$

С учетом равенств (31) и (32) функция $\tau(x)$ может быть переписана в виде

$$(Ak_1\Gamma(1-2\beta)+B)\tau(x)=-Ak_2\Gamma^2(1-\beta)c_1xE_{1+2\beta,2}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}x^{1+2\beta}\right)-$$

$$-\int_0^x (x-t)E_{1+2\beta,2}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_1}(x-t)^{1+2\beta}\right)\Phi''(t)\,dt+\Phi(x), \qquad (33)$$

где $c_1$ — произвольная постоянная.

Соотношения (29) и (33) дают возможность получить в замкнутой форме решение исходной задачи в областях $D^+$ и $D^-$, проверить выполнение краевых условий (8), (9), условий сопряжения (10), (11) и принадлежность решения заданному классу функций в области $D$, что и доказывает существование решения исходной задачи.


1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. *Saigo M.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function // Math. Rep. Kyushu Univ. – 1978. – **11**, No 2. – P. 135–143.
3. *Килбас А. А., Репин О. А.* Аналог задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 5. – С. 638–644.
4. *Геккиева С. Х.* Об одном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. – 2001. – **5**, № 2. – С. 18–22.
5. *Кароль И. Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Докл. АН СССР. – 1953. – **88**, № 2. – С. 197–200.
6. *Килбас А. А., Репин О. А.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с частной производной Римана-Лиувилля и операторами обобщенного дробного интегрирования в коаевом условии // Труды Института математики. Минск. – 2004. – **12**, № 2. – С. 75–81.

7. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1957. – 438 с.
8. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – Москва: Наука, 1966. – 672 с.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. – Москва: Наука, 1973. – 296 с.

*НТУ Украины "Киевский политехнический институт"*
*Самарский государственный экономический университет*

*Поступило в редакцию 16.02.2007*

УДК 512.544



**Л. А. Курдаченко, І. Я. Субботін, В. А. Чупордя**

## Про обмежено артінові фінітарні модулі

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)*

*We consider a following special case of Artinian finitary modules. Let $D$ be a Dedekind domain and $G$ is a group. The $DG$-module $A$ is said to be bounded Artinian finitary, if $A$ is Artinian finitary, and there are the numbers $\mathbf{b}_F(A) = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}_d(A) = \mathbf{d}$, $\mathbf{b}, \mathbf{d} \in N$ and a finite subset $\mathbf{b}_\sigma(A) = \tau \subseteq \mathbf{Spec}(D)$ such that $\mathbf{l}_F(A/C_A(g)) \leqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{l}_d(A/C_A(g)) \leqslant \mathbf{d}$ and $\mathbf{Ass}_D(A/C_A(g)) \subseteq \tau$ for every element $g \in G$. Here, we study the bounded Artinian finitary modules under some natural restriction.*

Нехай $F$ — поле, $G$ — група і $A$ — $FG$-модуль. Будемо говорити, що $A$ — фінітарний модуль, або що $G$ — фінітарна лінійна група, якщо для кожного елемента $g \in G$ фактормодуль $A/C_A(g)$ має скінченну вимірність над $F$. Вивчення фінітарних лінійних груп було першим кроком на шляху розвитку теорії нескінченно вимірних лінійних груп. Зараз теорія фінітарних лінійних груп розвинута досить добре, накопичено багато цікавих результатів (див., напр., [1]). Цей істотний прогрес вказує на можливість розширення теорії фінітарних груп у різних напрямках. Беручи до уваги той факт, що артінові та нетерові модулі над кільцями є природними узагальненнями векторних просторів скінченної вимірності, Б. Верфріц [2] ввів до розгляду таке узагальнення фінітарних груп і фінітарних модулів, як скінченно фінітарні групи. Нехай $R$ — кільце, $G$ — група, $A$ — $RG$-модуль. Група $G$ називається скінченно фінітарною, якщо для кожного елемента $g \in G$ фактормодуль $A/C_A(g)$ є скінченним.

Важливим типом скінченно фінітарних модулів є мінімально нескінченні модулі, тобто модулі кожний власний фактормодуль яких є скінченним. Ці модулі, детально розглядалися в книзі [3, гл. 6–8].

У роботі [4] Б. Верфріц ввів артіново-фінітарні та нетерово-фінітарні групи. Група $G$ називається артіново-фінітарною (відповідно, нетерово-фінітарною), якщо для кожного елемента $g \in G$ фактормодуль $A/C_A(g)$ є артіновим (відповідно, нетеровим) $R$-модулем. У своїх роботах [2, 4] Б. Верфріц розглядає перший природний випадок, коли $R = \mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел.