ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2007

МЕХАНІКА

УДК 621.318.001.21

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

Модифицирование формулы амплитуд колебаний якоря электромагнитного вибровозбудителя

New formulas for the amplitude of rotor oscillations of an electromagnetic vibroexciter are deduced with regard for oscillations of an air clearance.

Электромагнитные вибровозбудители (ЭМВ) в своей структуре имеют электрическую, магнитную и механическую части [1]. Механическая часть ЭМВ представляет собой колебательную систему (КС) с одной степенью свободы и при наличии реактивной массы — КС с двумя степенями свободы. Электромагнитномеханическая схема ЭМВ изображена на рис. 1, где М — магнитопровод; Я — якорь; РМ — реактивная масса; О — электрическая обмотка; U — задающее напряжение; δ — воздушный зазор; ПЯ, ПР — пружины; ДЯ, ДР — демпферы; К — корпус; Фн — фундамент; $x_{\text{я}}$, $x_{\text{р}}$ — перемещения якоря и РМ соответственно; i — электрический ток.

Дифференциальные уравнения ЭМВ имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&m_{\text{я}}\ddot{x}_{\text{я}} + b_{\text{я}}\dot{x}_{\text{я}} + \text{c}_{\text{я}}x_{\text{я}} = F + b_{\text{я}}\dot{x}_p + c_{\text{я}}x_{\text{р}};\\
&m_{\text{р}}\ddot{x}_{\text{р}} + (b_{\text{я}} + b_{\text{р}})\dot{x}_p + (\text{c}_{\text{я}} + \text{c}_{\text{р}})x_{\text{р}} = b_{\text{я}}\dot{x}_{\text{я}} + c_{\text{я}}x_{\text{я}};\\
&U = ri + L\frac{di}{dt}; \qquad W_\ell = \frac{1}{2}Li^2;\\
&F = \frac{dW_\ell}{d\delta_x} = \frac{i^2L}{2\delta_x} = \frac{U^2}{2\delta_x\omega^2 L} \qquad \text{при} \qquad \omega L \gg r,\\
&\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \qquad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $m_{\text{я}}$, $m_{\text{р}}$ — массы Я и РМ соответственно; $b_{\text{я}}$, $b_{\text{р}}$, $c_{\text{я}}$, $c_{\text{р}}$ — коэффициенты диссипации и жесткости соответственно; r — резистор О; L — индуктивность О; I — электрический ток в О; W_e — электрическая энергия ЭМВ; t — время; δ_x — воздушный зазор с учетом колебаний якоря; ω — круговая частота ($\omega = 2\pi f$, f — частота, Гц).

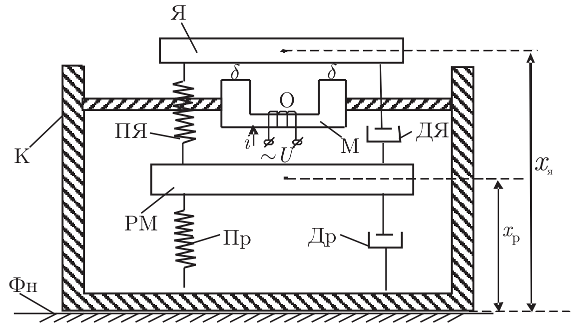

Рис. 1

Вначале рассмотрим ЭМВ без РМ. В этом случае ПЯ и ДЯ опираются на корпус К и здесь присутствуют только $x_я$, $\dot{x}_я$, $\ddot{x}_я$, т. е. в ЭМВ КС с одной степенью свободы. Известно [2], что в такой КС амплитуда колебаний

$$x_{яa} = \frac{F_a}{m_я\sqrt{(4\omega^2 - \omega_{0я}^2)^2 + \left(\dfrac{2b_я}{m_я}\omega\right)^2}}, \tag{2}$$

где $\omega_{0я}$ — собственная частота колебаний якоря.

Однако если использовать F из (1) в виде выражений $F_U = \dfrac{U^2}{2\delta_x\omega^2 L}$ или $F_i = \dfrac{i^2 L}{2\delta_x}$, в которых δ_x зависит от перемещения $x_я$, то формула (2) будет изменена. Покажем это изменение.

Напряжение $U = U_a \sin\omega t$, а ток $i = I_a\sin(\omega t - \varphi)$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega L}{r}$. При $\omega L \gg r$ $\varphi \approx \dfrac{\pi}{2}$ и $i = I_a\cos\omega t$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} F_U &= \frac{U_a^2(\sin\omega t)^2}{2\delta_x\omega^2 L} = \frac{U_a^2}{4\delta_x\omega^2 L}(1-\cos 2\omega t),\\ F_i &= \frac{I_a^2\cos^2\omega t}{2\delta_x} = \frac{I_a^2 L}{4\delta_x}(1+\cos 2\omega t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Как видно из (3), тяговые усилия F_U и F_i состоят из постоянных составляющих $\dfrac{U_a^2}{4\delta_x\omega^2 L}$, $\dfrac{I_a^2 L}{4\delta_x}$ соответственно и переменных составляющих $\dfrac{-U_a^2}{4\delta_x\omega^2 L}\cos 2\omega t$, $\dfrac{I_a^2 L}{4\delta_x}\cos 2\omega t$ соответственно. Вот почему в (2) фигурирует частота 2ω.

На основании первого уравнения в (1) постоянные составляющие равны

$$x_{я01} = \frac{U_a^2}{4\delta_x\omega^2 L c_я}, \qquad x_{я02} = \frac{I_a^2 L}{4\delta_x c_я}.$$

Заметим, что F_1 — это тяговое усилие при ЭМВ с источником напряжения на входе обмотки О, а F_2 — с источником тока. Составляющие $x_{я01}$ и $x_{я02}$ направлены в сторону полюсов М, т. е. притягивают Я к М и поэтому начальный воздушный зазор δ уменьшается и становится соответственно равным $\delta_{x01} = \delta - x_{я01}$ или $\delta_{x02} = \delta - x_{я02}$.

Переменные составляющие тяговых усилий F_U и F_i создают колебания $x_{яU}$, $x_{яi}$ в зазорах δ_{x01} и δ_{x02} соответственно. В этом случае воздушный зазор δ_x изменяется по закону

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{x01} = \delta - x_{я01} \mp x_{яa1}\cos 2\omega t, \\ &\delta_{x02} = \delta - x_{я02} \pm x_{яa2}\cos 2\omega. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В (4) $x_{яa1}$ и $x_{яa2}$ выражаются соотношением (2) при условии соответствия $F = F_U$ или $F = F_i$. Подставим в (2) F_U и F_i, а также δ_{x1} и δ_{x2} соответственно. Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} &x_{яa1} = \frac{U_a^2}{4\omega^2 L(\delta_{x01} \mp x_{яa1}) m_я \sqrt{(4\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\dfrac{2b_я}{m_я}\omega\right)^2}}, \\ &x_{яa2} = \frac{I_a^2 L}{4(\delta_{x02} \pm x_{яa2}) m_я \sqrt{(4\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\dfrac{2b_я}{m_я}\omega\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Далее последовательно рассмотрим первое, а затем второе уравнения в (6). Выразим эти уравнения в сокращенном виде

$$\begin{gathered} x_{яa1} = \frac{U_a^2}{A(\delta_{x01} \mp x_{яa1})}, \qquad x_{яa2} = \frac{I_a^2 L}{B(\delta_{x02} \pm x_{яa2})}, \\ \text{А} = 4\omega^2 L(\delta_{x01} \mp x_{яa1}) m_я \sqrt{(4\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{2b_я}{m_я}\omega\right)^2}; \qquad B = \frac{A}{\omega^2 L^2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Из (6) получим

$$\left.\begin{aligned} &\mp x_{яa1}^2 + \delta_{x01} x_{яa1} - \frac{U_a^2}{A} = 0, \\ &\pm x_{яa2}^2 + \delta_{x02} x_{яa2} - \frac{I_a^2}{B} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Как видно из (7), эти уравнения являются квадратными относительно $x_{яa1}$ и $x_{яa2}$ соответственно. Их решения следующие (будем брать знак “$-$” перед $x_{яak}^2$, $k = \overline{1,2}$):

$$x_{яa1_{(1,2)}} = \frac{\delta_{x01}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_{x01}}{2}\right)^2 - \frac{U_a^2}{A}}, \tag{8}$$

$$x_{яa2_{(1,2)}} = \frac{\delta_{x02}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_{x02}}{2}\right)^2 - \frac{I_a^2}{B}}. \tag{9}$$

Заметим, что $x_{яa1}$ и $x_{яa2}$ не должны быть большее δ_{x01} и δ_{x02} соответственно. В противном случае будут удары якоря о полюса магнитопровода и, в конечном итоге, магнитопровод и якорь могут иметь поломки. А это означает, что в (8) и (9)

$$\left.\begin{aligned} &x_{яa1} = \frac{\delta_{x01}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\delta_{x01}}{2}\right)^2 - \frac{U_a^2}{A}}, \\ &x_{яa2} = \frac{\delta_{x02}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\delta_{x02}}{2}\right)^2 - \frac{I_a^2}{B}}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для наглядности (10) подставим в них значения A и B

$$x_{\text{я}a1} = \frac{\delta_{x01}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\delta_{x01}}{2}\right)^2 - \frac{U_a^2}{4m_{\text{я}}\sqrt{(4\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{2b_{\text{я}}}{m_{\text{я}}}\omega\right)^2}}}, \tag{11}$$

$$x_{\text{я}a2} = \frac{\delta_{x02}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\delta_{x02}}{2}\right)^2 - \frac{I_a^2}{4m_{\text{я}}\sqrt{(4\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{2b_{\text{я}}}{m_{\text{я}}}\omega\right)^2}}}. \tag{12}$$

Результаты (11) и (12) отличаются от известных результатов для колебательных систем, благодаря влиянию перемещений якоря на начальный воздушный зазор δ_x.

Рассмотрим ЭМВ с реактивной массой РМ. Как видно из первого уравнения (2), тяговые усилия, действующие на якорь, в этом случае будут $F_{Up} = F_U + b_{\text{я}}\dot{x}_{\text{p}U} + c_{\text{я}}x_{pU}$ и $F_{ip} = F_i + b_{\text{я}}\dot{x}_{\text{p}i} + c_{\text{я}}x_{pi}$. Амплитуды колебаний x_{paU} и x_{pai} соответственно равны

$$x_{paU} = \frac{b_{\text{я}}\dot{x}_{a1} + \text{c}_{\text{я}}x_{a1}}{m_{\text{p}}\sqrt{(4\omega^2 - \omega_{0p}^2)^2 + \left(\frac{b_{\text{я}}+b_p}{m_p}2\omega\right)^2}}, \tag{13}$$

$$x_{pai} = \frac{b_{\text{я}}\dot{x}_{a2} + \text{c}_{\text{я}}x_{a2}}{m_{\text{p}}\sqrt{(4\omega^2 - \omega_{0p}^2)^2 + \left(\frac{b_{\text{я}}+b_p}{m_p}2\omega\right)^2}}. \tag{14}$$

Пользуясь (2), имеем

$$x_{\text{я}ak} = \frac{F_{ak}}{m_{\text{я}}\sqrt{(4\omega^2 - \omega_{0\text{я}}^2)^2 + \left(\frac{2b_{\text{я}}}{m_{\text{я}}}\omega\right)^2}}, \qquad k = Up, ip. \tag{15}$$

Подставляя в (15) F_{Up}, F_{ip} и обозначая $m_{\text{я}}\sqrt{(4\omega^2 - \omega_{0\text{я}}^2)^2 + \left(\frac{2b_{\text{я}}}{m_{\text{я}}}\omega\right)^2} = \text{Д}$, получаем

$$x_{\text{я}aUp} = \frac{U_a^2}{(b_{x01} \mp x_{\text{я}aUp})A} + \frac{2b_{\text{я}}\omega x_{\text{pa}U} + c_{\text{я}}x_{paU}}{\text{Д}}, \tag{16}$$

$$x_{\text{я}aip} = \frac{I_a^2}{(b_{x02} \pm x_{\text{я}aip})A} + \frac{2b_{\text{я}}\omega x_{\text{pa}i} + c_{\text{я}}x_{pai}}{\text{Д}}, \tag{17}$$

откуда

$$\mp x_{\text{я}aUp}^2 + \delta_{x01}x_{\text{я}aUp} - \frac{U_a^2}{A} - \frac{(2b_{\text{я}}\omega + c_{\text{я}})x_{\text{pa}U}}{\text{Д}} = 0,$$

$$\pm x_{\text{я}aip}^2 + \delta_{x02}x_{\text{я}aip} - \frac{I_a^2}{B} - \frac{(2b_{\text{я}}\omega + c_{\text{я}})x_{\text{pa}i}}{\text{Д}} = 0.$$

Так же, как и в (7), перед $x^2_{яaUp}$ и $x^2_{яaip}$ будем брать знак "$-$". Решение этих квадратных уравнений имеет вид

$$x_{яaUp_{(1,2)}} = \frac{\delta_{x01}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_{x01}}{2}\right)^2 - \frac{U_a^2}{A} - \frac{(2b_я\omega + c_я)x_{paU}}{Д}}, \tag{18}$$

$$x_{яaip_{(1,2)}} = \frac{\delta_{x02}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_{x02}}{2}\right)^2 - \frac{I_a^2}{A} - \frac{(2b_я\omega + c_я)x_{pai}}{Д}}. \tag{19}$$

Вследствие того, что $x_{яaUp}$ и $x_{яaip}$ не должны быть больше δ_{x01} и δ_{x02} соответственно, в этих выражениях радикалы должны быть со знаком "+". Как видно из (18) и (19), амплитуды $x_{яaUp}$ и $x_{яaip}$ зависят от амплитуд колебаний РМ. Если в (16), (17) использовать (13) и (14) соответственно, то выражения $x_{яaUp}$ и $x_{яaip}$ будут иметь еще более сложные формы. Рассмотрим эти зависимости.

Введем обозначение

$$C = m_p \sqrt{(4\omega^2 - \omega_{0p}^2)^2 + \left(2\frac{b_я + b_p}{m}\omega\right)^2}.$$

С учетом всех обозначений

$$x_{яaUp} = \frac{F_U + 2b_я\omega x_{paU} + c_я x_{paU}}{Д}, \tag{20}$$

$$x_{яaip} = \frac{F_i + 2b_я\omega x_{pai} + c_я x_{pai}}{Д}. \tag{21}$$

Подставляя в (20) и (21) соответственно (13) и (14), получим

$$\left.\begin{aligned} x_{яaUp} &= \frac{F_U}{Д} + \frac{(2b_я\omega + c_я)^2 x_{яaUp}}{ДC}, \\ x_{яaip} &= \frac{F_i}{Д} + \frac{(2b_я\omega + c_я)^2 x_{яaip}}{ДC}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Введем в (22) выражения для F_U и F_i соответственно

$$x_{яaUp} = \frac{U_a^2}{4\omega^2 LД(\delta_{x01} \pm x_{яaUp})} + \frac{(2b_я\omega + c_я)^2 x_{яaUp}}{ДC},$$

$$x_{яaip} = \frac{I_a^2}{4Д(\delta_{x02} \pm x_{яaip})} + \frac{(2b_я\omega + c_я)^2 x_{яaip}}{ДC},$$

откуда получаем

$$\pm\alpha x^2_{яaUp} - \beta_U x_{яaUp} - \frac{U_a^2}{4\omega^2 LД} = 0, \tag{23}$$

$$\pm\alpha x^2_{яaip} - \beta_i x_{яaip} - \frac{I_a^2}{4Д} = 0, \tag{24}$$

где $\alpha = 1 + \dfrac{(2b_я\omega + c_я)^2}{ДC}$; $\beta_U = \dfrac{\delta_{x01}}{ДC}(2b_я\omega + c_я)^2$; $\beta_i = \dfrac{\delta_{x02}}{ДC}(2b_я\omega + c_я)^2$.

Решение квадратных уравнений (23), (24) следующие (будем как и раньше брать знак "$-$" перед $x^2_{яаUp}$ и $x^2_{яаip}$):

$$x_{яаUp} = \left(-\beta_U \pm \sqrt{\beta_U^2 - \frac{U_a^2\alpha}{\omega^2 L Д}}\right)\frac{1}{2\alpha}, \tag{25}$$

$$x_{яаip} = \left(-\beta_i \pm \sqrt{\beta_i^2 - \frac{I_a^2\alpha}{Д}}\right)\frac{1}{2\alpha}. \tag{26}$$

Выражения (25), (26) включают в себя все параметры и величины системы ЭМВ с РМ. Правда, после подстановки в них значений Д, С, α, β_U, β_I будет видна громоздкость решения. Более простые решения могут быть, если справедливо пренебречь в ЭМВ силами сопротивления, которые образуются трением пружин о воздух. В этом случае $b_я \approx 0$, $b_p \approx 0$ и тогда

$$x_{яаUp} = \frac{\delta_{x01}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_{x01}}{2}\right)^2 - \frac{U_a^2}{4C_1 Z_U \omega^2 L}}, \tag{27}$$

$$x_{яаip} = \frac{\delta_{x02}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_{x02}}{2}\right)^2 - \frac{I_a^2}{4C_1 Z_i}}, \tag{28}$$

где $C_1 = m_я(4\omega^2 - \omega_{0я}^2)$; $Z_U = 1 - \dfrac{C_я}{4\mathrm{C}_1\omega^2 LE}$; $Z_i = 1 - \dfrac{C_я}{4\mathrm{C}_1 E}$; $E = m_p(4\omega^2 - \omega_{0p}^2)$.

$x_{яаUp}$ и $x_{яаip}$ будем учитывать таким образом, чтобы $x_{яаUp} \leqslant \delta_{0x1}$ и $x_{яаip} \leqslant \delta_{0x2}$.

Выражения (25), (26), (27), (28) позволяют определить амплитуды колебаний якоря с учетом параметров реактивной массы.

Таким образом, полученные выражения (11), (12), (18), (19), (25), (26), (27), (28) вносят новизну в анализ динамики ЭМВ и позволяют более точно осуществлять расчет ЭМВ.

1. *Вибрации* в технике. В 6-ти т. / Под ред. Э. Э. Лавенделла. – Москва: Машиностроение, 1981. – Т. 4. – 510 с.
2. *Божко А. Е., Голуб Н. М.* Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 11.12.2006