

1. *Меньшиков В. А.* Круговая трещина в плоскости раздела упругих материалов под действием нормальной гармонической нагрузки // Теорет. и прикл. механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 166–170.
2. *Меньшиков В. А., Меньшиков А. В.* Гранично-контактные интегральные уравнения динамической задачи теории упругости о трещине на поверхности раздела полупространств // Доп. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 51–56.
3. *Меньшиков В. А.* Сингулярные ядра интегральных уравнений в задаче о трещине на границе раздела полупространств при гармоническом нагружении // Там само. – № 11. – С. 58–62.
4. *Гузъ А. Н., Зозуля В. В.* Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. / Под ред. А. Н. Гузья. – Т. 4. Кн. 2. – Киев: Наук. думка, 1993. – 236 с.
5. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
6. *Вайншельбаум В. М., Гольдштейн Р. В.* Осесимметричная задача о трещине на границе раздела слоев в многослойной среде // Механика тв. тела. – 1976. – № 2. – С. 130–143.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 07.06.2007

УДК 539.3

© 2007

С. М. Яремченко

Про розв'язання двовимірних крайових задач статички некругових циліндричних оболонок в уточненій постановці із застосуванням сплайн-функцій

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

The aspects of applications of the spline method and the discrete orthogonalization method to the solution of 2D boundary-value problems on a stress-strain state of noncircular cylindrical shells in a refined formulation are analyzed. The accuracy of solutions is estimated.

З розвитком комп'ютерної техніки все частіше для дослідження фізичних явищ застосовуються сплайн-функції [1]. На першому етапі розвитку основним завданням сплайнів, яке вони успішно виконують і зараз, було наближення кривих і поверхонь. Пізніше через зручність у використанні сплайн-апроксимація все частіше стає однією зі складових частин різних методів розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла, серед таких можна назвати методи скінченних та граничних елементів та метод колокацій [2]. Також розроблено підходи, що дозволяють звести двовимірні крайові задачі до одновимірних, використовуючи апроксимацію сплайнами в одному з координатних напрямків, а в іншому провести чисельне інтегрування. Зокрема, можна відзначити роботи, де проводилися розрахунки напруженого стану [3], а також розв'язувалися задачі про власні коливання [4] пластин і оболонок за допомогою такого підходу.

У даній роботі викладаються основні аспекти застосування методу сплайн-апроксимації разом з методом дискретної ортогоналізації до розв'язання двовимірних задач про напружений стан некругових циліндричних оболонок в уточненій постановці [5] та дається оцінка точності одержаних результатів.

Віднесемо серединну поверхню оболонки до ортогональної системи координат s, θ , де s — довжина твірної, а θ — координата по напрямній циліндра. Нехай γ — координата, нормальна до серединної поверхні оболонки. В цьому випадку перша квадратична форма серединної поверхні має такий вигляд:

$$dS^2 = ds^2 + A_2^2(\theta)d\theta^2 \quad (0 \leq s \leq L, 0 \leq \theta \leq 2\pi, l = L/2). \quad (1)$$

Рівняння поперечного перерізу оболонки запишемо в параметричній формі

$$x = b \cos \theta; \quad z = a \sin \theta, \quad (2)$$

тоді $A_2 = \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}$.

Вибравши за невідомі функції компоненти вектора переміщення серединної поверхні оболонки u, v, w та повні кути повороту ψ_s, ψ_θ , розв'язувальну систему рівнянь у частинних похідних 10-го порядку можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_{11}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \left(\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial C_{66}}{\partial \theta} - \frac{C_{66} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{C_{66}}{A_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{A_2} \frac{C_{66}}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial s} + \\ & + \frac{1}{A_2} \frac{\partial C_{12}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{C_{66} + C_{12}}{A_2} \frac{\partial v}{\partial s \partial \theta} + \frac{\partial C_{12}}{\partial s} k w + C_{12} k \frac{\partial w}{\partial s} + q_s = 0; \\ & \frac{1}{A_2} \frac{\partial C_{12}}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial C_{66}}{\partial s} - k^2 \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{C_{66} + C_{12} - k^2 D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} - k^2 K_2 v + \\ & + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \left(\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial C_{22}}{\partial \theta} - \frac{C_{22} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + \frac{C_{22}}{A_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \\ & + \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial C_{22}}{\partial \theta} k + C_{22} k' \right) w + \frac{k(K_2 + C_{22})}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + \frac{k D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + \\ & + k K_2 \psi_\theta + k \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + k D_{66} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2} + q_\theta = 0; \\ & - k C_{12} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{A_2} \left(k' K_2 + k \frac{\partial K_2}{\partial \theta} \right) v - \frac{k(K_2 + C_{22})}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - k^2 C_{22} w + \frac{\partial K_1}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} + \\ & + K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left(\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial K_2}{\partial \theta} - \frac{K_2 A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{K_2}{A_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial K_1}{\partial s} \psi_s + K_1 \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \\ & + \frac{1}{A_2} \frac{\partial K_2}{\partial \theta} \psi_\theta + \frac{K_2}{A_2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + q_\gamma = 0; \quad (3) \\ & \left(\frac{k D_{66} A_2' - k' D_{66} A_2}{A_2^3} - \frac{k}{A_2^2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{k D_{66}}{A_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{k D_{12}}{A_2} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} - \\ & - k^2 \frac{\partial D_{12}}{\partial s} w - (k^2 D_{12} + K_1) \frac{\partial w}{\partial s} - K_1 \psi_s + \frac{\partial D_{11}}{\partial s} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} + \\ & + \left(\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \theta} - \frac{D_{66} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + \frac{D_{66}}{A_2^2} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \theta^2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial s} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \\ & + \frac{D_{12} + D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s \partial \theta} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{k D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + k K_2 v + \left(\frac{k D_{22} A_2' - k' D_{22} A_2}{A_2^3} - \frac{k}{A_2^2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} - \\
& - \frac{k D_{22}}{A_2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{k}{A_2} \left(2k' D_{22} + k \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta} \right) w - \frac{k^2 D_{22} + K_2}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \\
& + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + \frac{D_{12} + D_{66}}{A_2} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} - K_2 \psi_\theta + \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2} + \\
& + \left(\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta} - \frac{D_{22} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{D_{22}}{A_2^2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} = 0,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{E_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta}, & C_{12} &= \nu_\theta C_{11}, & C_{22} &= \frac{E_\theta h}{1 - \nu_s \nu_\theta}, & C_{66} &= G_{s\theta} h, \\
D_{11} &= \frac{E_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}, & D_{12} &= \nu_\theta D_{11}, & D_{22} &= \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}, \\
D_{66} &= \frac{G_{s\theta} h^3}{12}, & K_1 &= \frac{5}{6} h G_{s\gamma}, & K_2 &= \frac{5}{6} h G_{\theta\gamma},
\end{aligned} \tag{4}$$

k — кривина поперечного перерізу серединної поверхні; q_s, q_θ, q_γ — компоненти вектора навантаження. В (4) $E_s, E_\theta, \nu_s, \nu_\theta$ — модулі пружності і коефіцієнти Пуассона в напрямках твірної і напрямної; $G_{s\theta}, G_{s\gamma}, G_{\theta\gamma}$ — модулі зсуву; $h = h(s, \theta)$ — товщина оболонки.

Нехай торці оболонки жорстко закріплені, тоді на контурах $s = 0$ та $s = L$ задаються такі умови:

$$u = v = w = \psi_s = \psi_\theta = 0. \tag{5}$$

Якщо поперечний переріз оболонки має симетрію, то у відповідних двох точках $\theta = \text{const}$ виконуються умови

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} = \psi_\theta = 0. \tag{6}$$

Якщо ж геометрія оболонки більш складна, то потрібно скористатися умовами періодичності [5].

Система рівнянь (3) разом з граничними умовами (5), (6) утворюють двовимірну крайову задачу.

Двовимірну крайову задачу зведемо до одновимірної за допомогою методу сплайн-апроксимації. Розв'язувальні функції наведемо у вигляді

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(s); & v &= \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{1i}(s); & w &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{1i}(s); \\
\psi_s &= \sum_{i=0}^N \psi_{si}(\theta) \varphi_{1i}(s); & \psi_\theta &= \sum_{i=0}^N \psi_{\theta i}(\theta) \varphi_{1i}(s),
\end{aligned} \tag{7}$$

якщо сплайн-апроксимація проводиться у напрямку твірної, або

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^N u_i(s)\varphi_{2i}(\theta); & v &= \sum_{i=0}^N v_i(s)\varphi_{1i}(\theta); & w &= \sum_{i=0}^N w_i(s)\varphi_{2i}(\theta); \\ \psi_s &= \sum_{i=0}^N \psi_{si}(s)\varphi_{2i}(\theta); & \psi_\theta &= \sum_{i=0}^N \psi_{\theta i}(s)\varphi_{1i}(\theta), \end{aligned} \quad (8)$$

якщо сплайн-апроксимація проводиться у напрямку напрямної.

У рівняннях (7), (8) $u_i, v_i, w_i, \psi_{si}, \psi_{\theta i}$ — невідомі функції, а φ_{1i} і φ_{2i} — лінійні комбінації В-сплайнів третього степеня на рівномірній сітці, що задовольняють граничні умови (5) і (6) [3].

Наприклад, у випадку, коли сплайн-апроксимація проводиться вздовж напрямної, вирази (8) підставляються у розв'язувальну систему (3) і граничні умови (5). При цьому граничні умови (6) задовольняються за рахунок вибору функцій φ_{1i} і φ_{2i} на сітці $\theta_{-3} < \theta_{-2} < \dots < \theta_k < \dots < \theta_{N+2} < \theta_{N+3}$, $\Delta\theta = \theta_k - \theta_{k-1} = \text{const}$. Далі вимагаємо, щоб отримана система і граничні умови точно виконувались в $N + 1$ точці колокації ξ_i , які вибираються так: $\xi_{2j} = \theta_{2j} + (1/2 - \sqrt{3}/6)\Delta\theta$, $\xi_{2j+1} = \theta_{2j} + (1/2 + \sqrt{3}/6)\Delta\theta$ ($j = 0, (N-1)/2$). Як результат одержимо одновимірну крайову задачу, яку можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}}{ds} &= A\bar{N} + \bar{f}; \\ B_1\bar{N} &= \bar{b}_1 \quad (s = 0), \quad B_2\bar{N} = \bar{b}_2 \quad (s = L), \end{aligned} \quad (9)$$

де $\bar{N} = \{u_0, \dots, u_N, u'_0, \dots, u'_N, v_0, \dots, v_N, v'_0, \dots, v'_N, w_0, \dots, w_N, w'_0, \dots, w'_N, \psi_{s0}, \dots, \psi_{sN}, \psi'_{s0}, \dots, \psi'_{sN}, \psi_{\theta 0}, \dots, \psi_{\theta N}, \psi'_{\theta 0}, \dots, \psi'_{\theta N}\}^T$ — вектор-функція від s ; \bar{f} — вектор правих частин; A — квадратна матриця, елементи якої залежать від s ; B_1 та B_2 — матриці граничних умов, \bar{b}_1 і \bar{b}_2 — відповідні вектори. Отримана одновимірна крайова задача (9) розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [3].

Аналогічні перетворення виконуються і при апроксимації сплайнами в напрямку твірної.

На основі викладеного підходу проведемо розв'язання задач статки некругових циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом. Спочатку дослідимо замкнену ізотропну оболонку сталі товщини, півосі поперечного перерізу якої $a = 12,5$; $b = 8$, модуль Юнга E_0 , коефіцієнт Пуасона $\nu = 0,3$. Довжина оболонки $L = 30$, товщина $h = 1$, а торці жорстко закріплені, тобто на контурах $s = 0$ та $s = L$ виконуються умови (5). Оскільки в даному випадку товщина вздовж напрямної не змінюється, то при $\theta = 0$ і $\theta = \pi/2$ будуть мати місце умови симетрії (6). На оболонку діє рівномірно розподілене навантаження $q_\gamma = q_0$.

Задача розв'язувалася при апроксимації сплайнами вздовж як твірної, так і напрямної. В табл. 1 показано, як змінюються значення одержаних прогинів w в серединному перерізі $s = L/2$ залежно від напрямку сплайн-апроксимації і кількості точок колокації. Як видно з таблиці, при апроксимації вздовж твірної одержане значення максимального прогину, що спостерігаються при $\theta = 0$, вже при 10 точках колокації ($N = 9$) в чотирьох значущих цифрах збігається зі значенням прогину, отриманого при 20 точках колокації. Уточнення розв'язку зі збільшенням точок колокації можна спостерігати в точці $\theta = \pi/2$, де мають місце прогини, протилежні напрямку дії сили. Проте різниця між прогинами, одержаними при $N = 9$ і $N = 19$, становить менше 1%.

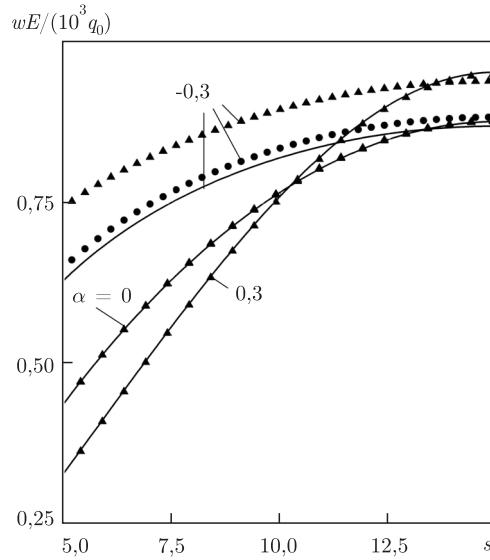


Рис. 1. Розподіл прогинів вздовж твірної при $\theta = 0$

Різниця у значеннях, одержаних для різної кількості точок колокації при апроксимації вздовж напрямної, більш помітна. Але для максимальних прогинів результати, отримані при 20 і 10 точках колокації, відрізняються менш ніж на 2%. Також варто відзначити, що вже при $N = 19$ наведені значення прогинів майже збігаються для обох напрямків апроксимації.

Як видно з табл. 1, для оболонки сталої товщини апроксимація сплайнами вздовж твірної дає більш точні результати при меншій кількості точок колокації. Це можна пояснити тим, що в даному випадку коефіцієнти розв'язувальної системи рівнянь (3) залежать тільки від змінної θ .

Також було розв'язано задачу про напружено-деформований стан трансверсально-ізотропної оболонки змінної вздовж твірної товщини, виготовленої зі склопластику, що має такі пружні характеристики: $E_s = E$, $E_\theta = 4,07E$, $\nu_\theta = 0,277$, $G_{s\theta} = G_{\theta\gamma} = 0,407E$, $G_{s\gamma} = 0,357E$ [6]. У цьому випадку площиною ізотропії є площина $s\gamma$, тобто волокна композиту направлені вздовж напрямної циліндра. Товщина оболонки змінюється за законом $h = 1 + \alpha[3(s/l - 1)^2 - 1]$, і вага оболонки не залежить від параметра α . Всі інші характеристики такі ж, як і в попередній задачі.

На рис. 1, 2 показано розподіл прогину w вздовж твірної при $\theta = 0$ та напружень σ_θ в серединній площині оболонки вздовж напрямної при $s = L/2$ залежно від параметра α . Для

Таблиця 1. Порівняння результатів, одержаних при різній кількості точок колокації залежно від напрямку апроксимації

Напрямок апроксимації	θ	wE_0/q_0					
		N					
		9	11	13	15	17	19
Вздовж твірної	0	1226	1225	1224	1225	1225	1226
	$\pi/2$	-559,8	-560,6	-561,4	-562,1	-562,6	-563,0
Вздовж напрямної	0	1203	1213	1218	1221	1223	1224
	$\pi/2$	-546,8	-554,7	-558,5	-560,5	-561,6	-562,3

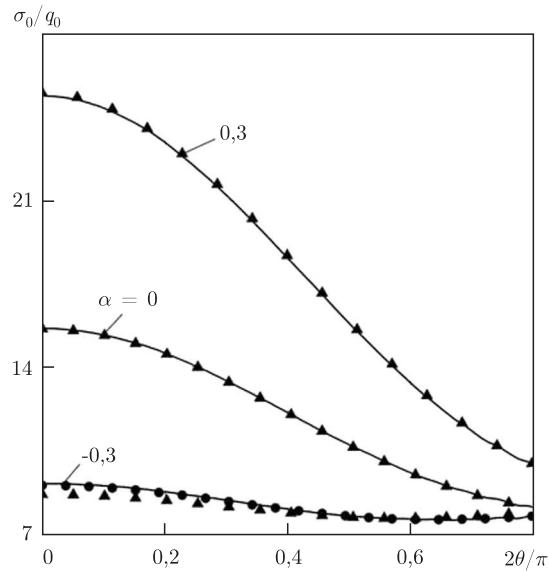


Рис. 2. Розподіл напружень σ_θ вздовж напрямної при $s = L/2$

контролю точності наведено результати розв'язання задач, коли апроксимація сплайнами проводилася вздовж напрямної циліндра при $N = 19$ (суцільна лінія) та коли апроксимація проводилася вздовж твірної при $N = 19$ (трикутники), $N = 39$ (кружки). Для $\alpha = 0$ та $\alpha = 0,3$, як видно з рис. 1, значення як прогинів, так і напружень збігаються при $N = 19$ для різних напрямків апроксимації (тому результати для $N = 39$ не наведено), а коли $\alpha = -0,3$, відмінності між значеннями прогинів, одержаними при різних напрямках апроксимації при $N = 19$, більш помітні. Зі збільшенням точок колокації вздовж твірної до 40 точність результатів зростає. Схожу залежність розв'язку від кількості точок колокації та від напрямку апроксимації можна спостерігати і для напружень (див. рис. 2). Але різниця у значеннях напружень, отриманих при апроксимації вздовж напрямної при $N = 19$ і $N = 39$ для $\alpha = -0,3$, не така значна, як для прогинів.

Таким чином, оскільки коефіцієнти системи рівнянь (3) в цьому випадку залежать від s і θ , то більш точними при меншій кількості точок колокації є результати, отримані при інтегруванні за змінною s . Отже, якщо характеристики оболонки значно змінюються, доцільно застосовувати метод сплайн-колокації в обох напрямках для контролю точності результату.

1. Алберг Дж., Нильсен Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – Москва: Мир, 1972. – 320 с.
2. Завьялов Ю. С., Квасов Ю. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
3. Григоренко Я. М., Шевченко Ю. Н., Василенко А. Т. и др. Численные методы. – Киев: «А. С. К. », 2002. – 448 с. – (Механика композитов: В 12-ти т. Т. 11).
4. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Исследование свободных колебаний прямоугольных пластин переменной толщины в уточненной постановке // Доп. НАН України. – 2006. – № 8. – С. 39–46.
5. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
6. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 26.04.2007