ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 517.58/.5892

Н. О. Вірченко, О. М. Лисецька

Про узагальнену конфлюентну гіпергеометричну функцію $\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z)$

(Представлено академіком НАН України О. С. Парасюком)

The (τ,β) — generalized confluent hypergeometric function $\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z)$ is introduced. Some properties of this function and its applications are given.

При розв'язанні різноманітних задач математичної фізики, аеромеханіки, астрофізики, квантової механіки, астрономії, теорії дифракції, теорії імовірностей та математичної статистики, біомедицини та ін. виникають спеціальні функції різної природи та складності. У зв'язку з широкими потребами практичного застосування спеціальних функцій інтерес до теорії спеціальних функцій значно посилився за останнє півстоліття [1–5]. Із практики розв'язання конкретних задач набувають вагомості питання про зображення функцій не тільки у вигляді тригонометричних рядів, але й у вигляді рядів за іншими спеціальними функціями. Ці питання особливо стимулювали розвиток теорії спеціальних функцій (гіпергеометричних, еліптичних, функцій Матьє, поліномів Ерміта, Кравчука, Лежандра, Лагерра, Якобі та ін.).

Відзначимо, що саме гіпергеометричні функції відіграють особливо велику роль. Відомо [1], що багато з вищих трансцендентних функцій (функції Бесселя, Лежандра, Лагерра тощо) є окремими випадками гіпергеометричної функції. Гіпергеометричні функції узагальнюються на випадок двох чи багатьох змінних, запроваджуються параметри p і q, розглядаються різні випадки вироджених (конфлюентних) гіпергеометричних функцій. Так, Бухгольц будує теорію конфлюентних гіпергеометричних функцій на базі функцій Віттекера; Трікомі бере за основу функції Куммера, а Слейтер [6] об'єднує обидва підходи. Посилюється увага до узагальнення гіпергеометричних функцій за Райтом [7, 8], досліджуються окремі випадки, що мають не тільки теоретичне, а й практичне значення. Особливо цінними для практики виявились конфлюентні гіпергеометричні функції [1]. У [9] вивчалась функція ${}_1\Phi_1^{\tau}(a;c;z)$, в [10] — функція ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$.

1. Розглянемо узагальнену (за Райтом) конфлюентну гіпергеометричну функцію Трікомі у вигляді

$$\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int\limits_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{c-a-1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a,\beta) \\ (a,\tau) \end{matrix} \middle| -zt^\tau \right] dt, \tag{1}$$

де $\operatorname{Re} a > 0$, τ, $\beta \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\tau - \beta < 1$; a, $c \in \mathbf{C}$, $\Gamma(a)$ — класична гамма-функція, ${}_1\Psi_1$ — функція Фокса–Райта [1]. При $\beta = \tau = 1$ маємо класичну конфлюентну гіпергеометричну функцію $\Psi(a;c;z)$ [1], при $\beta = \tau$ матимемо τ-узагальнену функцію $\Psi^\tau(a;c;z)$:

$$\Psi^\tau(a;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int\limits_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{c-a-1} e^{-zt^\tau} dt. \tag{2}$$

Розглянемо основні властивості (τ,β)-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції $\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z)$, подамо деякі її застосування.

Теорема 1 (про зображення функції $\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z)$ рядом). *Якщо виконуються умови $\operatorname{Re} a > \operatorname{Re}(c-1) > 0$, τ, $\beta \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\tau - \beta < 1$, a, $c \in \mathbf{C}$, то справедлива формула*

$$\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)} \sum_{n=0}^\infty \Gamma(a+n\beta)\Gamma(1-c-n\tau) \frac{(-1)^n}{n!} z^n. \tag{3}$$

Доведення. Використовуючи зображення функції Фокса–Райта [3], умови існування інтеграла (1), можливість перестановки операцій інтегрування та підсумовування, виконаємо перетворення

$$\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a+n\beta)}{(a+n\tau)} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \int\limits_0^1 \left(\frac{u}{1-u}\right)^{a-1} \left(\frac{1}{1-u}\right)^{c-a-1} \left(\frac{u}{1-u}\right)^{n\tau} \frac{du}{(1-u)^2} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a+n\beta)}{\Gamma(a+n\tau)} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \int\limits_0^1 u^{a+n\tau-1}(1-u)^{1-c-n\tau-1} du =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a+n\beta)}{\Gamma(a+n\tau)} \frac{(-1)^n}{n!} z^n B(a+n\tau, 1-c-n\tau),$$

де $B(a+n\tau, 1-c-n\tau)$ — бета-функція [1]. Отже, формула (3) доведена.

Зауважимо, що $\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z)$ можна подати і у вигляді

$$\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int\limits_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{c-a-1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1-c,-\tau) \\ (1-c,-\beta) \end{matrix} \middle| -zt^\beta \right] dt. \tag{4}$$

Лема 1 (основні диференціальні співвідношення для $\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z)$). *При виконанні умов існування (τ,β)-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції $\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z)$ справедливі такі диференціальні співвідношення:*

$$\frac{d}{dz}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z) = -\frac{\Gamma(a+\beta)\Gamma(a+\beta-c-\tau+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)} \Psi^{\tau,\beta}(a+\beta;c+\tau;z), \tag{5}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z) = (-1)^n \frac{\Gamma(a+n\beta)\Gamma(a+n\beta-c-n\tau+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}\Psi^{\tau,\beta}(a+n\beta;c+n\tau;z), \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dz}(z^a\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z^\beta)) = a(a-c+1)z^{a-1}\Psi^{\tau,\beta}(a+1;c;z^\beta), \qquad (7)$$

$$\frac{d}{dz}(z^{1-c}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z^{-\tau})) = (a-c+1)z^{-c}\Psi^{\tau,\beta}(a;c-1;z^{-\tau}). \qquad (8)$$

Лема 2 (основні інтегральні співвідношення для $\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z)$). *При виконанні умов існування (τ,β)-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції $\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z)$ справедливі такі інтегральні співвідношення:*

$$\int\limits_0^z t^{a-2}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;t^\beta)\,dt = \frac{z^{a-1}}{(a-1)(a-c)}\Psi^{\tau,\beta}(a-1;c;z^\beta), \qquad a>1, \qquad a\neq c, \qquad (9)$$

$$\int\limits_0^z t^{-c-1}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;t^{-\tau})\,dt = \frac{z^{-c}}{(a-c)}\Psi^{\tau,\beta}(a;c+1;z^{-\tau}), \qquad a\neq c, \qquad (10)$$

$$\int\limits_z^\infty (t-z)^{\tau-1}t^{c-\tau-1}\Psi^{\tau,\beta}(a;c-\tau;t^\tau)\,dt = B(\tau,a-c+1)z^{c-1}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z^\tau), \qquad (11)$$

$$\int\limits_0^1 (1-t)^{a+c-1}t^{-c-1}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z^{\tau+\beta}(1-t)^\beta)\,dt = \frac{\Gamma(-c)\Gamma(a+c)}{\Gamma(a-c+1)}\Psi^{\tau,\beta}(a+c;c;z^{\tau+\beta}), \qquad (12)$$

$$c<0, \qquad a>1-c,$$

$$\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-a-c}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z^{\tau+\beta}(1-t)^{-\tau})\,dt = B(a,1-c)\Psi^{\tau,\beta}(a;a+c;z^{\tau+\beta}), \qquad (13)$$

$$\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1}t^{a-\alpha-1}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;t^\beta)\,dt =$$

$$= \frac{z^{a-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(a-\alpha)\Gamma(a-\alpha-c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}\Psi^{\tau,\beta}(a-\alpha;c;z^\beta), \quad a>\alpha>0; \quad a>1-c, \qquad (14)$$

$$\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1}t^{-c-\alpha}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;t^{-\tau})\,dt = B(a-c-\alpha+1,\alpha)z^{-c}\Psi^{\tau,\beta}(a;c+\alpha;z^{-\tau}). \qquad (15)$$

Доведення лем легко випливає з означення функції $\Psi^{\tau,\beta}$ (формула (1)), теореми 1, законності перестановки операцій інтегрування і підсумовування, деяких простих перетворень. Наприклад, доведемо (14).

$$\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1}t^{a-\alpha-1}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;t^\beta)\,dt = \int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1}t^{a-\alpha-1}\times$$

$$\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n\beta)\Gamma(1-c-n\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)} \frac{(-1)^n}{n!} t^{\beta n}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+n\beta)\Gamma(1-c-n\tau) \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(a-\alpha+n\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(a+n\beta)} z^{a+n\beta-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(a-\alpha)\Gamma(a-\alpha-c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)} z^{a-1} \Psi^{\tau,\beta}(a-\alpha; c; z^{\beta}).$$

Лема 3 (про деякі функціональні співвідношення.) *При умовах існування (τ, β)-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції $\Psi^{\tau,\beta}(a; c; z)$ справедливі такі співвідношення:*

$$\Psi^{\tau,\beta}(a; c; \lambda x) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+n\beta)\Gamma(a+n\beta-c-n\tau+1)(1-\lambda)^n \frac{x^n}{n!} \times$$
$$\times \Psi^{\tau,\beta}(a+n\beta; c+n\tau; x), \tag{16}$$

$$\Psi^{\tau,\beta}(a; c; x+y) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+n\beta)\Gamma(a+n\beta-c-n\tau+1) \frac{(-1)^n}{n!} y^n \times$$
$$\times \Psi^{\tau,\beta}(a+n\beta; c+n\tau; x), \tag{17}$$

$$\Gamma(a+1)\Gamma(a-c+2)\Psi^{\tau,\beta}(a+1; c; z) - \Gamma(a+1)\Gamma(a-c+1)\Psi^{\tau,\beta}(a; c; z) =$$
$$= z\beta\Gamma(a+\beta)\Gamma(a+\beta-c-\tau+1)\Psi^{\tau,\beta}(a+\beta; c+\tau; z). \tag{18}$$

Зауважимо, що співвідношення (16) і (17) можна назвати відповідно теоремою множення і теоремою додавання для випадку функції $\Psi^{\tau,\beta}(a; c; x)$. При $\beta = \tau = 1$ матимемо відповідні формули для класичної функції $\Psi(a; c; x)$ [1].

Доведення формул (16), (17) здійснюється легко, якщо врахувати означення функції $\Psi^{\tau,\beta}(a; c; x)$ (1), теорему 1, відповідні формули диференціювання.

Справедливість формули (18) перевіряємо, прирівнюючи коефіцієнти при z^n у лівій та правій частинах (18).

2. Розглянемо деякі застосування функції $\Psi^{\tau,\beta}(a; c; z)$, зокрема, до узагальнення Г-функції, функції Лагерра.

У [9, 11] було запроваджено τ-узагальнену Г-функцію, в [10] — узагальнену ζ-функцію за допомогою функції $\Psi^{\tau,\beta}(a; c; z)$.

Запровадимо (τ, β)-узагальнену Г-функцію за допомогою $\Psi^{\tau,\beta}(a; c; z)$ у такій формі:

$$^{\tau,\beta}\Gamma_a^c(\alpha; \gamma; \omega; b) \equiv \widetilde{\Gamma}(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t^{\omega}} \Psi^{\tau,\beta}(a; c; -bt^{-\gamma})\, dt, \tag{19}$$

де $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, τ, $\beta \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\tau - \beta < 1$, $b > 0$, $\gamma \geqslant 1$, $\omega > 0$, $\Psi^{\tau,\beta}$ — функція (1).

Зображення функції $^{\tau,\beta}\Gamma_a^c(\alpha; \gamma; \omega; b)$ рядом матиме вигляд

$$^{\tau,\beta}\Gamma_a^c(\alpha; \gamma; \omega; b) = \frac{1}{\omega\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+n\beta)\Gamma(1-c-n\tau) \frac{(-b)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{\alpha-\gamma n}{\omega}\right). \tag{20}$$

Для ${}^{\tau,\beta}\Gamma_a^c$ — функції справедлива

Теорема 2. *При умовах існування функції* ${}^{\tau,\beta}\Gamma_a^c(\alpha;\gamma;\omega;b)$ *та* $\alpha > \gamma$ *справедливе таке рекурентне співвідношення для функції* $\widetilde{\Gamma}(\alpha) = {}^{\tau,\beta}\Gamma_a^c(\alpha;\gamma;\omega;b)$*:*

$$\widetilde{\Gamma}(\alpha) = \frac{\omega}{\alpha}\widetilde{\Gamma}(\alpha+\omega) + \frac{Ab\gamma}{\alpha}\widetilde{\Gamma}^{c+\tau}_{\alpha+\beta}(\alpha-\gamma), \tag{21}$$

де

$$A = \frac{\Gamma(a+\beta)\Gamma(a+\beta-c-\tau+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}.$$

Доведення. Застосувавши перетворення Мелліна

$$M\{f(t);\alpha\}$$

до функції

$$f(t) = e^{-t^{\omega}}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;-bt^{-\gamma})$$

та її похідної, одержимо (21).

(τ,β)-узагальнену функцію Лагерра можна запровадити у такій формі:

$$_{\tau,\beta}L_{\nu}^{\alpha}(z) = \frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int\limits_0^1 t^{-\nu-1}(1-t)^{\alpha+\nu}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(\alpha+1,\tau)\\(\alpha+1,\beta)\end{matrix}\middle| zt^{\tau}\right]dt, \tag{22}$$

де $\operatorname{Re}\alpha \geqslant -1$, $\operatorname{Re}(\alpha+\nu) > -1/\alpha$, ν — неціле, τ, $\beta \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\beta > 0$, ${}_1\Psi_1$ — функція Фокса–Райта. Частинний випадок цієї функції див. у [12]. Подамо ще кілька ілюстративних прикладів на застосування функції $\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z)$.

Перетворення Лапласа:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}t^{a-1}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;t^{\gamma})\,dt = \frac{H^{3,1}_{1,3}\left[\begin{matrix}(1,1)\\(a,\beta),(1-c,-\tau),(a,\gamma)\end{matrix}\middle| p^{\gamma}\right]}{p^a\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)},$$

де $H^{3,1}_{1,3}[\ldots]$ — функція Фокса [3];

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-st}t^{c-1}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;-t^{\tau})\,dt = {}_1F_0^{\beta}(a;(-s)^{-\tau})\Gamma^{-1}(a-c+1)(-s)^{-c},$$

де ${}_1F_0^{\beta}$ — узагальнена (за Райтом) вироджена гіпергеометрична функція [3].

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – Москва: Наука, 1965. – 296 с.
2. *Aomoto K.* Hypergeometric functions: the past, today and … // Sugaku Expositions. – 1996. – **9**. – P. 99–116.
3. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-Transforms. – London: Chapman and Hall, 2004. – 390 p.
4. *Chaudhry M. A., Zubair S. M.* On a class of incomplete gamma functions with applications. – Chapman and Gall/CRC, 2000. – 494 p.

5. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимация. – Москва: Мир, 1980. – 608 с.
6. *Slater L.* Confluent hypergeometric functions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960. – 287 p.
7. *Wright E. M.* On the coeffllicient of power series having exponential singularities // J. Lond. Math. Soc. – 1938. – **8**. – P. 71–79.
8. *Wright E. M.* On asymptotic expansions of generalized Bessel function // Proc. Lond. Math. Soc. – 1935. – **38**. – P. 257–270.
9. *Virchenko N. O.* On some generalizations of the functions of hypergeometric type // Fractional Calculus and Appl. Anal. – 1999. – **2**, No 3. – P. 233–244.
10. *Вірченко Н. О.* Узагальнені спеціальні функції та їх застосування // "Наук. вісті" НТУУ "КПІ". – 2006. – № 4(48). – С. 42–49.
11. *Virchenko N. O., Kalla S. L., Zamel F. Fl.* Some results on a generalized hypergeometric function // Integral transforms and special function. – 2001. – **12**, No 1. – P. 89–100.
12. *Virchenko N.* On a generalized Laguerre's function and its applications // Fractional Calculus and Appl. Anal. – 1999. – **2**, No 4. – P. 529–536.

НТУ України "Київський політехнічний інститут" *Надійшло до редакції 15.03.2007*

УДК 512.544

М. Р. Діксон, Л. А. Курдаченко, М. В. Поляков

Локально узагальнено радикальні групи з обмеженнями на деякі ранги

(Представлено академіком НАН України В. В. Пилипенком)

A group G is said to be generalized radical if G has an ascending series of normal subroups whose factors are locally nilpotent or locally finite. Classes of locally generalized radical groups with finite Hirsch–Zajcev rank have been studied, and the relation of Hirsch–Zajcev rank to the other ranks is given.

Група G має *скінченний спеціальний ранг* $\mathbf{r}(G) = \mathbf{r}$, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа може бути породжена не більше ніж $\mathbf{r}$ елементами і $\mathbf{r}$ є найменшим числом з цією властивістю. Це поняття було введено для довільних груп А. І. Мальцевим [1], а для абелевих груп — Х. Прюфером. Тому цей ранг називають також *рангом Мальцева–Прюфера.* Вивчення груп скінченного спеціального рангу, а також інших рангів групи (вони також будуть розглядатись у цій роботі) є важливою частиною теорії нескінченних груп. Одними з найбільш загальних результатів для радикальних груп є результати Р. Бера та Г. Хайнекена [2], які довели, наприклад, що радикальна група, усі абелеві підгрупи якої мають скінченний спеціальний ранг, сама має скінченний спеціальний ранг. Приклад, що був побудований Ю. І. Мерзляковим [3] свідчить про те, що цей результат не може бути розширений на довільні локально розв'язні групи. Разом з тим Ю. І. Мерзляков довів [4], що якщо спеціальні ранги абелевих підгруп локально розв'язної групи обмежені в сукупності, то сама група має скінченний спеціальний ранг.

Будемо говорити, що група G має *скінченний ранг Хірша–Зайцева* $\mathbf{r}_{hz}(G) = r$, якщо G має субнормальну систему, цілком впорядковану за зростанням, в якій точно r факторів