УДК 517.5

В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов

Слабо плоские границы в метрических пространствах

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины П. М. Тамразовым)

It has been shown that the domains with the so-called weakly flat boundaries are locally pathwise connected at the boundary points. On this base, the far-reaching generalization and strengthening of the well-known Gehring–Martio theorem (1985) on a homeomorphic extension to the boundary of quasiconformal mappings between quasiextremal distance domains in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, are obtained. The domains with weakly flat boundaries form a new widest type of domains, vast classes of topological mappings between which admit a homeomorphic extension to the boundary.

Работа посвящена изучению топологии границ областей и исследованию на этой основе граничного поведения конформных и квазиконформных отображений и их обобщений в метрических пространствах с мерами. Основным геометрическим методом в квазиконформной теории является метод модулей, который с успехом работает и в метрических пространствах. Особое значение в современной теории отображений приобретают модули с весом, которые были введены П. М. Тамразовым в [1] (см. также [2]).

Следующая концепция была предложена профессором Олли Мартио (см., напр., [3] и [4, 5]). Пусть G и G' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $Q\colon G \to [1, \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ называется Q-гомеоморфизмом, если

$$M(f\Gamma) \leqslant \int\limits_G Q(x) \cdot \rho^n(x)\, dm(x) \tag{1}$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ρ семейства Γ. Эта концепция является естественным обобщением геометрического определения квазиконформного отображения по Вяйсяля [6, см. 13.1, 34.6]. Инфимум по всем допустимым ρ выражения справа в (1) называется модулем Γ с весом Q.

Напомним, что борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется допустимой для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds \geqslant 1 \tag{2}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Модуль семейства кривых Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_G \rho^n(x)\, dm(x), \tag{3}$$

где m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Проблема локального и граничного поведения Q-гомеоморфизмов изучалась в $\mathbb{R}^n$ в случае $Q \in BMO$ (ограниченного среднего колебания) в работах [3–7], а в случае $Q \in FMO$ (конечного среднего колебания) и в других случаях — в работах [4, 5].

В дальнейшем (X, d, μ) обозначает пространство X с метрикой d и локально конечной борелевой мерой μ. Областью в X будем называть открытое множество, любые две точки которого можно связать непрерывной кривой. Пусть G и G' — области с конечными хаусдорфовыми размерностями α и $\alpha' \geqslant 1$ в пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') и пусть $Q\colon G \to [0, \infty]$ — измеримая функция.

Гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ будем называть Q-гомеоморфизмом, если

$$M(f\Gamma) \leqslant \int\limits_G Q(x) \cdot \rho^\alpha(x)\, d\mu(x) \tag{4}$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ρ для Γ.

Модуль семейства кривых Γ в пространстве (X, d, μ) задаем равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_G \rho^\alpha(x)\, d\mu(x), \tag{5}$$

где допустимые функции для Γ, по-прежнему, определяются условием вида (2). В случае пространства (X', d', μ') в (5) берем хаусдорфову размерность $\alpha' \in [1, \infty)$ области G'.

Напомним также, что пространство (X, d, μ) называется α-регулярным по Альфорсу, если существует постоянная $C \geqslant 1$ такая, что

$$C^{-1} r^\alpha \leqslant \mu(B_r) \leqslant C r^\alpha \tag{6}$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r < \operatorname{diam} X$. Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α (см., напр., [8, с. 61]).

Будем говорить, что пространство (X, d, μ) — α-регулярно сверху в точке $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \leqslant C r^\alpha \tag{7}$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Будем также говорить, что пространство (X, d, μ) — α-регулярно сверху, если условие (7) выполнено в каждой точке.

Топологическое пространство называется связным, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества. Компактные связные пространства называются континуумами. Топологическое пространство T будем называть линейно связным, если любые две точки x_1 и x_2 можно соединить непрерывным путем $\gamma\colon [0, 1] \to T$, $\gamma(0) = x_1$ и $\gamma(1) = x_2$. Областью в T будем называть открытое линейно связное множество (см. [9]). Говорим, что область G локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial G$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \bigcap G$ линейно связно. Если A, B и C — множества в T, то $\Delta(A, B, C)$ обозначает множество всех кривых γ, которые соединяют A и B в C.

1. Слабо плоские границы. Здесь G — область конечной хаусдорфовой размерности $\alpha \geqslant 1$ в пространстве (X, d, μ) с метрикой d и локально конечной борелевской мерой μ.

Приведенные ниже определения сильной достижимости и слабой плоскости в точках границы сформулированы в терминах модулей и являются обобщением соответствующих понятий, введенных в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ (см. [3], ср. их также со свойствами P_1 и P_2 по Вяйсяля в [6] и квазиконформной достижимостью и плоскостью по Някки в [10]).

Будем говорить, что граница области G сильно достижима в точке $x_0 \in \partial G$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется компакт $E \subset G$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; G)) \geqslant \delta$$

для любого континуума F в G, пересекающего ∂U и ∂V.

Будем также говорить, что граница ∂G слабо плоская в точке $x_0 \in \partial G$, если для любого числа $P > 0$ и окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; G)) \geqslant P \tag{8}$$

для любых континуумов E и F, пересекающих ∂U и ∂V.

Граница ∂G называется сильно достижимой и слабо плоской, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы.

Предложение 1. *Если ∂G слабо плоская в точке $x_0 \in \partial G$, то ∂G сильно достижима из G в точке x_0.*

Лемма 1. *Если ∂G слабо плоская в точке $x_0 \in \partial G$, то G локально линейно связна в x_0.*

Следствие 1. *Области со слабо плоскими границами в пространствах (X, d, μ) локально линейно связны во всех граничных точках.*

2. О конечном среднем колебании относительно меры. Пусть G — область в пространстве (X, d, μ). Аналогично [4] (ср. также [11]), будем говорить, что функция $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in \overline{G}$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| d\mu(x) < \infty, \tag{9}$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) d\mu(x) = \frac{1}{\mu(G(x_0,\varepsilon))} \int_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, d\mu(x) \quad —$$

среднее значение функции $\varphi(x)$ по $G(x_0, \varepsilon) = \{x \in G\colon d(x, x_0) < \varepsilon\}$ относительно меры μ. Здесь условие (9) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры μ в окрестности точки x_0.

Предложение 2. *Если для некоторого набора чисел $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon| d\mu(x) < \infty, \tag{10}$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

Следствие 2. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)| d\mu(x) < \infty, \tag{11}$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

Варианты следующей леммы были сначала доказаны для BMO функций и внутренних точек области G в $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$ и $n \geqslant 3$ соответственно в [7] и [3], а затем для граничных точек G в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с условием удвоения меры и FMO функций — в [4].

Лемма 2. *Пусть G — область в пространстве (X, d, μ) α-регулярном сверху с $\alpha \geqslant 2$ в точке $x_0 \in \overline{G}$ и*

$$\mu(G \bigcap B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma \cdot \log^{\alpha-2}\frac{1}{r} \cdot \mu(G \bigcap B(x_0, r)), \qquad \forall r \in (0, r_0). \tag{12}$$

Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ класса $FMO(x_0)$

$$\int\limits_{G\cap A(\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)d\mu(x)}{\left(d(x,x_0)\log\dfrac{1}{d(x,x_0)}\right)^{\alpha}} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{13}$$

при $\varepsilon \to 0$ и некотором $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, где $\delta_0 = \min(e^{-e}, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x\in G} d(x, x_0)$,

$$A(\varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in X\colon \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}.$$

Отметим, что условие (12) слабее условия удвоения меры

$$\mu(G \bigcap B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma \cdot \mu(G \bigcap B(x_0, r)), \qquad \forall r \in (0, r_0), \tag{14}$$

которое использовалось ранее в контексте $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ в работе [4].

3. О непрерывном продолжении на границу. В дальнейшем (X, d, μ) и (X', d', μ') — пространства с метриками d и d' и локально конечными борелевскими мерами μ и μ', а G и G' — области конечной хаусдорфовой размерности α и $\alpha' \geqslant 1$ в (X, d) и (X', d') соответственно.

Теорема 1. *Пусть G — локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial G$, $\overline{G'}$ — компакт и $\partial G'$ сильно достижима. Если измеримая функция $Q\colon G \to [0, \infty]$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^{\alpha}\right) \tag{15}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $G(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in G\colon \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$, для $\varepsilon_0 < d(x_0) = \sup\limits_{x\in G} d(x, x_0)$, то любой Q-гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Следствие 3. *В частности, заключение теоремы 1 остается в силе, если сходится сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}} \tag{16}$$

в окрестности точки x_0 в смысле главного значения.

Здесь подразумевается, что Q продолжена нулем вне G.

Теорема 2. *Пусть X α-регулярно сверху в точке $x_0 \in \partial G$, $\alpha \geqslant 2$, где G локально линейно связна и удовлетворяет условию (12), а $\overline{G'}$ компактно и $\partial G'$ сильно достижима. Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой Q-гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').*

Следствие 4. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{G(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, d\mu(x) < \infty, \tag{17}$$

где $G(x_0,\varepsilon) = \{x \in G\colon d(x,x_0) < \varepsilon\}$, *то любой* Q*-гомеоморфизм* $f\colon G \to G'$ *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* (X', d').

Теорема 3. *Пусть* G *локально линейно связна во всех своих граничных точках и* $\overline{G}$ — *компакт,* G' *имеет слабо плоскую границу, а* $f\colon G \to G'$ — Q*-гомеоморфизм с* $Q \in L^1_\mu(G)$. *Тогда обратный гомеоморфизм* $g = f^{-1}\colon G' \to G$ *допускает непрерывное продолжение* $\overline{g}\colon \overline{G'} \to \overline{G}$.

4. О гомеоморфном продолжении на границу. Комбинируя результаты предыдущих секций, получаем следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть* G *и* G' *имеют слабо плоские границы, а* $\overline{G}$ *и* $\overline{G'}$ — *компакты и пусть* $Q\colon G \to [0,\infty]$ — *функция класса* $L^1_\mu(G)$ *с*

$$\int_{G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^\alpha\right) \tag{18}$$

в каждой точке $x_0 \in \partial G$, *где* $G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in G\colon \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < d(x_0) = \sup\limits_{x\in G} d(x,x_0)$. *Тогда любой* Q*-гомеоморфизм* $f\colon G \to G'$ *допускает продолжение до гомеоморфизма* $\overline{f}\colon \overline{G} \to \overline{G'}$.

Следствие 5. *В частности, заключение теоремы 4 имеет место, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} \tag{19}$$

сходится в смысле главного значения во всех граничных точках.

Как и ранее, здесь подразумевается, что Q продолжена нулем вне G.

Теорема 5. *Пусть* G — *область в* α*-регулярном сверху пространстве* (X,d,μ), $\alpha \geqslant 2$, *которая локально линейно связна и удовлетворяет условию* (12) *во всех граничных точках,* G' — *область в пространстве* (X',d',μ') *со слабо плоской границей, а* $\overline{G}$ *и* $\overline{G'}$ — *компакты. Если* Q *имеет конечное среднее колебание во всех граничных точках, то любой* Q — *гомеоморфизм* $f\colon G \to G'$ *продолжим до гомеоморфизма* $\overline{f}\colon \overline{G} \to \overline{G'}$.

Следствие 6. *В частности, заключение теоремы 5 имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{G(x_0,\varepsilon)} Q(x)d\mu(x) < \infty \qquad \forall x_0 \in \partial G, \tag{20}$$

где $G(x_0,\varepsilon) = \{x \in G\colon d(x,x_0) < \varepsilon\}$.

По аналогии с определением Вяйсяля [6, 13.1], гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ будем называть K-квазиконформным, $K \in [1,\infty]$, если

$$K^{-1}M(\Gamma) \leqslant M(f\Gamma) \leqslant KM(\Gamma) \tag{21}$$

для любого семейства кривых Γ в G. Гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ называем квазиконформным, если f является K-квазиконформным для некоторого $K \in [1, \infty)$, т. е. если искажение модулей семейств кривых при отображении f ограничено.

Теорема 6. *Пусть G имеет слабо плоскую границу, а G' локально линейно связна в граничных точках и $\overline{G'}$ — компакт. Тогда любое квазиконформное отображение $f\colon G \to G'$ допускает непрерывное продолжение на границу $\overline{f}\colon \overline{G} \to \overline{G'}$.*

Следствие 7. *Если G и G' — области со слабо плоскими границами и компактными замыканиями $\overline{G}$ и $\overline{G'}$, то любое квазиконформное отображение $f\colon G \to G'$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f}\colon \overline{G} \to \overline{G'}$.*

Приведенные теоремы являются далеко идущим обобщением и усилением хорошо известного результата Геринга–Мартио о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между областями квазиэкстремальной длины в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ (см. [12], ср. также [3, 10]). Полученные результаты применимы на римановых многообразиях, в пространствах Левнера и, в частности, группах Карно и Гейзенберга (см., напр., [8, 13, 14]).

1. *Тамразов П. М.* Модули и экстремальные метрики в неориентируемых и скрученных римановых многообразиях // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1388–1398.
2. *Ohtsuka M.* Extremal length and precise functions. – Tokyo: Gakkotosho Co., Ltd., 2003. – 343 p.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2005. – **30**. – P. 49–69.
4. *Ignat'ev A., Ryazanov V.* Finite mean oscillation in the mapping theory // Ukr. Math. Bull. – 2005. – **2**, No 3. – P. 403–424.
5. *Ignat'ev A., Ryazanov V.* To the theory of the boundary behavior of space mappings // Ibid. – 2006. – **3**, No 2. – P. 189–201.
6. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lecture Notes in Math. 229. – Berlin: Springer, 1971. – 144 p.
7. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* BMO-quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 2001. – **83**. – P. 1–20.
8. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer, 2001. – 140 p.
9. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. – Москва: Мир, 1969. – 124 p.
10. *Näkki R.* Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1970. – **484**. – P. 1–50.
11. *Heinonen J., Kilpelainen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. – New York: Clarendon Press, 1993. – 363 p.
12. *Gehring F. W., Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1985. – **24**. – P. 181–206.
13. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. – 1999. – **40**, № 4. – С. 764–804.
14. *Koranyi A., Reimann H.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. – 1995. – **111**, No 1. – P. 1–87.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 02.04.2007