1. *Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И.* Устойчивость и несущая способность подкрепленных оболочек с осесимметричными вмятинами // Theoret. Foundations of Civil Engineering. – Polish – Ukrainian Transactions, Warsaw – Dnepropetrovsk, June 2004. – Vol. 2. – P. 629–636.
2. *Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И., Ситник А. С.* Устойчивость и несущая способность подкрепленных оболочек с осесимметричными вмятинами и выпучинами // Ibid. – Polish – Ukrainian Transactions, Warsaw – Dnepropetrovsk, June 2005. – **13**. – P. 99–106.
3. *Кукарина А. И., Мацнер В. И., Сивак Э. Ф.* О влиянии начальных погибей на собственные колебания ребристых цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1982. – **18**, № 4. – С. 58–63.
4. *Кільчевський М. О.* Курс теоретичної механіки. – Київ: Рад. шк., 1957. – Т 2. – 462 с.
5. *Статика* и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / Кармишин А. В, Ляскавец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. – Москва: Машиностроение, 1975. – 376 с.
6. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Решетарь А. Д.* О формах изгибных колебаний сферических оболочек с начальными неправильностями // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 12. – С. 30–38.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 08.05.2007

УДК 539.3

Е. Ю. Коханенко

Устойчивость пластины с трещиной при неоднородном докритическом состоянии

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

The plane problem of stability of a rectangular plate with central crack under uniaxial compressing of end-walls is considered. Conditions of fixing the end–walls correspond, in integral form, to conditions of a hinge unit. The approximate solution of the problems of elasticity and stability are obtained by the variation-difference method. The example of calculation of critical parameters is given.

В [1–3] рассмотрена задача устойчивости шарнирно закрепленной пластины с центральной трещиной при одноосном сжатии, обеспечивающем однородное начальное состояние в теле пластины. В качестве математической модели использованы уравнения трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [4]. Ниже рассматривается аналогичная задача для случая неоднородного докритического состояния.

Прямоугольная изотропная пластина достаточно протяженная в направлении оси Ox_3 и имеет в этом направлении сквозную трещину шириной t. В направлении трещины пластина сжимается нагрузкой интенсивности $\overset{\circ}{p}_{22}(x_1) = \overset{\circ}{p}_{22}$, обеспечивающей в теле пластины состояние плоской деформации в плоскости $x_3 = \text{const}$, где пластина имеет размеры $2l_1 \cdot 2l_2$. К решению задачи устойчивости применяются уравнения (ТЛТУДТ) и используется второй вариант теории. Задача формулируется в безразмерной форме. При этом размеры пластины нормированы ее длиной l_2, а напряжения и поверхностная нагрузка отнесены к величине

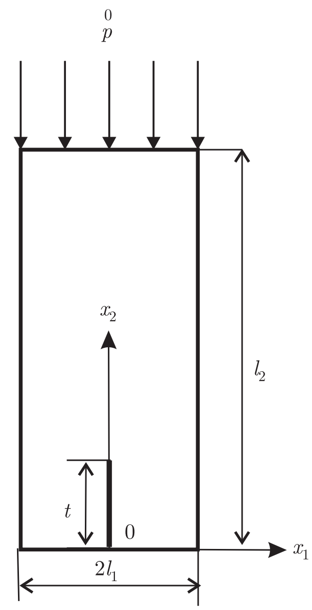

Рис. 1

$E/(1-\nu^2)$. Трещина параллельна оси Ox_2 и имеет величину t. На рис. 1 приведена, с учетом симметрии решения, расчетная схема, где

$$\overset{\circ}{p} = \frac{\overset{\circ}{p}_{22}(1-\nu^2)}{E} = \overset{\circ}{\varepsilon}, \tag{1}$$

т. е. безразмерная начальная нагрузка $\overset{\circ}{p}$ равна начальной деформации $\overset{\circ}{\varepsilon}$ на торцах пластины. На торцах пластины заданы условия $\overset{\circ}{u}_1 = 0 \wedge \overset{\circ}{\tau} = \overset{\circ}{p}$, где нагрузка $\overset{\circ}{p}$ является мертвой для начального напряженного состояния. Такие условия закрепления торцов соответствуют, в интегральной форме, условиям шарнирного закрепления [4].

Для нахождения критических параметров пластины требуется определить из решения задачи упругости безразмерные напряжения $\overset{\circ}{\tau}_{ij}$ основного состояния, а затем из решения уравнений ТЛТУДТ определять критические характеристики устойчивости пластины.

Сформулируем задачу теории упругости. Отыскивается функция $\overset{\circ}{\mathbf{v}} = (\overset{\circ}{\mathrm{v}}_1, \overset{\circ}{\mathrm{v}}_2)$ безразмерных упругих смещений, удовлетворяющая следующим соотношениям:

уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\tau}_{im}}{\partial x_m} = 0, \qquad |x_1| \leqslant l_1 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2, \tag{2}$$

граничным условиям

$$\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\tau}_{im} = 0, \qquad |x_1| \leqslant l_1 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2,\\
&\overset{\circ}{\tau}_{21} = \overset{\circ}{v}_2 = 0, \qquad |x_1| \leqslant l_1 \wedge x_2 = 0,\\
&\overset{\circ}{v}_1 = 0 \wedge \overset{\circ}{\tau}_{22} = \overset{\circ}{p}, \qquad |x_1| \leqslant l_1 \wedge x_2 = l_2;
\end{aligned} \tag{3}$$

условию на трещине

$$\overset{\circ}{\tau}_{im} = 0, \qquad x_1 = \pm 0 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant t. \tag{4}$$

Закон Гука в безразмерной форме имеет вид

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\tau}_{ii} = c_{im}\overset{\circ}{\varepsilon}_{mm}, \qquad \overset{\circ}{\tau}_{12} = 2g\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \qquad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{\circ}{\mathrm{v}}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{\circ}{\mathrm{v}}_j}{\partial x_i}\right), \\ c_{ii} = \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}, \qquad c_{12} = c_{21} = \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu}, \qquad g = 1-\nu.\end{gathered} \tag{5}$$

В (4) линия $x_1 = -0$ относится к левому берегу трещины. В соответствии с (1), безразмерная величина p может быть принята в качестве параметра нагружения при решении задачи устойчивости.

Для нахождения критических параметров требуется определить первое собственное решение $(p^1, \mathbf{v}^1) = (\overset{*}{p}, \overset{*}{\mathbf{v}})$ спектральной задачи, удовлетворяющей следующим соотношениям:

уравнениям в возмущениях

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\tau_{im} + p\left(\overset{\circ}{\tau}_{ij}\frac{\partial \overset{\circ}{\mathrm{v}}_m}{\partial x_j}\right)\right\} = 0, \qquad |x_1| \leqslant l_1 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2; \tag{6}$$

граничным условиям

$$\begin{gathered} v_1 = 0 \wedge \tau_{22} + p\overset{\circ}{\tau}_{22}\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_2} = 0, \qquad |x_1| = l_1 \wedge x_2 = l_2, \\ \tau_{1m} = 0, \qquad |x_1| \leqslant l_1 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2, \\ \tau_{21} = v_2 = 0, \qquad |x_1| \leqslant l_1 \wedge x_2 = 0; \end{gathered} \tag{7}$$

условию на сторонах трещины

$$\tau_{1m} = 0, \qquad x_1 = \pm 0 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant t. \tag{8}$$

Закон Гука для компонент возмущений определяется из (5), где следует опустить индекс “$\circ$”.

Безразмерная и размерная критические нагрузки определяются из соотношений

$$\begin{gathered} p^{\text{кр}} = \frac{1}{2l_1}\int\limits_{-l_1}^{l_1} \overset{\circ}{p}(x_1)dx, \\ p^{\text{кр}}_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}p^{\text{кр}}. \end{gathered} \tag{9}$$

Безразмерная и размерная собственные функции $\overset{*}{\mathbf{v}}$ и $\overset{*}{\mathbf{u}} = \overset{*}{\mathbf{v}} \cdot l_2$ характеризуют возмущения смещений (форму потери устойчивости) пластины. Приближенное решение задач (2)–(5) и (6)–(9) получено вариационно-разностным методом.

В качестве примера рассмотрена пластина с техническими постоянными $E = 200$ ГПа, $\nu = 0{,}25$ и следующими размерами: $l_1 = 0{,}2$, $l_2 = 1$, $t = 0{,}4$; параметр тонкостенности $\alpha = l_1/l_2 = 0{,}2$, нагрузка $\overset{\circ}{p}_{22} = -1$ ГПа.

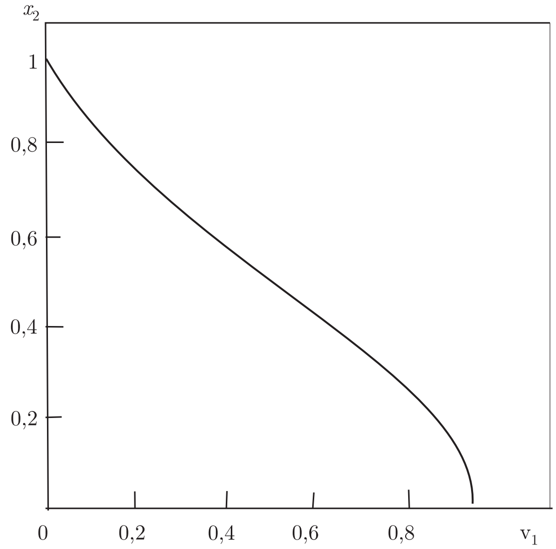

Рис. 2

Из решения задачи определена критическая нагрузка $p_{22}^{\text{кр}} = 1{,}668$. На рис. 2 изображен график функции $\overset{*}{\mathrm{v}}_1(x_1 = 0, x_2)$, представляющий форму потери устойчивости пластины в сечении $x_1 = 0$.

1. *Гладун Е. Ю.* Плоская задача трехмерной устойчивости пластины с трещиной // Доп. НАН України. – 2000. – № 9. – С. 55–57.
2. *Гладун Е. Ю.* Зависимость критической нагрузки от геометрических характеристик шарнирно закрепленной пластины с трещиной // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 9. – С. 112–122.
3. *Гузь А. Н., Гладун Е. Ю.* О трехмерной устойчивости пластины с трещиной // Там же. – 2001. – **37**, № 10. – С. 53–62.
4. *Guz A. N.* Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer, 1999. – 555 p.

Киевский национальный университет технологий и дизайна

Поступило в редакцию 24.04.2007