

кривые с седловыми решениями на траектории. Орбитально устойчивым траекториям соответствует локальная неустойчивость и симметрия решений и особых точек при нейтральном притяжении круговой траектории в целом. Блуждание из одного кольца сепаратрисы в другую траектории бистабильного осциллятора с периодическим воздействием происходит как бесконечное во времени пребывание в состоянии неустойчивых квазипериодических колебаний за счет низкого уровня энергии (для хаотических движений, например,  $E < 0$ , либо  $E^{**} > E > 0$ ). Повышение уровня энергии как бы выталкивает траекторию в область устойчивых движений.

1. *Никитина Н. В.* О построении фазового портрета бистабильного осциллятора // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 59–64.
2. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – Москва: ГИТТЛ, 1949. – 550 с.
3. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* Bistable oscillator theory revisited // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No 4. – P. 489–497.
4. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* On approximate representation of periodic motions in a saddle point // Ibid. – 2002. – **38**, No 9. – P. 1138–1140.
5. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. – Москва: Ин-т компьютерных исследований, 2004. – 416 с.
6. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* Studying the complex oscillations of a star in the field of a galaxy // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No 4. – P. 453–461.
7. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* Complex oscillations revisited // Ibid. – 2005. – **41**, No 2. – P. 179–186.
8. *Martynuk A. A., Nikitina N. V.* Complex behavior of a trajectory in single and double systems // Ibid. – No 3. – P. 315–323.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 13.02.2007*

УДК 539.3

© 2007

**Л. С. Рожок**

## **Шаруваті порожнисті циліндри з гофрами в поперечному перерізі при дії локального навантаження**

*(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)*

*The influence of a local loading on the stressed state of hollow three-layered cylinders corrugated in the cross section and with transversally isotropic middle layer is investigated on the basis of the method of approximation of functions by discrete Fourier series. Distributions of the fields of displacements and stresses are presented.*

У роботі [1] розглянуто задачу про напружений стан ізотропних порожнистих циліндрів з гофрами в поперечному перерізі при дії локального навантаження. В даній роботі проводиться дослідження напруженого стану тришаруватих порожнистих гофрованих циліндрів

з трансверсально-ізотропним середнім шаром, що знаходяться під дією локального навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні при певних граничних умовах на торцях.

Циліндри розглядаються в ортогональній криволінійній системі координат  $s, \psi, \gamma$ :  $s$  — довжина дуги вздовж твірної циліндра;  $\psi$  — полярний кут в поперечному перерізі;  $\gamma$  — нормальна координата вздовж товщини. Для розв'язування даного класу задач використовується просторова модель. За вихідні приймаємо основні рівняння просторової теорії пружності для ортотропного тіла [2, 3].

Сформулювавши відповідні граничні умови на обмежуючих повернях, одержимо тривимірну крайову задачу [4], для розв'язування якої застосовуємо метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [5].

Для відокремлення змінних у напрямку твірної циліндра припускаємо на торцях граничні умови типу простого опирання

$$\sigma_s = 0, \quad u_\psi = 0, \quad u_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = l. \quad (1)$$

На бічних поверхнях граничні умови мають вигляд

$$\sigma_\gamma = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1; \quad (2)$$

$$\sigma_\gamma = q_\gamma; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \quad (3)$$

Крім того, при контакті суміжних шарів без ковзання та відриву, мають виконуватись умови спряження шарів

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^i &= \sigma_\gamma^{i+1}; & \tau_{s\gamma}^i &= \tau_{s\gamma}^{i+1}; & \tau_{\psi\gamma}^i &= \tau_{\psi\gamma}^{i+1}; \\ u_\gamma^i &= u_\gamma^{i+1}; & u_s^i &= u_s^{i+1}; & u_\psi^i &= u_\psi^{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, T-1). \end{aligned} \quad (4)$$

Прийнявши за розв'язувальні функції  $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{\psi\gamma}, u_\gamma, u_s, u_\psi$ , після деяких перетворень з основних рівнянь отримаємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial \gamma} &= (c_2^i - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_\gamma^i - \frac{\partial \tau_{s\gamma}^i}{\partial s} - \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}^i}{\partial \psi} + b_{22}^i \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma^i + \\ &+ b_{12}^i \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s^i}{\partial s} + b_{22}^i \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{1}{\omega} \frac{\partial u_\psi^i}{\partial \psi}; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}^i}{\partial \gamma} &= -c_1^i \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma}^i - b_{12}^i \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s} - b_{11}^i \frac{\partial^2 u_s^i}{\partial s^2} - \\ &- b_{66}^i \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial u_s^i}{\partial \psi} \right) - (b_{12}^i + b_{66}^i) \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial^2 u_\psi^i}{\partial s \partial \psi}; \\ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}^i}{\partial \gamma} &= -c_2^i \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial \psi} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{\psi\gamma}^i - b_{22}^i \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma^i \right) - \\ &- (b_{12}^i + b_{66}^i) \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial^2 u_s^i}{\partial s \partial \psi} - b_{22}^i \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial u_\psi^i}{\partial \psi} \right) - b_{66}^i \frac{\partial^2 u_\psi^i}{\partial s^2}; \\ \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \gamma} &= c_4^i \sigma_\gamma^i - c_2^i \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma^i - c_1^i \frac{\partial u_s^i}{\partial s} - c_2^i \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial u_\psi^i}{\partial \psi}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_s^i}{\partial \gamma} &= a_{44}^i \tau_{s\gamma}^i - \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s}; \\ \frac{\partial u_\psi^i}{\partial \gamma} &= a_{44}^i \tau_{\psi\gamma}^i - \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\psi^i \\ (0 \leq s \leq l; 0 \leq \psi \leq 2\pi; \gamma_p \leq \gamma \leq \gamma_q) \quad (i = \overline{1, T}),\end{aligned}$$

де

$$b_{11}^i = \frac{a_{11}^i a_{66}^i}{\Omega^i}; \quad b_{12}^i = -\frac{a_{12}^i a_{66}^i}{\Omega^i}; \quad b_{22}^i = \frac{a_{11}^i a_{66}^i}{\Omega^i}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned}b_{66}^i &= \frac{a_{11}^{i2} - a_{12}^{i2}}{\Omega^i}; \quad \Omega^i = (a_{11}^{i2} - a_{12}^{i2}) a_{66}^i; \\ c_1^i &= -(b_{11}^i a_{13}^i + b_{12}^i a_{23}^i); \quad c_2^i = -(b_{12}^i a_{13}^i + b_{22}^i a_{23}^i); \quad c_4^i = a_{33}^i + c_1^i a_{13}^i + c_2^i a_{23}^i. \\ a_{11}^i &= \frac{1}{E^i}; \quad a_{12}^i = -\frac{\nu^i}{E^i}; \quad a_{13}^i = -\frac{\nu^i}{E^i}; \quad a_{44}^i = \frac{1}{G^i};\end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}H_2(\psi, \gamma) &= 1 + \frac{\gamma}{R(\psi)}, \\ \omega(\psi) &= \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2}, \quad R(\psi) = \frac{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''} - \text{радіус кривизни}, \\ \rho(\psi) &= r_0 + \alpha \cos m\psi \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi).\end{aligned} \quad (8)$$

Тут  $\rho$  — полярний радіус;  $r_0$  — радіус середнього круга;  $\alpha$  — амплітуда;  $m$  — частота гофрування.

Граничні умови (1) дозволяють відокремити змінні вздовж твірної циліндра, подавши розв'язувальні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є. Для відокремлення змінних вздовж напрямної циліндра замінимо в розв'язувальній системі диференціальних рівнянь (5) доповнювальними функціями члени, що не дозволяють провести це відокремлення. Ці функції визначаються через розв'язувальні функції і містять геометричні параметри циліндра та мають вигляд (індекс  $i$  опустимо)

$$\begin{aligned}\varphi_1^j &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right\} \quad (j = \overline{1, 5}); \\ \varphi_2^j &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \{ \tau_{\psi\gamma}; u_\psi \} \quad (j = \overline{1, 2}); \\ \varphi_3^j &= \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial}{\partial \psi} \{ \sigma_\gamma; u_\gamma; u_s \} \quad (j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_4^j &= \frac{1}{H_2 \omega} \left\{ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi}; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_5 &= \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial \varphi_1^3}{\partial \psi}; \quad \varphi_6 = \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial \varphi_3^3}{\partial \psi}; \quad \varphi_7 = \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial \varphi_4^2}{\partial \psi}.\end{aligned} \quad (9)$$

Подаючи розв'язувальні, доповнювальні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є вздовж прямої циліндра [6], одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних значень цих розвинень у вигляді

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= (c_2 - 1)\varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22}\varphi_{1,k}^5 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22}\varphi_{4,k}^3; \\
 \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^3 + b_{11}\lambda_n^2 u_{s,k} - b_{66}\varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\
 \frac{d\tau_{\psi\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} + (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k} + b_{66}\lambda_n^2 u_{\psi,k}; \\
 \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\
 \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{55}\tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{\psi,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{\psi\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2
 \end{aligned} \tag{10}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\gamma,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1; \\
 \sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Отриману одновимірну крайову задачу (10), (11) розв'язуємо стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [7]. При інтегруванні на кожному кроці застосування чисельного методу, використовуючи поточні амплітудні значення розв'язувальних функцій, невідомі амплітудні значення доповнювальних функцій будемо обчислювати за допомогою дискретних рядів Фур'є [8]. Розглянутий підхід із застосуванням методу дискретних рядів Фур'є детально описаний в роботі [9], де показана збіжність розв'язків задачі, отриманих на основі запропонованого підходу залежно від вибору кількості точок ортогоналізації, кількості точок, в яких обчислюються значення доповнювальних функцій та кількості членів, що утримуються в розвиненнях в ряди Фур'є вздовж прямої циліндра.

Будемо розглядати гофровані циліндри, частота та амплітуда гофрування яких дорівнюють відповідно  $m = 4$ ;  $\alpha = 4$ . Прикладене в околі гофрів локальне навантаження подамо у вигляді ряду Фур'є

$$q_{\gamma}(\psi) = \frac{4q_0}{\pi} \left[ \sin \beta - \beta \cos \beta + \sum_{k=4,8,\dots}^{4K} \left( \frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2 \sin k\beta \cos \beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k\psi \right].$$

Задачу розв'язано за таких умов:  $r_0 = 40$ ;  $l = 60$ ;  $\beta = \pi/8$ ;  $\pi/12$ ;  $\pi/16$ , загальна товщина циліндра  $H = 4$ ; товщина несучих шарів  $h_1 = h_3$ ; товщина середнього шару  $h_2 = 1$ ; 3; зовнішній та внутрішній шари виготовлені з ізотропного матеріалу з механічними параметрами  $E$  та  $\nu = 0,3$ ; середній шар виготовлений з трансверсально-ізотропного матеріалу з механічними параметрами  $E' = 0,2E$ ;  $\nu' = 0,6$ ;  $G' = 0,1E$ .

На рис. 1-4 наведено результати розв'язання задачі в середньому перерізі по довжині циліндра для  $s = 0,5l$ .

Рис. 1 ілюструє розподіл переміщень  $u_{\gamma}$  на внутрішній поверхні циліндра вздовж прямої залежно від інтервалу прикладення локального навантаження, коли товщина середнього шару  $h_2 = 1$ . Характер розподілу переміщень для випадку  $h_2 = 3$  зберігається.

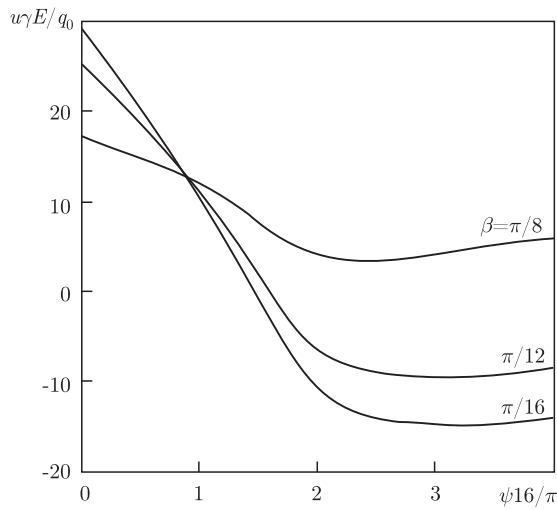


Рис. 1

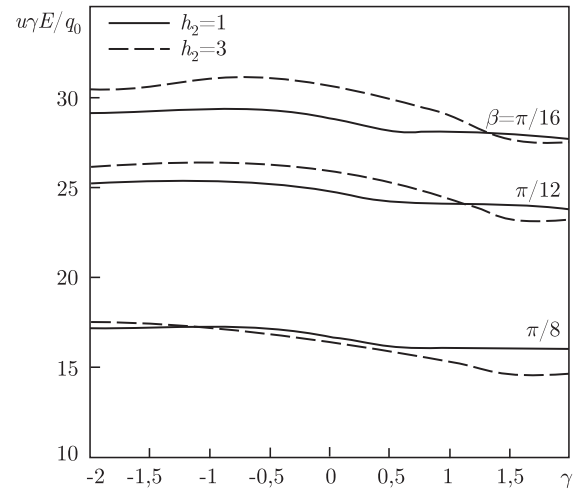


Рис. 2

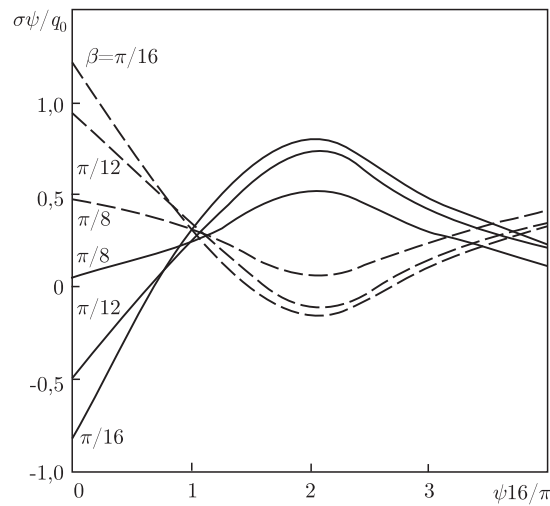


Рис. 3

Видно, що при зменшенні інтервалу прикладення навантаження  $\beta$  переміщення  $u_\gamma$  збільшуються як у вершинах, так і у западинах гофрів. При цьому в западинах гофрів переміщення змінюють знак на протилежний.

На рис. 2 наведено розподіл полів переміщень  $u_\gamma$  по товщині циліндрів залежно від зміни інтервалу прикладення навантаження  $\beta$  для товщини середнього шару  $h_2 = 1$  (суцільна лінія) та для товщини середнього шару  $h_2 = 3$  — штрихова лінія. Бачимо, що зменшення інтервалу прикладення навантаження більше впливає на перерозподіл переміщень при збільшенні товщини середнього шару на внутрішній поверхні циліндра.

На рис. 3 подано графіки розподілу напружень  $\sigma_\psi$  вздовж напрямної циліндра для випадку, коли товщина середнього шару  $h_2 = 1$  на внутрішній (суцільна лінія) та зовнішній (штрихова лінія) поверхнях залежно від зміни параметра  $\beta$ . Видно, що зміна інтервалу прикладення навантаження більше впливає на зміну величини напружень у вершині гофрів та в перерізі  $\psi = \pi/8$ , ніж в западині.

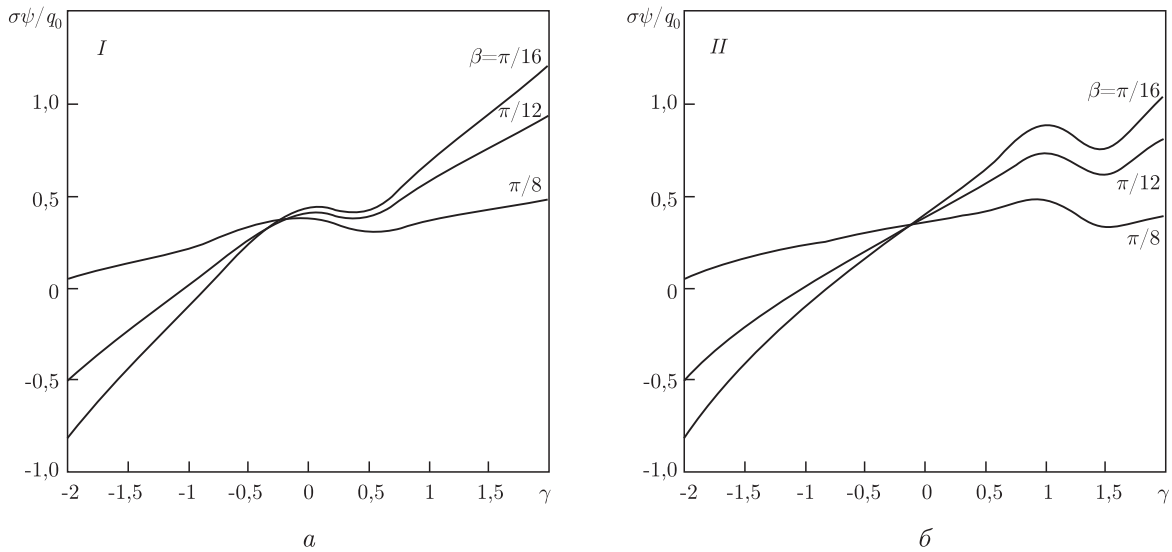


Рис. 4

На рис. 4 наведено розподіл напружень  $\sigma_\psi$  по товщині циліндра для випадку  $h_2 = 1$  (рис. 4, а) та  $h_2 = 3$  (рис. 4, б) залежно від зміни параметра  $\beta$ . Видно, як впливає на розподіл напружень зміна інтервалу прикладення навантаження та збільшення товщини середнього шару.

Таким чином, запропоновану методику можна застосовувати при дослідженні напруженого стану некругових порожнистих шаруватих циліндрів подібного типу.

1. Рожок Л. С. Дослідження впливу локального навантаження на напружений стан гофрованих порожнистих циліндрів // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – С. 56–59.
2. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
4. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропных полых цилиндров с гофрами в поперечном сечении // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 3. – С. 62–69.
5. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Об одном подходе к решению задач о напряженном состоянии некруговых полых цилиндров // Там же. – 2002. – 38, № 5. – С. 61–71.
6. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section // J. Eng. Math. – 2006. – 54. – P. 145–157.
7. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. – 1961. – XVI, вып. 3. – С. 171–174.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Москва: Наука, 1949. – Т. 3. – 783 с.
9. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статички пружних тіл неканонічної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 2. – С. 78–100.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 15.05.2007