Доповіді Національної академії наук України

12 • 2007

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621Ю31(0758)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

Об аналитической интерпретации процессов в *RL*-, *RC*-цепях с учетом особого разложения входных прямоугольных импульсов

We give a solution of the problem on transient processes in RL- and RC-circuits under an input rectangular pulse voltage represented in the form of a special expansion.

В работах [1–3] представлено обоснование применимости особого разложения скачкообразной функции $E1(t)$ в виде

$$E1(t) = E(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t,$$
$$U_{ak} = \frac{U_{a1}}{\omega_k}, \qquad U_{a1} = \frac{E}{\pi\omega_1}, \qquad \sum_{k=1}^{n} U_{ak} = E, \qquad \omega_k = k\omega_1, \tag{1}$$

где $1(t)$ — единичная функция $\begin{pmatrix} 1(t) = 1 & \text{при} & t \geqslant 0 \\ 1(t) = 0 & \text{при} & t < 0 \end{pmatrix}$; E — величина функции $E1(t)$; α — коэффициент затухания; t — время; U_{ak}, ω_k — амплитуда и круговая частота k-й гармоники соответственно.

В работе [1] приведен расчет переходных процессов в RL-, RC-цепях при скачкообразном входном напряжении $E1(t)$. В реальных условиях бывает, что на вход RL-, RC-цепей поступают одиночные или периодические прямоугольные импульсы с амплитудой E, длительностью τ и паузой τ_n при периодических импульсах. В этом случае одиночный прямоугольный импульс с бесконечно малыми передним и задним фронтами представляет собой сумму скачкообразных функций $E1(t)$ и $E1(t-\tau)$, которая при рассмотрении рис. 1 и учете разложения (1) имеет вид

$$E(0,\tau) = E(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t - E[1 - \ell^{-\alpha(t-\tau)}] -$$
$$- \ell^{-\alpha(t-\tau)}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k(t-\tau). \tag{2}$$

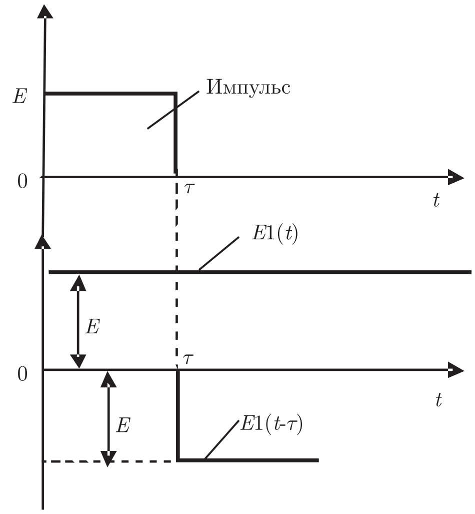

Рис. 1

а *б*

Рис. 2

Из рис. 1 видно, что во время $t = (0 \div \tau)$ величина импульса после затухания, определяемого коэффициентом затухания α, когда выражение $\ell^{-\alpha t}$ в (2) станет равным нулю, принимает значение E. Кроме того, при $t = 0$ $E(0,\tau) = E$, так как $\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = E$, что соответствует условию существования скачкообразной функции $\left\{ \begin{array}{lll} 1(t) = 1 & \text{при} & t \geqslant 0 \\ 1(t) = 0 & \text{при} & t < 0 \end{array} \right\}$. При $t = \infty$ $E(0,\tau) = 0$, т. е. импульса нет.

Если принять, что коэффициент затухания $\alpha = \infty$, то в промежутке $t = (0 \div \tau)$ $E(0,\tau) = E$, а после $t = \tau$ $E(0,\tau) = 0$, что подтверждает правильность (2).

Таким образом, импульс $E(0,\tau)$ формируем с помощью разности скачкообразных функций $E1(t) - E1(t-\tau)$, представленных в виде особого разложения (2). Будем считать, что такой прямоугольный импульс существует в промежутке $(0 \div \tau)$ с учетом только $E1(t) = E[1 - \ell^{-\alpha t}] + \ell^{-\alpha t} \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t$. Разность $E1(t) - E1(t-\tau)$ возникает в момент τ и после него, так как $E1(t-\tau) = \left\{ \begin{array}{lll} E & \text{при} & t \geqslant \tau \\ 0 & \text{при} & t < \tau \end{array} \right\}$.

В данной задаче предполагаем, что рассматриваемый прямоугольный импульс подается на вход RL и RC цепей, представленных на рис. 2, *а*, *б* соответственно, где Кл — ключ; R — резистор; L — индуктивность; C — емкость.

Дифференциальные уравнения этих схем в данном случае следующие:

$$E(1-\ell^{-\alpha t})+\ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n}U_{ak}\cos\omega_k t-E[1-\ell^{-\alpha(t-\tau)}]-\ell^{-\alpha(t-\tau)}\sum_{k=1}^{n}U_{ak}\cos\omega_k(t-\tau)=$$

$$=Ri+L\frac{di}{dt}, \tag{3}$$

$$E(1-\ell^{-\alpha t})+\ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n}U_{ak}\cos\omega_k t-E[1-\ell^{-\alpha(t-\tau)}]-\ell^{-\alpha(t-\tau)}\sum_{k=1}^{n}U_{ak}\cos\omega_k(t-\tau)=$$

$$=U_C+RC\frac{dU_C}{dt}, \tag{4}$$

где i, U_C — ток в цепи RL и напряжение на емкости C в цепи RC соответственно.

В выражениях (3), (4) $\cos\omega_k(t-\tau)$ представим в виде разложения $\cos\omega_k(t-\tau)=$ $=(\cos\omega_k t)\cos\omega_k\tau+(\sin\omega_k t)\sin\omega_k\tau$. В дальнейшем рассмотрим изменение тока $i(t)$ в RL-цепи, а затем, ввиду идентичной формы уравнений (3) и (4), осуществим выводы относительно напряжения U_C в RC-цепи. При решении используем операционный метод с изображениями Карсона [4]. Изображение, соответствующее оригиналу, представленному в левых частях уравнений (3), (4), имеет вид

$$E(p)=E\frac{\alpha}{p+\alpha}-E+E\ell^{\alpha\tau}\frac{p}{p+\alpha}+\sum_{k=1}^{n}U_{ak}\frac{p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\omega_k^2}-$$

$$-\ell^{-\alpha\tau}\sum_{k=1}^{n}U_{ak}(\cos\omega_k\tau)\frac{p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\omega_k^2}-\ell^{-\alpha\tau}\sum_{k=1}^{n}U_{ak}(\sin\omega_k\tau)\frac{\omega_k p}{(p+\alpha)^2+\omega_k^2}. \tag{5}$$

На основании (5) изображение, соответствующее (3), имеет вид $E(p)=I(p)(R+Lp)$, откуда, с учетом (5), запишем изображение тока

$$I(p)=\frac{E\alpha}{L}\frac{1}{(p+\alpha)(p+\delta)}-\frac{E}{L(p+\delta)}+\frac{E\ell^{\alpha\tau}}{L}\frac{p}{(p+\alpha)(p+\delta)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{U_{ak}}{L}\frac{p(p+\alpha)}{(p+\delta)[(p+\alpha)^2+\omega_k^2]}-\ell^{-\alpha\tau}\sum_{k=1}^{n}\frac{U_{ak}}{L}(\cos\omega_k\tau)\frac{p(p+\alpha)}{(p+\delta)[(p+\alpha)^2+\omega_k^2]}-$$

$$-\ell^{-\alpha\tau}\sum_{k=1}^{n}\frac{U_{ak}}{L}(\sin\omega_k\tau)\frac{\omega_k p}{(p+\delta)[(p+\alpha)^2+\omega_k^2]}, \tag{6}$$

где $\delta=R/L$ — коэффициент затухания в RL-цепи.

Оригинал тока $i(t)$ состоит из шести слагаемых, которые включены в (6). Поэтому будем определять оригиналы этих слагаемых, а затем представим выражение общего оригинала $i(t)$, пользуясь таблицами [4].

Для первых трех слагаемых в (6) оригинал имеет вид

$$i_1(t)=\frac{E\alpha}{L}\left[\frac{1}{\alpha\delta}+\frac{1}{\alpha-\delta}\left(\frac{1}{\alpha}\ell^{-\alpha t}-\frac{1}{\delta}\ell^{-\delta t}\right)\right]-\frac{E}{L}\frac{1}{\delta}(1-\ell^{-\delta t})+\frac{E\ell^{\alpha\tau}}{L}\left[\frac{1}{\alpha-\delta}(-\ell^{-\alpha t}+\ell^{-\delta t})\right]. \tag{7}$$

Оригиналы, соответствующие остальным слагаемым в (6), будем находить для k-го слагаемого в своей сумме $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\cdots\Big)$, а затем результаты складывать. Заметим, что второе и третье слагаемое в (6) имеют похожий вид. Поэтому для k-й составляющей этих слагаемых осуществим следующее представление:

$$\frac{U_{ak}}{L}(1-\ell^{-\alpha\tau}\cos\omega_k\tau)\frac{p(p+\alpha)}{(p+\delta)[(p+\alpha)^2+\omega_k^2]}. \tag{8}$$

Оригинал изображения (8) находим по таблицам Т.39 и Т.40 из [4] в виде

$$\frac{U_k p\alpha}{(p+\delta)[(p+\alpha)^2+\omega_k^2]} \rightleftarrows U_k\frac{\alpha}{(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2}\times$$
$$\times\left\{\ell^{-\delta t}+\frac{\ell^{-\alpha t}}{\omega_k}[-\omega_k\cos\omega_k t+(\delta-\alpha)\sin\omega_k t]\right\}=i_2(t), \tag{9}$$

$$\frac{U_k p^2}{(p+\delta)[(p+\alpha)^2+\omega_k^2]} \rightleftarrows U_k\frac{1}{(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2}\times$$
$$\times\left\{-\delta\ell^{-\delta t}+\frac{\ell^{-\alpha t}}{\omega_k}[\omega_k\delta\cos\omega_k t+(\omega_k^2+\alpha^2-\alpha\delta)\sin\omega_k t]\right\}=i_3(t), \tag{10}$$

где $U_k=\dfrac{U_{ak}}{L}(1-\ell^{-\alpha\tau}\cos\omega_k\tau)$.

Далее перейдем к определению оригинала изображения

$$\frac{U_{ak}}{L}\ell^{-\alpha\tau}\omega_k\sin\omega_k\tau\frac{p}{(p+\delta)[(p+\alpha)^2+\omega_k^2]},$$

который находится по таблице Т.39 из [4] в виде

$$E_k\frac{1}{(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2}\left\{\ell^{-\delta t}+\frac{\ell^{-\alpha t}}{\omega_k}[-\omega_k\cos\omega_k t+(\delta-\alpha)\sin\omega_k t]\right\}=i_4(t), \tag{11}$$

где $E_k=\dfrac{U_{ak}}{L}\ell^{-\alpha\tau}\omega_k\sin\omega_k\tau$.

Складывая выражения (7) и в своих суммах $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\cdots\Big)$ выражения (9), (10), (11), получим в результате общий оригинал тока $i(t)$ в виде

$$i(t)=\frac{E\alpha}{L}\left[\frac{1}{\alpha\delta}+\frac{1}{\alpha-\delta}\left(\frac{1}{\alpha}\ell^{-\alpha t}-\frac{1}{\delta}\ell^{-\delta t}\right)\right]-\frac{E}{L\delta}(1-\ell^{-\delta t})+$$
$$+\frac{E\ell^{\alpha\tau}}{L}\left[\frac{1}{\alpha-\delta}(-\ell^{-\alpha t}+\ell^{-\delta t})\right]+\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n}U_{ak}\frac{\alpha}{(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2}\times$$
$$\times\left\{\ell^{-\delta t}+\frac{\ell^{-\alpha t}}{\omega_k}[-\omega_k\cos\omega_k t+(\delta-\alpha)\sin\omega_k t]\right\}+\frac{U_{ak}}{L}(1-\ell^{-\alpha\tau}\cos\omega_k\tau)\times$$
$$\times\frac{1}{(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2}\left\{-\delta\ell^{-\delta t}+\frac{\ell^{-\alpha t}}{\omega_k}[\omega_k\delta\cos\omega_k t+(\omega_k^2+\alpha^2-\alpha\delta)\sin\omega_k t]\right\}-$$
$$-\frac{U_{ak}}{L}\ell^{-\alpha\tau}\omega_k(\sin\omega_k\tau)\left\{\ell^{-\delta t}+\frac{\ell^{-\alpha t}}{\omega_k}[-\omega_k\cos\omega_k t+(\delta-\alpha)\sin\omega_k t]\right\}. \tag{12}$$

Выражение (12) отражает процесс изменения тока $i(t)$ в RL-цепи при включении на ее вход одиночного прямоугольного импульса $(0 \div \tau)$, описываемого в виде особого разложения скачкообразной функции [1]. Заметим, что при проверке (2) путем подстановки $t = 0$ и $t = \infty$, т. е. до начала входного импульса и после его прохождения i (при $t = \infty$) ток $i(t) = 0$, а в промежутке времени $(0 \div \tau)$ ток $i(t)$ описывается выражением (12). В случае, если на входе RL-цепи будет следовать ряд прямоугольных импульсов с длительностью пауз такой, что ток $i(t)$ в течение паузы равен нулю, то для расчета тока при последующих импульсах выражение (12) также справедливо.

Следует отметить, что при расчете переходных процессов в рассматриваемых цепях при входных прямоугольных импульсах надо брать во внимание для переднего фронта входное напряжение вида (1), а для заднего фронта $-E[1 - \ell^{-\alpha(t-\tau)}] - \ell^{-\alpha(t-\tau)} \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k (t - \tau)$ при условии для последнего при $t = 0$ не нулевые начальные условия, т. е. для тока $i(t)$ E/R и напряжения U_{C_0}.

Переходный процесс тока $i(t)$ при включении RL-цепи на напряжение (1) имеет вид

$$i(t) = \frac{E\alpha}{L}\left[\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\alpha - \delta}\left(\frac{1}{\alpha}\ell^{-\alpha t} - \frac{1}{\delta}\ell^{-\delta t}\right)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{ak}}{L} \frac{1}{(\alpha - \delta)^2 + \omega_k^2} \{(\alpha - \delta)\ell^{-\delta t} + \ell^{-\alpha t}[-(\alpha - \delta)\cos\omega_k t + \omega_k \sin\omega_k t]\}. \tag{13}$$

При $t = 0$ $(0) = 0$, при $t = \infty$ $i(\infty) = E/(L\delta) = E/R$, т. е. данная проверка подтверждает правильность (13). Если предположить, что коэффициент затухания $\alpha = \infty$, то тогда (13) принимает вид

$$i(t) = \frac{E}{L\delta}(1 - \ell^{-\delta t}) = \frac{E}{R}(1 - \ell^{-\delta t}). \tag{14}$$

Выражение (14) является результатом расчета переходного процесса тока $i(t)$ в RL-цепи классическим методом. А это значит, что решение в виде (13) при условии $\alpha = \infty$ не противоречит известным методам [4, 5].

Рассмотрение переходного процесса $i(t)$ во время заднего фронта входного прямоугольного импульса при наличии установившегося значения тока $i(t) = E/R$ можно считать искусственно привязанным к нулевому отсчету времени. А это означает, что выражение переходного процесса тока $i(t)$ будет следующим:

$$i(t) = E(1 - \ell^{-\delta t}) - \frac{E\alpha}{L}\left[\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\alpha - \delta}\left(\frac{1}{\alpha}\ell^{-\alpha t} - \frac{1}{\delta}\ell^{-\delta t}\right)\right] - \\ - \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{ak}}{L} \frac{1}{(\alpha - \delta)^2 + \omega_k^2} \{(\alpha - \delta)\ell^{-\delta t} + \ell^{-\alpha t}[-(\alpha - \delta)\cos\omega_k t + \omega_k \sin\omega_k t]\}. \tag{15}$$

Проверка (15) дает такие результаты: при $t = 0$ $i(t) = E(1 - \ell^{-\delta t})/R$, при $t = \infty$ $i(t) = 0$, при $\alpha = \infty$ $i(t) = E(1 - \ell^{-\delta t})\ell^{-\delta t}$, что также подтверждает правильность данного решения. При такой проверке считаем, что $\alpha \gg \delta$ и экспонента $(1 - \ell^{-\alpha t})$ на вершине импульса равна единице, т. е. во входном напряжении полностью произошло затухание составляющих.

Далее перейдем к RC-цепи (см. рис. 2, *б*). Сравнивая уравнения (3) и (4), не вдаваясь в физику процесса, видим, что они по форме идентичны. Правые части их могут быть выражены следующим образом:

$$L\left(\frac{R}{L}i+\frac{di}{dt}\right) \qquad \text{и} \qquad RC\left(\frac{1}{RC}U_c+\frac{dU_c}{dt}\right).$$

В RL-цепи $R/L=\delta$, а в RC-цепи $\delta=1/(RC)$, где еще раз отметим δ — коэффициент затухания.

С учетом δ эти правые части имеют вид

$$\frac{R}{\delta}\left(\delta i+\frac{di}{dt}\right) \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{\delta}\left(\delta U_c+\frac{dU_c}{dt}\right).$$

Как видим, выражения за исключением множителя R в первом выражении по форме одинаковые. Левые части уравнений (3) и (4) также одинаковые. Поэтому можно считать, что выражение (12) по форме подходит для описания переходного процесса $U_c(t)$ в RC-цепи ((12) необходимо разделить на R).

Исходя из такого рассуждения, расчет переходного процесса U_c в RC-цепи опустим. Конечно, выражение (12) является более громоздким по сравнению с выражениями исследуемых переходных процессов известными методами [4, 5]. Однако, как было отмечено в работах [1, 3], представление скачкообразных входных сигналов электроцепей в виде особого разложения более точно отражает физику начального участка переходного процесса. Именно это преимущество заставляет автора исследовать переходные процессы в различных цепях, представляя математически скачкообразные входные сигналы в виде особого разложения.

1. *Божко А. Е.* Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Доп. НАН України. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
2. *Божко А. Е.* О новой трактовке переходных процессов в электрических цепях переменного тока // Там само. – 2005. – № 4. – С. 81–86.
3. *Божко А. Е.* Аргументация новой концепции о переходных процессах в электроцепях с позиций волновой механики // Там само. – 2006. – № 3. – С. 83–88.
4. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.
5. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 30.11.2006