Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

С. П. Дегтярев

Необходимые и достаточные условия мгновенной компактификации носителя решения и двусторонние оценки его размеров в задаче Коши для параболического уравнения с двойной нелинейностью и абсорбцией

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

We study the instantaneous support shrinking phenomenon for a doubly nonlinear degenerate parabolic equation in the case of slow diffusion, when the initial Cauchy data are, in general, Radon measures. For nonnegative solutions, we obtain the necessary and sufficient conditions for the instantaneous support shrinking phenomenon in terms of local behavior of the array of the initial data and, in the same terms, we express the bilateral estimates exact with respect to order for the support size.

Постановка задачи и основной результат. В области $\mathbb{R}^N \times [0,T]$, N — размерность пространства $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\beta-1}u(x,t)) - \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{r-1}u(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$|u|^{\beta-1}u(x,0) = |u_0|^{\beta-1}u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_N)$. Мы ограничиваемся рассмотрением случая медленной диффузии и сильной абсорбции, что означает следующие ограничения на параметры задачи:

$$\beta > 0, \qquad p > 1 + \beta, \qquad r < \beta. \tag{3}$$

Как известно (см., напр., [1–11]), при определенных условиях в задаче (1), (2) наблюдается явление мгновенной компактификации носителя решения, которое означает, что, хотя носитель начальной функции может быть некомпактным и даже совпадать со всем пространством $\mathbb{R}^N$, у решения он становится компактным в любой сколь угодно малый момент времени $t > 0$ и в начальные моменты времени происходит уменьшение его размеров.

Однако до настоящего времени не имеется точных условий мгновенной компактификации в наиболее общих терминах поведения массы начальной функции. Изучению данного явления для задачи (1), (2) и получению точных по порядку оценок размеров носителя слабого решения указанной задачи и посвящено настоящее сообщение.

Под слабым решением задачи (1), (2) на интервале времени $[0,T]$ мы понимаем измеримую функцию, обладающую следующими свойствами:

1) для любой функции $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ отображение

$$t \in [0,T] \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1} u(x,t)\zeta(x)$$

непрерывно;

2)для любой финитной по x достаточно гладкой функции $\eta(x,t)$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1}u(x,t)\eta\,dx + \sum_{i=1}^N \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}u_{x_i}\eta_{x_i}\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{r-1}u\eta\,dxd\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{\beta-1}u_0(x)\eta(x,0)\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1}u(x,\tau)\eta_\tau(x,\tau)\,dxd\tau. \tag{4}$$

Из работ [10, 11] следует, что задача (1), (2) при заданном соотношении параметров (3) разрешима для начальных функций из $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ или для локально конечных радоновских мер в качестве начальных данных, не слишком растущих на бесконечности. А именно, пусть для $R > 0$

$$|||u_0|||_{R,x_0} \equiv \sup_{\rho>R} \rho^{-k/d} \int\limits_{B_\rho(x_0)} ||u_0|^{\beta-1}u_0(x)|\,dx < \infty,$$

где и далее $B_\rho(x_0)$ означает шар радиуса ρ с центром в x_0,

$$d = p-1-\beta, \qquad k = N(p-1-\beta)+\beta p = Nd+\beta p, \qquad d_r = p-1-r, \tag{5}$$

а интеграл по $B_\rho(x_0)$ от модуля начальной функции в случае, если эта функция представляет собой радоновскую меру, означает полную вариацию этой меры по шару $B_\rho(x_0)$. Тогда известно [10, 11], что на некотором интервале времени $[0,T]$ для решения задачи (1), (2) справедлива оценка

$$|||u(x,t)|||_{R,x_0} \leqslant C|||u_0|||_{R,x_0}. \tag{6}$$

Здесь и всюду далее через C, b, γ мы будем обозначать все абсолютные константы, либо константы, зависящие только от заданных параметров N, p, r, β.

Более того, из результатов работ [10, 11] следует, что слабое решение задачи локально ограничено при $t > 0$ и, кроме того, $u_{x_i} \in L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0,T))$. Это, в частности, означает, что интегральное тождество (4) справедливо для финитных по x пробных функций $\eta(x,t) \in L_{p,\mathrm{loc}}((0,T), W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$. Отметим также, что ниже при доказательстве оценки снизу (20) размеров носителя решения мы считаем наше решение тем слабым решением, которое является пределом решений с гладкими финитными начальными данными (как и получается слабое решение в работах [10, 11]).

Мы, далее, фактически, запретим нашей начальной функции иметь существенный рост на бесконечности и потребуем, чтобы была конечной следующая величина (как будет показано далее, это требование является необходимым для наличия явления мгновенной компактификации носителя):

$$|||u_0|||_R \equiv \sup_{x_0\in\mathbb{R}^N} |||u_0|||_{R,x_0} < \infty. \tag{7}$$

Заметим, что из (7) легко следует, что

$$|||u(x,t)|||_R \leqslant C_0|||u_0|||_R, \qquad t\in[0,T]. \tag{8}$$

Не останавливаясь подробно на истории изучаемого вопроса (отсылаем читателя по этому поводу к работе [1]), отметим, что начальные данные из $L_{p,\mathrm{loc}}$, $p>1$ (не имеющие, вообще говоря, монотонной мажоранты, убывающей на бесконечности, как того требуют методы, основанные на барьерной технике), были рассмотрены в работах [1–4], где изучаются также и уравнения высокого порядка. Сформулируем кратко основную оценку размеров носителя решения, полученную в работах [1, 2] в терминах нашей постановки (1), (2).

Пусть здесь и всюду ниже

$$D(t) = \inf_{\rho>0}\{\rho\colon u(x,t)\equiv 0, |x|>\rho\} \; - \tag{9}$$

верхняя граница носителя решения $u(x,t)$ задачи (1), (2). Пусть, далее, $u_0\in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, причем $q>1$ при $\beta=1$ (как в работе [1]) и $q>1+\beta$ при $\beta\neq 1$ (как в работе [2]). Определим функцию

$$f_q(\rho) \equiv \sup_{|y|=\rho} \int\limits_{|x-y|<1} |u_0(x)|^q dx$$

и пусть $f_q(\rho)\to 0$ при $\rho\to\infty$. (В работах [1, 2] вместо введенной функции f_q использовались некоторые технические мажоранты этой функции. Мы опускаем детали ради ясности изложения.) Тогда в задаче (1), (2) наблюдается явление мгновенной компактификации носителя, причем

$$D(t) \leqslant f_q^{-1}\bigl(\gamma t^{(qp+N(p-1-r))/(p(\beta-r))}\bigr) \tag{10}$$

с достаточно малым $\gamma>0$, где в случае не строго монотонной $f_q(\rho)$

$$f_q^{-1}(s) \equiv \inf\{\rho\colon f_q(\rho)<s\}.$$

Сделаем несколько замечаний по поводу этого результата. Во-первых, само явление мгновенной компактификации носителя и оценка (10) изучались в случае, когда степень суммируемости функции $u_0(x)$ из (2) выше, чем β. Как отмечено авторами работ [1, 2], вызывает интерес изучение общего случая, т. е. случая, когда начальная функция имеет только локально конечную массу или даже является мерой. В частности, в работе [1] был поставлен вопрос о том, что происходит в случае, например, начальной функции

$$|u_0|^{\beta-1}u_0(x) = \sum_{\overline{n}\in\mathbb{R}^N} \mu_{\overline{n}}\delta(x-\overline{n}), \tag{11}$$

где $\overline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ — точка с целочисленными координатами, $\delta(x-\overline{n})$ — дельта-функция, сосредоточенная в точке $\overline{n}$ с массой $\mu_{\overline{n}}$, $\sum\limits_{\overline{n}} |\mu_{\overline{n}}| < \infty$ (последнее требование, как мы покажем, излишне достаточно, чтобы $\mu_{\overline{n}} \to 0$, $|\overline{n}| \to \infty$).

Во-вторых, как это и было отмечено в работе [2], оценка (10), как известно, не является точной для достаточно регулярных начальных данных. Например, если начальная функция $u_0(x)$ непрерывна и монотонно убывает на бесконечности,

$$f_\infty(\rho) \equiv \max_{|y|=\rho} |u_0(y)| \to 0, \qquad \rho \to \infty, \tag{12}$$

то, как следует, например, из работ [5, 7, 9],

$$D(t) \sim C f_\infty^{-1}\big(\gamma t^{\beta/(\beta-r)}\big), \tag{13}$$

что, как легко проверить, дает лучшую по порядку оценку носителя, чем оценка (10). С другой стороны, приведенные в [2] соображения позволили высказать гипотезу, что оценка (10) является "предельно" точной для всего класса допустимых в [2] начальных функций, для которых определена введенная выше функция $f_q(\rho)$.

В настоящей работе мы ставим, в частности, целью ответить на поставленные выше вопросы. Во-первых, мы рассматриваем более общий класс начальных данных для уравнения (1), когда $|u_0|^{\beta-1}u_0(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ или является локально конечной радоновской мерой (в частности, начальные данные вида (11) являются допустимыми начальными данными). Во-вторых, полученные нами оценки размеров носителя имеют такой вид, что дают лучший порядок для лучших начальных данных и из них легко следуют указанные выше оценки (10), (13). В-третьих, мы показываем, что приводимые нами оценки неулучшаемы для начальных данных, не меняющих знак, что делает наши оценки для таких начальных данных двусторонними. Более того, отдельно рассматривая случай начальных данных вида (11) без ограничения на знак $\mu_{\overline{n}}$, мы покажем, что

$$D(t) \sim C f_0^{-1}\big(\gamma t^{(N(p-1-r)+\beta p)/(p(\beta-r))}\big), \tag{14}$$

где

$$f_0^{-1}(s) = \inf\Big\{\rho\colon |\mu_{\overline{n}}| < \gamma t^{(N(p-1-r)+\beta p)/(p(\beta-r))}, |\overline{n}| > \rho\Big\}. \tag{15}$$

Отсюда, в частности, следует "предельная" точность оценки (10) при $q = \beta$, когда начальные данные ведут себя подобно (11). Отметим также и то, что, как оказалось, соотношение (14) имеет место только лишь для данных вида (11): для начальных данных, которые являются равномерно локально суммируемыми в $\mathbb{R}^N$ порядок размера носителя всегда меньше, чем в (14).

В работе мы используем метод локальных интегральных оценок и оценок максимума модуля решения через массу решения, развитый в работах [12–14]. Более того, сама идея применения этого метода к изучаемой задаче подсказана автору А. Ф. Тедеевым.

Чтобы сформулировать основной результат, введем, кроме величин (5), важный для нас показатель

$$\varkappa = \frac{p-1-r}{p(\beta-r)} > 0, \tag{16}$$

относительно которого следует отметить, что он аналогичен показателю, полученному в работе [15] при оценке размеров носителя решения в ситуации, в определенном смысле противоположной рассматриваемой нами, — когда $r > p > 1+\beta$ и первоначально компактный носитель решения начинает расширяться.

Кроме того, определим функцию

$$\varphi_t(x_0) = \frac{1}{\omega_N t^{N\varkappa}} \int\limits_{|x-x_0|<t^{\varkappa}} |u_0(x)|^{\beta} dx \equiv \oint\limits_{B_{t^{\varkappa}}(x_0)} |u_0(x)|^{\beta} dx, \tag{17}$$

где ω_N — объем единичного шара в $\mathbb{R}^N$, а также функцию

$$\varphi_t(\rho) \equiv \sup_{|x_0|=\rho} \varphi_t(x_0). \tag{18}$$

Теорема 1. *Если начальная функция в* (2) *неотрицательна (неположительна), то решение задачи* (1), (2) *обладает свойством мгновенной компактификации носителя тогда и только тогда, когда для начальной функции* $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ *(которая может быть радоновской мерой) выполнено условие* (7) *и*

$$\varphi_t(\rho) \to 0, \qquad \rho \to \infty,$$

при каком-либо $t > 0$ *(в этом случае, как легко проверить, сформулированное условие выполнено при любом* $t > 0$*). При этом для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие, зависящие от* $u_0(x)$*, константы* $t_0 = t_0(\varepsilon)$, γ_0, γ_1 M_1*, что на интервале времени* $[0, t_0]$ *справедливы следующие оценки сверху и снизу размеров носителя решения:*

$$D(t) \leqslant (1+\varepsilon)\varphi_t^{-1}\big(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-r)}\big), \tag{19}$$

$$D(t) \geqslant \varphi_{M_1 t}^{-1}\big(\gamma_1 t^{\beta/(\beta-r)}\big), \tag{20}$$

где, при нестрого монотонной функции $\varphi_t(\rho)$,

$$\varphi_t^{-1}(s) \equiv \inf_{\rho}\{\rho\colon \varphi_t(k) < s, k > \rho\}. \tag{21}$$

Если же начальная функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, произвольно меняет знак, то оценка (19) размера носителя сверху имеет место и в этом случае.

Замечание 1. Из оценки (19) ввиду определения функции φ_t легко следуют оценки (10) и (13) применением неравенства Гельдера для получения (10) и теоремы о среднем для получения (13).

Замечание 2. В соответствии с формулировкой теоремы 1 мы будем в леммах 1–4 считать начальные данные, а следовательно, и решение неотрицательными, не оговаривая это каждый раз отдельно.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 и оценок (19), (20) состоит из трех главных этапов. На первом этапе мы получаем условие обращения решения в ноль в энергетических терминах, а именно справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $0 < R_1 < R_2$, $R_2 = Rt^{\varkappa}$, $R_1 = (1-\sigma)R_2$, $B_{R_i} = B_{R_i}(x_0) = \{x\colon |x - x_0 < R_i|\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$. *Тогда существует константа* $\gamma_2 = \gamma_2(R, \sigma)$ *такая, что если*

$$Y(t/2, R_2) \equiv \sup_{t/2<\tau<t} \int\limits_{B_{R_2}} u^{1+\beta}(x,\tau)\,dx + \int\limits_{t/2}^{t} \int\limits_{B_{R_2}} |\nabla u|^p \,dxd\tau +$$

$$+ \int\limits_{t/2}^{t} \int\limits_{B_{R_2}} u^{1+r}\,dxd\tau \leqslant \gamma_2 t^{(Nd_r + p(1+\beta)/(p(\beta-r))},$$

то $u(x,t) \equiv 0$ *на множестве* $B_{R_1}(x_0) \times [3t/4, t]$.

На втором этапе аналогично [12] получается оценка энергии решения, фигурировавшей в лемме 1, через массу решения и условия обращения решения в ноль выражаются в терминах массы, что сформулировано в следующих двух леммах.

Лемма 2. *Пусть* $0 < r_1 < r_2$, $0 < t_2 < t_1 < t$, B_{r_i} — *шары с центром в* x_0 *радиуса* r_i. *Тогда для решения* $u(x,\tau)$ *задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$Y(t_1, r_1) \equiv \sup_{t_1<\tau<t} \int\limits_{B_{r_1}} u^{1+\beta}(x,\tau)\,dx + \int\limits_{t_1}^{t} \int\limits_{B_{r_1}} |\nabla u|^p dxd\tau + \int\limits_{t_1}^{t} \int\limits_{B_{r_1}} u^{1+r}\,dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\frac{t-t_2}{(t-t_2)^{(k+N)/k}}\left(\sup_{t_2<\tau<t}\int\limits_{B_{r_2}} u^{\beta}dx\right)^{(k+p)/k} + \frac{t-t_2}{(r_2-r_1)^{(k+N)/\beta}}\left(\sup_{t_2<\tau<t}\int\limits_{B_{r_2}} u^{\beta}dx\right)^{p/\beta}\right].$$

Лемма 3. *Пусть* R_1, R_2 *и* $Y(t/2, R_2)$ — *такие же, как в лемме 1,* $R_3 = R_2(1+\sigma)$. *Тогда существует константа* $\gamma_3 > 0$ *такая, что условие леммы 1 выполнено, т. е.* $Y(t/2, R_2) \leqslant \gamma_2 t^{(Nd_r + p(1+\beta))/(p(\beta-r))} \equiv \gamma_2 t^{\nu}$, $\nu \equiv (Nd_r + p(1+\beta))/(p(\beta-r))$, *если*

$$E \equiv E(t, R, \sigma) \equiv \sup_{t/4<\tau<t} \int\limits_{B_{R(1+\sigma)t^{\varkappa}}(x_0)} u^{\beta} dx \leqslant \gamma_3 t^{(\beta/(\beta-r)) + N\varkappa}.$$

На третьем этапе мы получаем локальные оценки массы решения через локальную массу начальной функции. Отметим, что идею подхода к такой локальной оценке мы заимствовали из любезно предоставленной нам неопубликованной пока статьи S. D. Eidelman, S. Kamin, A. F. Tedeev “Asymptotic representation for solutions of the Cauchy problem for quasilinear degenerate parabolic equations”. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Обозначим* $l = \beta/(\beta - r)$ *и пусть* $\sigma \in (0,1)$ *задано. Существуют такие константы* $t_0 = t_0(u_0)$, $C_1 = C_1(u_0)$, $\gamma_4 = \gamma_4(u_0)$, *что для* $t < t_0$, *если* x_0 *таково, что при всех* $y \in B_{C_1 t^{\beta/k}}(x_0)$ *выполнено*

$$\oint\limits_{B_{t^{\varkappa}}(y)} u_0^{\beta}(x)\,dx \equiv \frac{1}{\omega_N t^{N\varkappa}} \int\limits_{B_{t^{\varkappa}}(y)} u_0^{\beta}(x)\,dx \leqslant \gamma_4 t^{l},$$

то выполнено

$$E_{t^{\varkappa},x_0} \equiv \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_{t^{\varkappa}}(x_0)} u^{\beta}(x,\tau)\,dx \leqslant 2 \int\limits_{B_{t^{\varkappa}(1+\sigma)}(x_0)} u_0^{\beta}(x)\,dx \equiv 2\mu_{t^{\varkappa}(1+\sigma)}(x_0).$$

Если начальная функция в (2) неотрицательна, то из приведенных выше лемм легко следует оценка (19) размеров носителя сверху теоремы 1. Если же начальные данные $u_0(x)$ произвольного знака, то

$$-|u_0(x)|^{\beta} \leqslant |u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x) \leqslant |u_0(x)|^{\beta}$$

и оценка размеров носителя сверху следует из уже доказанного в силу принципа сравнения.

Оценку (20) размеров носителя снизу проиллюстрируем на одном частном случае, на котором, как упоминалось выше, достигается наихудшая оценка (т. е. носитель имеет наибольшие размеры). Общий случай рассматривается вполне аналогично. Итак, предположим, что начальная функция представляет собой сумму δ-функций, сосредоточенных в узлах целочисленной решетки, т. е. возьмем начальные данные (11):

$$u_0^{\beta}(x) = \sum_{\overline{n}} \mu_{\overline{n}}\delta(x-\overline{n}).$$

Пусть $t>0$ достаточно мало и фиксировано. Пусть, далее, $\overline{n}$ таково, что $\varphi_t(\overline{n}) \geqslant \gamma_0 t^{\beta/(\beta-r)}$ (если $\mu_{\overline{n}} \to 0$ при $n\to\infty$, то это означает, что $|\overline{n}| \leqslant \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-r)})$). Тогда, считая для определенности $\mu_{\overline{n}}$ положительным, имеем $\mu_{\overline{n}} \geqslant \omega_N\gamma_0 t^{(\beta/(\beta-r))+N\varkappa}$. Более того, будем считать, не ограничивая общности, что $\mu_{\overline{n}} = \omega_N\gamma_0 t^{(\beta/(\beta-r))+N\varkappa}$. Если это не так, мы рассмотрим вспомогательную функцию $\overline{u}(x,\tau)$ — решение задачи (1), (2) с начальными данными, в которых в точке $\overline{n}$ масса $\mu_{\overline{n}}$ заменена на $\omega_N\gamma_0 t^{(\beta/(\beta-r))+N\varkappa}$, причем, по принципу сравнения, $u \geqslant \overline{u}$. Рассмотрим, далее, шар $B_{\overline{n}}$ с центром в точке $\overline{n}$ и радиуса $1/2$. Как хорошо известно, при достаточно малых t носитель решения финитен вокруг точки $\overline{n}$ в шаре $B_{\overline{n}}$ и, следовательно, функция u удовлетворяет в $B_{\overline{n}}$ нулевой задаче Дирихле с начальной функцией $\mu_{\overline{n}}\delta(x-\overline{n})$ (можно также рассматривать нашу функцию как решение задачи Коши с указанными начальными данными на малом отрезке времени), а следовательно, $u \geqslant 0$ в $B_{\overline{n}}$.

Заметим теперь, что для всех точек x_0 этого шара выполнены условия леммы 4. Отсюда следует, что если $|x_0-\overline{n}| > (1+\sigma)t^{\varkappa}$ и $0<\tau<t$, то по лемме 4

$$\int\limits_{|x-x_0|<t^{\varkappa}} u^{\beta}(x,\tau)\,dx \leqslant 2 \int\limits_{|x-x_0|<(1+\sigma)t^{\varkappa}} u_0^{\beta}(x)\,dx = 0,$$

т. е., в частности, $u(x_0,\tau)=0$. Таким образом, на отрезке времени $\tau\in[0,t]$ носитель решения $u(x,\tau)$ в шаре $B_{\overline{n}}$ на самом деле лежит в меньшем шаре $B_t = \{|x-\overline{n}| < (1+\sigma)t^{\varkappa}\}$.

Проинтегрируем теперь уравнение (1) по шару $B_{\overline{n}}$, учитывая, что решение равно нулю в окрестности границы этого шара. Интегрирование по частям в диффузионном слагаемом дает

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{B_{\overline{n}}} u^{\beta}(x,\tau)\,dx + \int\limits_{B_{\overline{n}}} u^{r}(x,\tau)\,dx = 0, \qquad \tau\in[0,t],$$

или, так как $u \equiv 0$ вне B_t,

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{B_t} u^\beta dx + \int\limits_{B_t} u^r dx = 0, \qquad \tau \in [0,t]. \tag{22}$$

Применение неравенства Гельдера дает

$$\int\limits_{B_t} u^r dx \leqslant \left(\int\limits_{B_t} u^\beta dx\right)^{r/\beta}\left(\int\limits_{B_t} dx\right)^{1-r/\beta} = \left(\int\limits_{B_t} u^\beta dx\right)^{r/\beta} Mt^{N\varkappa((\beta-r)/\beta)}, \tag{23}$$

где $M = (1+\sigma)^{N(1-r/\beta)}$. Обозначая теперь $E(\tau) = \int\limits_{B_t} u^\beta(x,\tau)dx$, из (22) и (23) получаем, что

$$\frac{dE}{d\tau} \geqslant -Mt^{N\varkappa((\beta-r)/\beta)}E^{r/\beta},$$

причем $E(0) = \mu_{\overline{n}} = \omega_N\gamma_0 t^{(\beta/(\beta-r))+N\varkappa} \equiv \gamma t^{(\beta/(\beta-r))+N\varkappa}$. Интегрируя это дифференциальное неравенство, приходим к оценке

$$E(\tau)^{(\beta-r)/\beta} \geqslant \mu_{\overline{n}}^{(\beta-r)/\beta} - \left(\frac{\beta-r}{\beta}\right)Mt^{N\varkappa((\beta-r)/\beta)}\tau = \left(\gamma t^{(\beta/(\beta-r))+N\varkappa}\right)^{(\beta-r)/\beta} -$$
$$- \left(\frac{\beta-r}{\beta}\right)Mt^{N\varkappa((\beta-r)/\beta)}\tau = t^{N\varkappa((\beta-r)/\beta)}\left[\gamma^{(\beta-r)/\beta}t - \left(\frac{\beta-r}{\beta}\right)M\tau\right].$$

Положим $\tau_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma^{(\beta-r)/\beta}}{M}\dfrac{\beta}{\beta-r}t \equiv m_0 t$. Тогда

$$E(m_0t) > \left(\frac{\gamma^{(\beta-r)/\beta}}{2}\right)t^{N\varkappa((\beta-r)/\beta)+1} > 0.$$

Отсюда следует, во-первых, что если $\mu_{\overline{n}}$ не стремится к нулю при $|\overline{n}| \to \infty$, то при выборе t достаточно малым существуют $\overline{n}$ со сколь угодно большим $|\overline{n}|$ такие, что $|\mu_{\overline{n}}| \geqslant \omega_N\gamma_0 t^{(\beta/(\beta-r))+N\varkappa}$ и для которых, как доказано, $u(\overline{n}, m_0t) \neq 0$, откуда следует, что носитель решения в момент времени m_0t не компактен, т. е. ввиду произвольности малого t явление мгновенной компактификации носителя отсутствует.

Во-вторых, если $\mu_{\overline{n}} \to 0$ при $|\overline{n}| \to \infty$, то зафиксируем какое-либо $\overline{n} \equiv \overline{n}(t)$ такое, что $|\overline{n}| = \varphi_t^{-1}\left(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-r)}\right)$, т. е. $|\mu_{\overline{n}}| \geqslant \omega_N\gamma_0 t^{\beta/(\beta-r)+N\varkappa}$ и $|\mu_{\overline{n+1}}| < \omega_N\gamma_0 t^{\beta/(\beta-r)+N\varkappa}$, где через $\overline{n+1}$ будем обозначать все целочисленные точки вне шара с центром в нуле радиуса $|\overline{n}|$. Для такого $\overline{n}$ по доказанному $u(\overline{n}, m_0t) \neq 0$. При этом

$$|\mu_{\overline{n}}| \geqslant \omega_N\gamma_0 t^{(\beta/(\beta-r))+N\varkappa} = \omega_N\gamma_0 m_0^{-(\beta/(\beta-r)+N\varkappa)}(m_0t)^{(\beta/(\beta-r))+N\varkappa} \equiv$$
$$\equiv \omega_N M_0(m_0t)^{(\beta/(\beta-r))+N\varkappa},$$

и, аналогично, одновременно

$$|\mu_{\overline{n+1}}| < \omega_N M_0(m_0t)^{(\beta/(\beta-r))+N\varkappa},$$

т.е.

$$\varphi_{m_0t}(\overline{n}) \geqslant M_0(m_0t)^{\beta/(\beta-r)}, \qquad \varphi_{m_0t}(\overline{n+1}) < M_0(m_0t)^{\beta/(\beta-r)}$$

и, следовательно, по определению функции φ_t^{-1},

$$|\overline{n}| = |\overline{n}(t)| = \varphi_{m_0t}^{-1}\big(M_0(m_0t)^{\beta/(\beta-r)}\big), \qquad u(\overline{n}, m_0t) \neq 0.$$

Ввиду произвольности t, обозначая величину m_0t снова через t, видим, что для любого достаточно малого t найдется точка $x_0 = \overline{n}(t/m_0)$ такая, что

$$x_0 = \overline{n}\left(\frac{t}{m_0}\right) : |x_0| = \left|\overline{n}\left(\frac{t}{m_0}\right)\right| = \varphi_t^{-1}\big(M_0t^{\beta/(\beta-r)}\big),$$

и $u(x,t) \neq 0$ в окрестности этой точки. Следовательно, для рассматриваемой начальной функции справедлива оценка снизу размеров носителя (20), а тем самым и (14). Это завершает доказательство теоремы 1.

1. *Kersner R., Shishkov A.* Instantaneous shrinking of the support of energy solutions // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – **198**. – P. 729–750.
2. *Шишков А. Е.* Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка // Мат. сб. – 1999. – **190**, № 12. – С. 129–156.
3. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* The support shrinking properties for solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms // Prepr. – 1994.
4. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* Energy methods for the free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. – Basel: Birkhäuser, 2002. – 334 p.
5. *Ughi M.* Initial behavior of the free boundary for a porous media equation with strong absorption // Adv. Math. Sci. and Appl. – 2001. – **11**, No 1. – P. 333–345.
6. *Kalashnikov A. S.* On the dependence of properties of solutions of parabolic equations in unbounded domains on the behavior of the coefficients at infinity // Math. USSR Sb. – 1986. – **53**. – P. 399–410.
7. *Kalashnikov A. S.* On the behavior of solutions of the Cauchy problem for parabolic systems with nonlinear dissipation near the initial hyperplane // Trudy Sem. Petrovsk. – 1992. – **16**. – P. 106–117.
8. *Абдуллаев У. Г.* О мгновенном сжатии носителя решения нелинейного вырождающегося параболического уравнения // Мат. заметки. – 1998. – **63**, № 3. – С. 323–331.
9. *Abdullaev U. G.* Exact local estimates for the supports of solutions in problems for nonlinear parabolic equations // Mat. Sb. – 1995. – **186**, No 8. – P. 3–24.
10. *Ishige Kazuhiro.* On the existence of solutions of the Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation // SIAM J. Math. Anal. – 1996. – **27**, No 5. – P. 1235–1260.
11. *Fan H. J.* Cauchy problem of some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure // Acta math. sinica. Engl. Ser. – 2004. – **20**, No 4. – P. 663–682.
12. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Adv. Different. Equat. – 2005. – **10**, No 1. – P. 89–120.
13. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Finite speed of propagation for the thin film equation and other higher order parabolic equations with general nonlinearity // Interfaces and Free Boundaries. – 2001. – **3**, No 3. – P. 233–264.
14. *Andreucci D., Tedeev A. F.* A Fujita type result for a degenerate Neumann problem in domains with non compact boundary // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **231**. – P. 543–567.
15. *Bernis F.* Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. – 1986. – **104**. – P. 1–19.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 23.04.2007