УДК 517.98

М. І. Дмитришин, О. В. Лопушанський

Абстрактні простори Бєсова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

We introduce the abstract quasinormed Besov spaces which are based on the concept of exponential type vectors. In the case of a differentiation operator, these spaces coincide with their classical analogs. Using the abstract Besov spaces, we investigate the problem of best approximations of a given closed linear operator in a Banach space by exponential type vectors. Applications of the best approximations by spectral subspaces to the problem are also shown.

Користуючись векторами експоненціального типу замкненого лінійного оператора в банаховому просторі, введеними в [1], ми впроваджуємо і досліджуємо поняття квазінормованого абстрактного простору Бєсова, асоційованого з довільним таким оператором. У випадку оператора диференціювання, заданого в просторі $L_p(\mathbb{R})$, введені абстрактні простори Бєсова збігаються з класичними. Наведено також застосування поняття абстрактного простору Бєсова до проблеми найкращих апроксимацій елементів банахового простору векторами експоненціального типу деякого заданого замкненого оператора. Відзначимо, що постановка і розв'язання згаданої проблеми для деяких класів операторів міститься в [2–4]. Одержаний у цьому напрямку результат сформульований нами в теоремі 3 у вигляді нерівностей, які з використанням квазінорм відповідних абстрактних просторів Бєсова оцінюють мінімальну відстань від заданого вектора до підпростору векторів експоненціального типу з фіксованими індексами. У випадку оператора диференціювання в просторі $L_p(\mathbb{R})$ ці нерівності точно збігаються з відомими нерівностями Бернштейна і Джексона для класичного простору Бєсова. Теорема 4 є прикладом застосування теореми 3 до проблеми найкращих апроксимацій спектральними просторами для операторів з дискретним спектром.

1. Основні позначення. Нехай в комплексному банаховому просторі $\mathfrak{X}$ з нормою $\|\cdot\|$ задано замкнений необмежений лінійний оператор

$$A\colon \mathcal{C}^1(A) \subset \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$$

із щільною областю визначення $\mathcal{C}^1(A)$. Області визначення цілих степенів A^k позначимо

$$\mathcal{C}^{k+1}(A) = \{x \in \mathcal{C}^k(A)\colon A^k x \in \mathcal{C}^k(A)\}$$

і покладемо

$$\mathcal{C}^\infty(A) = \bigcap\{\mathcal{C}^k(A)\colon k \in \mathbb{N}\}.$$

Надалі припускаємо, що для резольвентної множини оператора A виконується умова $\rho(A) \neq \neq \varnothing$. Тоді відповідно до [5, теорема 1.1] виконується умова щільності $\overline{\mathcal{C}^\infty(A)} = \mathfrak{X}$ і оператори A^k, $k \in \mathbb{N}$, є замкненими в $\mathfrak{X}$.

Додержуючись [1], елементи підпростору

$$\mathcal{E}(A) := \bigcup_{t>0} \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} \{x \in \mathcal{C}^\infty(A)\colon \|A^k x\| \leqslant ct^k\},$$

де $c = c(x, A) > 0$ є деяка постійна і $A^0 = I$ — одиничний оператор в $\mathfrak{X}$, назвемо *векторами експоненціального типу оператора* A.

Для будь-яких чисел $1 \leqslant p \leqslant \infty$ і $1 < q < \infty$ розглянемо простір Лоренца [6, 1.18.3]

$$l_{q,p} = \{a\colon \|a\|_{l_{q,p}} < \infty\}, \qquad l_p := l_{p,p}$$

усіх послідовностей $a = \{a_k \in \mathfrak{X}\colon k \in \mathbb{Z}_+\}$ з нормою

$$\|a\|_{l_{q,p}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} (k+1)^{p/q-1} \|a_k^*\|^p\right)^{1/p} & : \quad 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} (k+1)^{1/q} \|a_k^*\| & : \quad p = \infty, \end{cases}$$

де послідовність $\{a_k^* \in \mathfrak{X}\colon k \in \mathbb{Z}_+\}$ складається з елементів a_k, занумерованих у порядку незростання норм, тобто

$$\|a_0^*\| \geqslant \|a_1^*\| \geqslant \|a_2^*\| \geqslant \cdots .$$

Якщо $p = q = 1$ або $p = q = \infty$, то покладемо $l_{q,p} = l_1$ або $l_{q,p} = l_\infty$ відповідно. Власне у цьому сенсі ми кажемо, що підпростори $l_{q,p}$ визначені для всіх $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty$.

Використаємо метод дійсної інтерполяції для квазінормованих просторів [7, §3.11], з цією метою нагадаємо означення інтерполяційного простору. Нехай задано пари чисел $0 < \theta < 1$ та $1 \leqslant p \leqslant \infty$ або $0 < \theta \leqslant 1$ та $p = \infty$. Для пари квазінормованих просторів $\{X, |\cdot|_X\}$ $\{Y, |\cdot|_Y\}$ інтерполяційний простір визначається як підпростір вигляду

$$(X, Y)_{\theta,p} = \{a \in X + Y\colon |a|_{(X,Y)_{\theta,p}} < \infty\},$$

наділений квазінормою

$$|a|_{(X,Y)_{\theta,p}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty [\tau^{-\theta} K(\tau, a; X, Y)]^p \dfrac{d\tau}{\tau}\right)^{1/p} & : \quad p < \infty, \\ \sup\limits_{0<\tau<\infty} \tau^{-\theta} K(\tau, a; X, Y) & : \quad p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

де $K(\tau, a; X, Y) := \inf\limits_{a=x+y} (|x|_X + \tau|y|_Y)$. Зрозуміло, що інтерполяційний простір $(X, Y)_{\theta,p}$ знаходиться між $X \bigcap Y$ та $X + Y$.

2. Квазінормовані підпростори векторів експоненціального типу. Наведемо деякі нові властивості векторів експоненціального типу. Нехай $0 < t < \infty$ і $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Якщо $a_k = (A/t)^k x$, то за допомогою лінійного відображення

$$\pi_t\colon \mathcal{C}^\infty(A) \ni x \longrightarrow a = \{(A/t)^k x\colon k \in \mathbb{Z}_+\}$$

визначаємо підпростір

$$\mathcal{E}_{q,p}^t(A) := \{x \in \mathcal{C}^\infty(A)\colon \|\pi_t(x)\|_{l_{q,p}} < \infty\}, \qquad \mathcal{E}_p^t(A) := \mathcal{E}_{p,p}^t(A),$$

в якому задаємо норму

$$\|x\|_{\mathcal{E}^t_{q,p}} := \|\pi_t(x)\|_{l_{q,p}}, \qquad x \in \mathcal{E}^t_{q,p}(A).$$

Очевидно, що $\mathcal{E}^t_{q,p}(A)$ є ізометричним деякому підпростору в $l_{q,p}$.

Теорема 1. *(i) Підпростір $\mathcal{E}^t_{q,p}(A)$ є інваріантний відносно оператора A і вкладення*

$$\mathcal{E}^t_{q,p}(A) \hookrightarrow \mathfrak{X}, \qquad \mathcal{E}^t_{q,p}(A) \hookrightarrow \mathcal{E}^\tau_{q,p}(A), \qquad \tau > t, \tag{2}$$

неперервні.

(ii) Звуження $A\,|_{\mathcal{E}^t_{q,p}}$ оператора A на підпростір $\mathcal{E}^t_{q,p}(A)$ є обмеженим оператором, при цьому задовольняється нерівність

$$\|A\,|_{\mathcal{E}^t_{q,p}}\| \leqslant t. \tag{3}$$

(iii) Спектр оператора A має властивість

$$\sigma(A\,|_{\mathcal{E}^t_{q,p}}) \subset \sigma(A).$$

(iv) Для кожного $\tau > t$ справедливі вкладення

$$\mathcal{E}^t_1(A) \subset \mathcal{E}^t_\infty(A) \subset \mathcal{E}^\tau_1(A). \tag{4}$$

(v) Справедлива рівність банахових просторів (з точністю до еквівалентних норм)

$$(\mathcal{E}^t_1(A), \mathcal{E}^t_\infty(A))_{1-1/q,p} = \mathcal{E}^t_{q,p}(A), \qquad 1 < q < \infty, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{5}$$

і, як наслідок,

$$\mathcal{E}^t_1(A) \subset \mathcal{E}^t_{q,p}(A) \subset \mathcal{E}^t_\infty(A). \tag{6}$$

(vi) Простори $\mathcal{E}^t_{q,p}(A)$ — повні.

(vii) Справедливі рівності

$$\mathcal{E}(A) = \bigcup_{t>0} \mathcal{E}^t_{q,p}(A) = \bigcup_{t>0} \mathcal{E}^t_1(A) = \bigcup_{t>0} \mathcal{E}^t_\infty(A).$$

(viii) Функція

$$|x|_{q,p} := \|x\| + \inf\{t > 0 \colon x \in \mathcal{E}^t_{q,p}(A)\}$$

є квазінормою на просторі $\mathcal{E}(A)$, причому задовольняється нерівність

$$|x + y|_{q,p} \leqslant |x|_{q,p} + |y|_{q,p}, \qquad x, y \in \mathcal{E}(A).$$

3. Означення абстрактного простору Бєсова. Нехай $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Підпростір $\mathcal{E}(A)$, наділений квазінормою $|\cdot|_{q,p}$, позначимо $\mathcal{E}_{q,p}(A)$. У випадку $q = p$ покладемо $\mathcal{E}_{p,p}(A) = \mathcal{E}_p(A)$. Визначимо допоміжний функціонал

$$E_{q,p}(t, x) = \inf\{\|x - x^0\| \colon x^0 \in \mathcal{E}_{q,p}(A),\ |x^0|_{q,p} < t\}, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Для пари чисел $0 < \alpha < \infty$ та $0 < \tau \leqslant \infty$ або $0 \leqslant \alpha < \infty$ та $\tau = \infty$ розглянемо шкалу апроксимаційних просторів

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A) = \{x \in \mathfrak{X}\colon |x|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}} < \infty\}, \qquad \mathcal{B}^{\alpha}_{p,\tau}(A) := \mathcal{B}^{\alpha}_{p,p,\tau}(A),$$

породжену функціоналом $E_{q,p}$, де у відповідності до [7, лема 7.1.6] функція

$$|x|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{\infty} [t^{\alpha} E_{q,p}(t,x)]^{\tau} \dfrac{dt}{t}\right)^{1/\tau} & : \quad 0 < \tau < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^{\alpha} E_{q,p}(t,x) & : \quad \tau = \infty \end{cases}$$

є квазінормою на $\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A)$.

Простір $\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A)$, наділений квазінормою $|\cdot|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}}$, назвемо *абстрактним простором Бєсова.*

Одержані властивості таких просторів Бєсова виводяться з відомих інтерполяційних теорем.

Теорема 2. *Нехай $1 \leqslant p,\, q \leqslant \infty$, $0 < \vartheta \leqslant 1$ і нехай задано пари індексів $0 < \alpha, \alpha_0, \alpha_1 < \infty$ та $0 < \tau, \tau_0, \tau_1 \leqslant \infty$ або $0 \leqslant \alpha, \alpha_0, \alpha_1 < \infty$ та $\tau, \tau_0, \tau_1 = \infty$.*

(i) Якщо $[\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A)]^{\vartheta}$ позначає простір $\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A)$, наділений квазінормою $|x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}}$, $x \in \mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A)$, то з точністю до еквівалентних квазінорм справедлива рівність просторів

$$[\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A)]^{\vartheta} = (\mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,g}, \qquad \text{де} \qquad \vartheta = \frac{1}{\alpha+1}, \qquad \tau = g\vartheta. \tag{7}$$

(ii) Якщо $\alpha = (1-\vartheta)\alpha_0 + \vartheta\alpha_1$ і $\alpha_0 \neq \alpha_1$, то

$$(\mathcal{B}^{\alpha_0}_{q,p,\tau_0}(A),\ \mathcal{B}^{\alpha_1}_{q,p,\tau_1}(A))_{\vartheta,\tau} = \mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A) \tag{8}$$

і існують постійні c_1, c_2 такі, що

$$|x|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}} \leqslant c_1 |x|^{1-\vartheta}_{\mathcal{B}^{\alpha_0}_{q,p,\tau_0}} |x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}^{\alpha_1}_{q,p,\tau_1}}, \qquad x \in \mathcal{B}^{\alpha_0}_{q,p,\tau_0}(A) \bigcap \mathcal{B}^{\alpha_1}_{q,p,\tau_1}(A), \tag{9}$$

$$K(t, x; \mathcal{B}^{\alpha_0}_{q,p,\tau_0}, \mathcal{B}^{\alpha_1}_{q,p,\tau_1}) \leqslant c_2 t^{\vartheta} |x|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}}, \qquad x \in \mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A), \qquad t > 0. \tag{10}$$

(iii) Якщо $\tau \leqslant \rho$, то справедливі неперервні вкладення

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A) \hookrightarrow \mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\rho}(A). \tag{11}$$

4. Найкращі апроксимації векторами експоненціального типу. Розглянемо проблему найкращої апроксимації довільного елемента банахового простору $\mathfrak{X}$ елементами A-інваріантних підпросторів $\mathcal{E}^t_{q,p}(A)$ з фіксованими індексами $1 \leqslant q, p \leqslant \infty$ та $t > 0$. Для цього оцінимо відстань

$$d_{q,p}(t,x) = \inf\{\|x - x^0\|\colon x^0 \in \mathcal{E}^t_{q,p}(A)\}, \qquad x \in \mathfrak{X}$$

між деяким заданим елементом x і підпростором $\mathcal{E}^t_{q,p}(A)$.

Теорема 3. *Для кожної пари індексів* $0 < \alpha < \infty$ *та* $0 < \tau \leqslant \infty$ *або* $0 \leqslant \alpha < \infty$ *та* $\tau = \infty$ *існують постійні* $c_1(\alpha,\tau)$ *і* $c_2(\alpha,\tau)$ *такі, що задовольняються нерівності*

$$|x|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}} \leqslant c_1 |x|^{\alpha}_{q,p} \|x\|, \qquad x \in \mathcal{E}_{p,q}(A), \tag{12}$$

$$d_{q,p}(t,x) \leqslant c_2 t^{-\alpha} |x|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}}, \qquad x \in \mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A). \tag{13}$$

Доведення. Відповідно до теореми 2(i) при $\vartheta = 1/(\alpha+1)$ та $\tau = g\vartheta$ простір $[\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A)]^{\vartheta}$ є інтерполяційним між $\mathcal{E}_{q,p}(A)$ і $\mathfrak{X}$. Як наслідок,

$$\mathcal{E}_{q,p}(A) \subset [\mathcal{B}^{\alpha}_{q,p,\tau}(A)]^{\vartheta} = (\mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,g} \subset \mathfrak{X}.$$

Згідно з [7, теорема 3.11.4(b)] для деякої постійної $c(\vartheta,g)$ маємо

$$|x|_{(\mathcal{E}_{q,p},\mathfrak{X})_{\vartheta,g}} \leqslant c|x|^{1-\vartheta}_{q,p} \|x\|^{\vartheta}, \qquad x \in \mathcal{E}_{q,p}(A).$$

З цієї нерівності та ізоморфізму (7) випливає існування такої постійної $c_1(\alpha,\tau)$, що виконується нерівність (12). Згідно з [7, теорема 3.11.4(a)] для деякої постійної $c(\vartheta,g)$ маємо

$$K(t,x;\mathcal{E}_{q,p},\mathfrak{X}) \leqslant c t^{\vartheta} |x|_{(\mathcal{E}_{q,p},\mathfrak{X})_{\vartheta,g}}, \qquad x \in (\mathcal{E}_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,g}.$$

Тому, відповідно до ізоморфізму (7), існує постійна $c_0(\alpha,\tau)$ така, що

$$K(t,x;\mathcal{E}_{q,p},\mathfrak{X}) \leqslant c_0 t^{\vartheta} |x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}}, \qquad x \in \mathcal{B}_{q,p,\tau}(A).$$

Покладемо $K_\infty(t,x;\mathcal{E}_{q,p},\mathfrak{X}) := \inf\limits_{x=x^0+x^1} \max\{|x^0|_{q,p}, t\|x^1\|\}$, де $x^0 \in \mathcal{E}_{q,p}(A)$, $x^1 \in \mathfrak{X}$. Оскільки $K_\infty(t,x;\mathcal{E}_{q,p},\mathfrak{X}) \leqslant K(t,x;\mathcal{E}_{q,p},\mathfrak{X})$, то

$$t^{-\vartheta} K_\infty(t,x;\mathcal{E}_{q,p},\mathfrak{X}) \leqslant c_0 |x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}}, \qquad x \in \mathcal{B}_{q,p,\tau}(A). \tag{14}$$

Згідно з [7, лема 7.1.2] для кожного $t > 0$ існує $s > 0$ таке, що

$$K_\infty(t,x;\mathcal{E}_{q,p},\mathfrak{X}) = s, \qquad E_{q,p}(s+0,x) \leqslant \frac{s}{t}.$$

Для кожного $s_1 > 0$ існує $t > 0$ таке, що $s_1 \leqslant K_\infty(t,x;\mathcal{E}_{q,p},\mathfrak{X}) = s$. При фіксованому x функція $E_{q,p}(t,x)$ є незростаюча, отже,

$$E_{q,p}(s,x) \leqslant E_{q,p}(s_1+0,x) \leqslant \frac{s_1}{t}.$$

Тому маємо $[E_{q,p}(s,x)]^{\vartheta} \leqslant t^{-\vartheta} {s_1}^{\vartheta} \leqslant t^{-\vartheta} s_1 s^{\vartheta-1}$ і, таким чином,

$$s^{1-\vartheta} [E_{q,p}(s,x)]^{\vartheta} \leqslant t^{-\vartheta} s_1 \leqslant t^{-\vartheta} K_\infty(t,x;\mathcal{E}_{q,p},\mathfrak{X}).$$

Застосовуючи (14), отримуємо

$$s^{1-\vartheta} [E_{q,p}(s,x)]^{\vartheta} \leqslant c_0 |x|^{\vartheta}_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}}.$$

Позначаючи $\alpha = (1-\theta)/\theta$, маємо

$$s^{\alpha} E_{q,p}(s,x) \leqslant c_0^{1/\vartheta} |x|_{\mathcal{B}_{q,p,\tau}}, \qquad x \in \mathcal{B}_{q,p,\tau}(A). \tag{15}$$

Якщо $|x^0|_{q,p} = r(x^0) + \|x^0\| < s$, то $r(x^0) < s - \|x^0\|$, де покладено $r(x^0) = \inf\{t > 0\colon x^0 \in \in \mathcal{E}^t_{q,p}(A)\}$. Тому $x^0 \in \mathcal{E}^t_{q,p}(A)$ для такого $t > 0$, що $r(x^0) < t < s - \|x^0\|$. Згідно з теоремою 1(i) маємо $\mathcal{E}^t_{q,p}(A) \subset \mathcal{E}^s_{q,p}(A)$, отже, $x^0 \in \mathcal{E}^s_{q,p}(A)$. Таким чином, виконується нерівність

$$d_{q,p}(s,x) \leqslant E_{q,p}(s,x), \qquad x \in \mathfrak{X}, \qquad s > 0. \tag{16}$$

Покладаючи $c_2 = c_0^{1/\vartheta}$ в (15) і використовуючи (16), отримуємо (13).

Теорема 4. *Нехай оператор A має дискретний спектр $\sigma(A) = \{\lambda_n \in \mathbb{C}\colon n \in \mathbb{N}\}$ і $\mathcal{R}(\lambda_n)$ — спектральний підпростір, що відповідає власному значенню λ_n. Позначимо*

$$\mathcal{R}^t = \operatorname{span}\{\mathcal{R}(\lambda_n)\colon |\lambda_n| < t\}.$$

Для кожної пари індексів $0 < \alpha < \infty$ та $0 < \tau \leqslant \infty$ або $0 \leqslant \alpha < \infty$ та $\tau = \infty$ існує постійна $c(\alpha,\tau)$ така, що виконується нерівність

$$\inf\{\|x - x^0\|\colon x^0 \in \mathcal{R}^t\} \leqslant ct^{-\alpha}|x|_{\mathcal{B}^\alpha_{1,\tau}}, \qquad x \in \mathcal{B}^\alpha_{1,\tau}(A). \tag{17}$$

Доведення. У [8, 9] доведено, що у випадку, якщо оператор A має дискретний спектр, виконується рівність

$$\mathcal{E}^t_1(A) = \mathcal{R}^t.$$

Таким чином, нерівність (13) безпосередньо дає оцінку (17) відстані від вектора $x \in \mathcal{B}^\alpha_{1,\tau}(A)$ до спектрального підпростору $\mathcal{R}^t$.

5. Зв'язок з класичними результатами. Нехай тепер оператор A є замиканням оператора диференціювання D в просторі $\mathfrak{X} = L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, яке далі позначаємо через D_p.

Теорема 5. *Нехай для кожної пари індексів $0 < \alpha < \infty$ та $0 < \tau \leqslant \infty$ або $0 \leqslant \alpha < \infty$ та $\tau = \infty$ задано класичний простір Бєсова $B^\alpha_{p,\tau}(\mathbb{R})$. Справедливий такий ізоморфізм:*

$$\mathcal{B}^\alpha_{\infty,\tau}(D_p) = B^\alpha_{p,\tau}(\mathbb{R}).$$

Відповідно до [7, §7.2] на просторі $\mathcal{E}(D_p)$ визначимо квазінорму

$$|u|_{\mathcal{E}(D_p)} = \|u\|_{L_p(\mathbb{R})} + \sup\{|\zeta|\colon \zeta \in \operatorname{supp}\widehat{u}\},$$

де $\operatorname{supp}\widehat{u}$ є носій перетворення Фур'є $\widehat{u}$ функції $u \in \mathcal{E}(D_p)$. З теорем 3, 5 та рівності

$$\sup\{|\zeta|\colon \zeta \in \operatorname{supp}\widehat{u}\} = \inf\{t > 0\colon u \in \mathcal{E}^t_\infty(D_p)\}$$

негайно випливає

Наслідок 1. *Існують постійні $c_1(\alpha,\tau)$ і $c_2(\alpha,\tau)$ такі, що*

$$\|u\|_{B^\alpha_{p,\tau}(\mathbb{R})} \leqslant c_1|u|^\alpha_{\mathcal{E}(D_p)}\|u\|_{L_p(\mathbb{R})}, \qquad u \in \mathcal{E}(D_p), \tag{18}$$

$$d(t,u) \leqslant c_2t^{-\alpha}\|u\|_{B^\alpha_{p,\tau}(\mathbb{R})}, \qquad u \in B^\alpha_{p,\tau}(\mathbb{R}), \tag{19}$$

де $d(t,u) = \inf\{\|u-v\|_{L_p(\mathbb{R})}\colon v \in \mathcal{M}^t_p\} = \inf\{\|u-v\|_{L_p(\mathbb{R})}\colon v \in \mathcal{E}^t_\infty(D_p)\}$, $\mathcal{M}^t_p$ — простір цілих функцій експоненціального типу $t > 0$, звуження яких на $\mathbb{R}$ належить $L_p(\mathbb{R})$.

Нерівності (18) і (19) збігаються відповідно з відомими нерівностями Бернштейна і Джексона у формі, що представлена в [7, §7.2].

1. *Радыно Я. В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 9. – С. 1559–1569.
2. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 616–628.
3. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Операторный подход к вопросам аппроксимации // Алгебра и анализ. – 1997. – **9**, № 6. – С. 90–108.
4. *Горбачук М. Л.* Ознаки повноти множини цілих векторів експоненціального типу необмеженого оператора // Доп. НАН України. – 2001. – № 6. – С. 7–11.
5. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, № 3. – С. 55–91.
6. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. – Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1995. – 664 p.
7. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces. – Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1976. – 262 p.
8. *Dmytryshyn M., Lopushansky O.* Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum // Математичні студії. Праці Львів. мат. т-ва. – 1998. – **9**, No 1. – С. 70–77.
9. *Dmytryshyn M., Lopushansky O.* Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum // General Topology in Banach Spaces. – Huntigton, New York: Nova Sci. Publ., 2001. – P. 137–145.

Прикарпатський національний університет
ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 02.04.2007

УДК 517.988

Член-кореспондент НАН України **В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, І. І. Демків**

Про континуальні вузли інтерполювання формул типу Ньютона та Ерміта в лінійних топологічних просторах

Interpolation formulas of the Hermite and Newton types on a continual set of knots which depend on continuous scalar parameters are considered. These formulas for nonlinear operators in the linear topological space are constructed and investigated. They provide the correspondence of "input" and "output" continual data as distinct from the previously known interpolation formulas.

Побудові та дослідженню інтерполяційних поліномів в абстрактних лінійних просторах присвячено ряд робіт [1–8]. Ці питання вивчалися також дослідниками так званої "Kergin interpolation" [9–12 та ін.]. Тут слід відзначити, що інтерполянт Кергіна та подальші його узагальнення з точністю до заміни змінних інтегрування фігурували ще у статті С. Ю. Ульма, В. В. Полля [1] у 1969 р. У той час як робота P. Kergin [12] з'явилась тільки у 1980 р. Зауважимо, що у більшості з вказаних робіт [1–3, 6–12] для побудови операторних інтерполянтів використовувалась континуальна інформація про оператор, який інтерполюється. Однак ці інтерполянти задовольняють умови інтерполювання тільки на скінченній множині вузлів, тобто має місце неузгодженість вхідної та вихідної інформації, що не є природним.