1. *Радыно Я. В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 9. – С. 1559–1569.
2. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 616–628.
3. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Операторный подход к вопросам аппроксимации // Алгебра и анализ. – 1997. – **9**, № 6. – С. 90–108.
4. *Горбачук М. Л.* Ознаки повноти множини цілих векторів експоненціального типу необмеженого оператора // Доп. НАН України. – 2001. – № 6. – С. 7–11.
5. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, № 3. – С. 55–91.
6. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. – Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1995. – 664 p.
7. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces. – Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1976. – 262 p.
8. *Dmytryshyn M., Lopushansky O.* Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum // Математичні студії. Праці Львів. мат. т-ва. – 1998. – **9**, No 1. – С. 70–77.
9. *Dmytryshyn M., Lopushansky O.* Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum // General Topology in Banach Spaces. – Huntigton, New York: Nova Sci. Publ., 2001. – P. 137–145.

Прикарпатський національний університет
ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 02.04.2007

УДК 517.988

Член-кореспондент НАН України **В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, І. І. Демків**

Про континуальні вузли інтерполювання формул типу Ньютона та Ерміта в лінійних топологічних просторах

Interpolation formulas of the Hermite and Newton types on a continual set of knots which depend on continuous scalar parameters are considered. These formulas for nonlinear operators in the linear topological space are constructed and investigated. They provide the correspondence of "input" and "output" continual data as distinct from the previously known interpolation formulas.

Побудові та дослідженню інтерполяційних поліномів в абстрактних лінійних просторах присвячено ряд робіт [1–8]. Ці питання вивчалися також дослідниками так званої "Kergin interpolation" [9–12 та ін.]. Тут слід відзначити, що інтерполянт Кергіна та подальші його узагальнення з точністю до заміни змінних інтегрування фігурували ще у статті С. Ю. Ульма, В. В. Полля [1] у 1969 р. У той час як робота P. Kergin [12] з'явилась тільки у 1980 р. Зауважимо, що у більшості з вказаних робіт [1–3, 6–12] для побудови операторних інтерполянтів використовувалась континуальна інформація про оператор, який інтерполюється. Однак ці інтерполянти задовольняють умови інтерполювання тільки на скінченній множині вузлів, тобто має місце неузгодженість вхідної та вихідної інформації, що не є природним.

У даній роботі на основі робіт [1, 2] для нелінійного оператора $F\colon X \to Y$ будуються та досліджуються інтерполяційні формули типу Ньютона і Ерміта з континуальними вузлами

$$\overline{x}_k(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k) = x_0 + \sum_{i=1}^{k} g_{\xi_i}(x_i - x_{i-1}), \qquad k = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

де x_i, $i = 0, \dots, n$, — фіксовані елементи з X; $b \geqslant \xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \dots \geqslant \xi_n \geqslant a$, ξ_i — параметри, що неперервно змінюються на відрізку $[a, b]$; X, Y — лінійні топологічні простори; g_ξ — лінійний оператор з X в X, який залежить від числового параметра $\xi \in [a, b]$ і такий, що

$$g_a = 0, \qquad g_b = I. \tag{2}$$

Тут 0 — нульовий оператор, I — тотожний оператор. Однопараметричну множину операторів $g_\xi\colon X \to X$ з властивостями (2) будемо надалі позначати через G. Те, що множина G не є пустою, показує такий приклад: $g_\xi = \xi I$. З приводу інших прикладів операторів $g_\xi \in G$ див. [2, 3, 7]. При цьому інтерполяційні умови для формул типу Ньютона повинні мати вигляд

$$P_n^N(\overline{x}_k(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k)) = F(\overline{x}_k(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k)), \qquad k = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

а для формул типу Ерміта

$$P_{2n+1}^E(\overline{x}_{2k}) = F_{2n+1}^E(\overline{x}_{2k}), \tag{4}$$

$$P_{2n+1}^{E'}(\overline{x}_{2k})v_k = F_{2n+1}^{E'}(\overline{x}_{2k})v_k, \qquad \forall v_k \in X, k = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

де $P_{2n+1}^E(x)$ — поліноми типу Ерміта або поліноми типу Ньютона з двократними вузлами $x_1 = x_0, x_3 = x_2, \dots, x_{2n+1} = x_{2n}$,

$$\overline{x}_{2k} = \overline{x}_{2k}(\xi_2, \xi_4, \dots, \xi_{2k}) = x_0 + \sum_{i=1}^{k} g_{\xi_{2i}}(x_{2i} - x_{2i-2}). \tag{6}$$

Нехай F — оператор, що диференційований за Гато у точці $z_i(\tau)$ за напрямком $g'_{\tau_i}(h)$, задовольняє умову

$$F(z_i(\tau)) + \lambda g'_{\tau_i}(h_i) - F(z_i(\tau + \lambda)) = o(\lambda), \qquad \lambda \to 0, \tag{7}$$

де $z_i(\tau) = x_{i-1} + g_{\tau_i}(h_i)$, x_{i-1}, $h_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді буде мати місце формула [7]

$$F'(z_i(\tau))g'_{\tau_i}(h) = \frac{d}{d\tau}F(z_i(\tau)), \tag{8}$$

з використанням якої показано, що поліном

$$P_n^N(x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{k-1}} F^{(k)}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{k} g_{\tau_i}(x_i - x_{i-1})\right) dg_{\tau_k}(x - x_{k-1}) \times$$
$$\times\, dg_{\tau_{k-1}}(x - x_{k-2}) \cdots dg_{\tau_1}(x - x_0) \tag{9}$$

буде поліномом типу Ньютона з вузлами $x_0, x_1, \ldots, x_n$, тобто задовольнятиме умови

$$P_n^N(x_i) = F(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{10}$$

якщо інтеграли в (9) існують.

Проте формула (9), взагалі кажучи, має істотний недолік. У ній континуальна інформація про оператор не узгоджена із скінченною кількістю інтерполяційних умов (10). Щоб позбутися цього недоліку, треба розв'язати таку задачу.

Задача про континуальне інтерполювання. Знайти умови, додаткові до (2), при виконанні яких мали б місце континуальні інтерполяційні умови (3).

Очевидно, що якщо ці умови знайдені, то вони одночасно будуть забезпечувати інтерполяційні умови (4), (5) для відповідного полінома типу Ерміта.

Розв'язок задачі. Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай оператор F n разів диференційований за Гато, $g_\tau \in G$, існують інтеграли, що входять у* (9)*. Тоді для того щоб інтерполяційний поліном* (9) *задовольняв континуальні інтерполяційні умови* (3)*, достатньо, щоб оператор g_τ мав такі властивості:*

$$\begin{aligned} &g_\tau g_\xi = g_s, \qquad s = \min(\tau, \xi), \\ &g_\tau = 0, \qquad \tau \leqslant a, \qquad g_\tau = I, \qquad \tau \geqslant b. \end{aligned} \tag{11}$$

Доведення. Нехай оператор g_τ задовольняє умови теореми. Запишемо залишковий член формули (9) у вигляді

$$R_n^N(x) = \int\limits_a^b \int\limits_a^{\tau_1} \cdots \int\limits_a^{\tau_n} F^{(n+1)}\left(x_0 + \sum_{i=1}^n g_{\tau_i}(x_i - x_{i-1}) + g_{\tau_{n+1}}(x - x_n)\right) dg_{\tau_{n+1}}(x - x_n) \times$$
$$\times\, dg_{\tau_n}(x - x_{n-1}) \cdots dg_{\tau_1}(x - x_0).$$

Підставимо в останню формулу замість x континуальний вузол

$$\overline{x}_n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = x_0 + \sum_{i=1}^n g_{\xi_i}(x_i - x_{i-1})$$

і врахуємо, згідно з (11), що $dg_{\tau_i}(\overline{x}_n - x_{i-1}) = 0$, $\xi_i \leqslant \tau_i \leqslant \tau_{i-1}$. Тоді будемо мати

$$R_n^N(\overline{x}_n) = \int\limits_a^{\xi_1}\int\limits_a^{\xi_2} \cdots \int\limits_a^{\xi_n}\int\limits_a^{\tau_n} F^{(n+1)}\left(x_0 + \sum_{i=1}^n g_{\tau_i}(x_i - x_{i-1}) + g_{\tau_{n+1}}(\overline{x}_n - x_n)\right) dg_{\tau_{n+1}}(\overline{x}_n - x_n) \times$$
$$\times\, dg_{\tau_n}(\overline{x}_n - x_{n-1}) \cdots dg_{\tau_1}(\overline{x}_n - x_0).$$

З урахуванням того, що

$$\tau_{n+1} \leqslant \tau_n \leqslant \xi_n \leqslant \xi_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \xi_1 \leqslant b,$$

маємо

$$g_{\tau_{n+1}} g_{\xi_i} = g_{\tau_{n+1}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отже,

$$dg_{\tau_{n+1}}(\overline{x}_n - x_n) = dg_{\tau_{n+1}}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} g_{\xi_i}(x_i - x_{i-1}) - x_n\right) =$$

$$= dg_{\tau_{n+1}}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) - x_n\right) = dg_{\tau_{n+1}}(0) = 0,$$

що і доводить твердження теореми.

Далі на основі інтерполяційного полінома типу Ньютона $P_{2n+1}^N(x)$ з вузлами $x_0, x_1, \ldots,$ $x_{2n+1} \in X$

$$P_{2n+1}^N(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \int_a^b \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{k-1}} F^{(k)}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{k} g_{\tau_i}(x_i - x_{i-1})\right) dg_{\tau_k}(x - x_{k-1}) \times$$
$$\times\, dg_{\tau_{k-1}}(x - x_{k-2}) \cdots dg_{\tau_1}(x - x_0)$$

побудуємо поліном з двократними вузлами (поліном типу Ерміта) при $x_{2i+1} = x_{2i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$:

$$P_{2n+1}^E(x) = F(x_0) + \int_a^b F'(x_0) dg_{\tau_1}(x - x_0) +$$
$$+ \int_a^b \int_a^{\tau_1} F''(x_0 + g_{\tau_2}(x_2 - x_0)) dg_{\tau_2}(x - x_0) dg_{\tau_1}(x - x_0) +$$
$$+ \int_a^b \int_a^{\tau_1} \int_a^{\tau_2} F'''(x_0 + g_{\tau_2}(x_2 - x_0)) dg_{\tau_3}(x - x_2) dg_{\tau_2}(x - x_0 +) dg_{\tau_1}(x - x_0) + \cdots +$$
$$+ \int_a^b \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{2n}} F^{(2n+1)}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} g_{\tau_{2i}}(x_{2i} - x_{2i-2})\right) dg_{\tau_{2n+1}}(x - x_{2n}) \times$$
$$\times\, dg_{\tau_{2n}}(x - x_{2n-2}) \cdots dg_{\tau_2}(x - x_0) dg_{\tau_1}(x - x_0) \qquad (12)$$

із залишковим членом у вигляді

$$R_{2n+1}^E(x) = \int_a^b \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{2n+1}} F^{(2n+2)}(x_0 + g_{\tau_2}(x_2 - x_0) + \cdots + g_{\tau_{2n}}(x_{2n} - x_{2n-2}) +$$
$$+ g_{\tau_{2n+2}}(x - x_{2n})) dg_{\tau_{2n+2}}(x - x_{2n}) dg_{\tau_{2n+1}}(x - x_{2n}) \cdots dg_{\tau_2}(x - x_0) dg_{\tau_1}(x - x_0).$$

У континуальному вузлі

$$\overline{x}_{2n} = \overline{x}_{2n}(\xi_2, \xi_4, \ldots, \xi_{2n}) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} g_{\xi_{2i}}(x_{2i} - x_{2i-2})$$

при виконанні (11) будемо мати

$$R_{2n+1}^E(\overline{x}_{2n}) = \int\limits_a^{\xi_1}\int\limits_a^{\xi_2}\cdots\int\limits_a^{\xi_{2n}}\int\limits_a^{\tau_{2n+1}} F^{(2n+2)}(x_0 + g_{\tau_2}(x_2 - x_0) + \cdots + g_{\tau_{2n}}(x_{2n} - x_{2n-2}) +$$
$$+ g_{\tau_{2n+2}}(\overline{x}_{2n} - x_{2n}))dg_{\tau_{2n+2}}(\overline{x}_{2n} - x_{2n})dg_{\tau_{2n+1}}(\overline{x}_{2n} - x_{2n})\cdots dg_{\tau_2}(\overline{x}_{2n} - x_0) \times$$
$$\times dg_{\tau_1}(\overline{x}_{2n} - x_0) = 0, \tag{13}$$

що випливає з міркувань, аналогічних тим, що були наведені в доведенні теореми 1. Таким чином, буде справедлива

Теорема 2. *Нехай оператор F $2n+1$ разів диференційований за Гато, $g_\tau \in G$, існують інтеграли, що входять у* (12). *Тоді для того щоб інтерполяційний поліном* (12) *задовольняв континуальні інтерполяційні умови* (4), (5), *достатньо, щоб оператор g_τ мав властивості* (11).

Конкретизація операторів g_τ.

Приклад 1. Нехай $X = Q[0,1]$ — простір кусково-неперервних функцій. Візьмемо оператор g_τ у вигляді

$$g_\tau(x) = H(\tau - t)x(t), \qquad x(t) \in Q[0,1].$$

Неважко перевірити, що він має властивість (11). Тоді якщо існують інтеграли Стілтьєса у формулах (9), (12), то ці формули типу Ньютона та Ерміта задовольняють інтерполяційні умови на континуальних вузлах (3) та (4), (5) відповідно. Відзначимо, що ці формули принципово відрізняються від інтерполяційних формул з робіт [5, 8].

Приклад 2. Нехай $X = H$ — гільбертів простір, A — самоспряжений оператор, a, b — верхня та нижня границі його спектра. Тоді [14, 15] оператору A відповідає сімейство самоспряжених операторів $g_\tau = H(\tau I - A)$, $-\infty \leqslant \tau \leqslant \infty$, де $H(z)$ — функція Хевісайда, які мають властивість (11) і

$$g_\tau = \int\limits_a^b H(\tau - \lambda)dE_\lambda,$$

де E_λ — спектральна функція оператора A.

1. *Ульм С. Ю., Поль В. В.* О построении обобщенных разделенных разностей // Изв. АН ЭССР. – 1969. – **18**, № 1. – С. 100–102.
2. *Соболевский П. И.* Интерполяция функционалов и некоторые приближенные формулы для интегралов по гауссовой мере // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975. – № 2. – С. 5–12.
3. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. – Минск: Наука и техника, 1976. – 384 с.
4. *Porter W. A.* Synthesis of polynomic systems // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – **11**, No 2. – P. 308–315.
5. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов // Докл. АН СССР. – 1989. – **307**, № 3. – С. 534–537.
6. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – 278 с.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 406 с.
8. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф., Михальчук Б. Р.* Интерполяционные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 779–790.
9. *Michelli C. A., Milman P.* A formula for Kergin interpolation in $\Re^n$ // J. Approxim. Theory. – 1980. – **29**. – P. 294–296.

10. *Andersson M., Passare M.* Complex Kergin interpolation // Ibid. – 1991. – **64**. – P. 214–225.
11. *Filipsson L.* Kergin interpolation in Banach spaces // Ibid. – 2004. – **127**. – P. 108–123.
12. *Kergin P.* A natural interpolation of C^k function // Ibid. – 1980. – **29**. – P. 278–293.
13. *Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Демків І. І.* Функціональні поліноми Ерміта в просторі $Q[0,1]$ // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 21–25.
14. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва: Наука, 1966. – 534 с.
15. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – Москва: Мир, 1979. – 588 с.

Інститут математики НАН України, Київ
Національний університет “Львівська політехніка”

Надійшло до редакції 14.05.2007

УДК 531.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Мартынюк, Л. Н. Чернецкая**

К теории практической устойчивости по трем мерам

We first formulate the general conditions of practical stability with respect to three measures. We apply the matrix-valued Lyapunov function and the comparison principle.

1. Постановка задачи. Рассматривается система с конечным числом степеней свободы, которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Вектор-функция f предполагается достаточно гладкой, гарантирующей глобальное существование решений задачи (1). Заметим, что здесь не предполагается, что $f(t,0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и, следовательно, $x = 0$ не является решением системы (1).

Далее рассматриваются следующие классы функций:

$$K = \{a \in C([\alpha, +\infty), \mathbb{R}_+),\ a(r) \text{ строго возрастает и } a(r) \to +\infty \text{ при } r \to +\infty\};$$

$$CK = \{\sigma \in C(\mathbb{R}_+ \times [\alpha, +\infty), \mathbb{R}_+),\ \sigma(t,r) \in K \text{ для каждого } t \in \mathbb{R}_+\};$$

$$\mathcal{M} = \Big\{\rho \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+) \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(t,x) = 0 \text{ при любом } t \in \mathbb{R}_+\Big\}.$$

Следуя [1, 2], напомним определения практической устойчивости относительно двух мер.

Определение 1. Система (1) при заданных оценках величин (λ, A, B, T) называется:

1) (ρ_0, ρ)-практически устойчивой, если при заданных $0 < \lambda < A$ из условия $\rho_0(t_0, x_0) < \lambda$ следует $\rho(t, x(t)) < A$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и любого решения $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ системы (1);

2) равномерно (ρ_0, ρ)-практически устойчивой, если условия определения 1.1 выполняются при всех $t_0 \in \mathbb{R}_+$;