Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2007

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 681.142



Член-кореспондент НАН України **В. В. Грицик, М. А. Назаркевич**

# Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій

*An oscillatory nonlinear system whose required parameters vary in time by a nonsinusoidal aperiodic law is considered.*

**1.** Одним з актуальних напрямків дослідження в теорії нелінійних диференціальних рівнянь є теорія Ateb-функцій. Розглядаємо коливну систему з нелінійним характером, у якій шукані величини змінюються в часі за несинусоїдальним неперіодичним законом.

Нехай коливальна система з одним ступенем вільності описується диференційним рівнянням у вигляді

$$\ddot{x} + c^2 x^v = \varepsilon F(x, \dot{x}, \varepsilon), \tag{1}$$

де $\varepsilon$ — малий додатний параметр, постійна $c^2 > 0$, показник степені

$$v = \frac{2v_1' + 1}{2v_1'' + 1} \qquad (v_1', v_1'', v_2', v_2'' = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

а $F(x, \dot{x}, \varepsilon)$ — неперервна функція відносно своїх змінних $x$, $\dot{x}$ і параметра $\varepsilon$. Причому

$$F(x, \dot{x}, \varepsilon) = F_1(x, \dot{x}) + \varepsilon F_2(x, \dot{x}) + \varepsilon^2 F(x, \dot{x}, \varepsilon) + \cdots .$$

Розв'язки рівняння такого типу розглядались у роботах [1, 2]. У даному випадку рівняння розв'язуємо з використанням аперіодичних Ateb-функцій.

**2. Застосування математичного апарату Ateb-функцій для дослідження коливальних систем з нелінійним характером.** Розв'язок рівняння (1) запишеться через Ateb-функції, які є оберненням неповних Beta-функцій, що зображується у вигляді

$$B(p, l) = \int_0^{0<t<1} t^{p-1}(1-t)^{l-1} dt,$$

якщо $t = 1$, то неповна Beta-функція перетворюється в повну Beta-функцію [3]. Ця функція виникла як розв'язок задачі інтерполяції факторіальної функції.

**3. Математичні моделі аперіодичних Ateb-функцій.** Аперіодична Ateb-функція $v = \mathrm{sha}(n, m, \omega)$ являє собою обернення інтеграла

$$\frac{n+1}{2} \int_{0}^{0\leqslant v\leqslant\infty} \frac{d\overline{v}}{(1+\overline{v}^{n+1})^{m/(m+1)}} = \omega, \tag{3}$$

де $\omega$ — незалежна змінна ($-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty$), а $m$ і $n$ — параметри, які визначаються формулами (2) та

$$m = \frac{2v_2' + 1}{2v_2'' + 1} \qquad (v_1', v_1'', v_2', v_2'' = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Функція $\mathrm{sha}(n, m, \omega)$ відносно $\omega$ — $2\Pi'(m,n)$-періодична, де $2\Pi' = B(1/(n+1), m/(m+1) - 1/(n+1))$ — Beta-функція. Величина $\Pi'(m,n)$ для всіх значень $m$ і $n$, які визначаються формулами (2) та (4), скінченна і неперервна, за виключенням значень, що задовольняють нерівність

$$\frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1} \leqslant 0, \tag{5}$$

при яких $\Pi'(m,n)$перетворюється в безмежність.

Виходячи з (3), розглянемо функцію

$$\Phi_1(w, v) = w - \frac{n+1}{2} \int_0^v \frac{d\overline{v}}{(1+\overline{v}^{n+1})^{m/(m+1)}}, \tag{6}$$

де

$$w_0 = \frac{n+1}{2} \int_0^1 \frac{d\overline{v}}{(1+\overline{v}^{n+1})^{m/(m+1)}}. \tag{7}$$

Підінтегральний вираз (6) розкладемо в степеневі ряди. Тоді функція $\Phi_1(w, v)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_1(w, v) = w - \frac{b}{2} v \biggl[ 1 - \frac{a}{1!(b+1)} v^b + \frac{a(a+1)}{2!(2b+1)} v^{2b} + \cdots + \\ + (-1)^k \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{k!(kb+1)} v^{kb} + \cdots \biggr], \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$\begin{gathered} a = \frac{m}{m+1}, \qquad b = n+1, \qquad c = m+1, \qquad d = \frac{n}{n+1}, \\ \overline{w} = w_0 + \frac{c}{2^{(c(d+1)-1)/c}} \biggl[ \frac{1}{cd-1} + \frac{d}{1!2[c(d+1)-1]} + \cdots + \frac{d(d+1)}{2!2^2[c(d+2)-1]} + \cdots + \\ + \frac{d(d+1)\cdots(d+k-1)}{k!2^k[c(d+k)-1]} + \cdots \biggr]. \end{gathered} \tag{9}$$

Розклади в ряди (8) справедливі для всіх $m$ і $n$, що мають вигляд (4), у припущенні, що (5) є нерівність. Ліва частина (5) не може бути цілим числом. Звідси випливає: в розкладах (8) інших нулів у знаменнику немає.

Ряд (8) збігається рівномірно в інтервалах $0 \leqslant v \leqslant 1$ [2].

Тепер для кожного фіксованого значення $w$ із інтервалу $0 \leqslant w \leqslant \omega_0$ шукаємо нулі функції $\Phi_1(w, v)$, тобто визначаємо $v = \mathrm{sha}(n, m, w)$.

**4. Математичні моделі періодичних Ateb-функцій.** Для одержання значень періодичних Ateb-функцій передбачено перетворення інтегралів

$$q = -\frac{m+1}{2} \int\limits_{1}^{1 \geqslant u \geqslant 0} \frac{d\overline{u}}{(1-\overline{u}^{m+1})^{n/(n+1)}},$$

$$q = \frac{n+1}{2} \int\limits_{0}^{0 \leqslant u \leqslant 1} \frac{d\overline{v}}{(1-\overline{v}^{n+1})^{m/(m+1)}} = \frac{1}{2} B_v\left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{n+1}\right),$$

де $m$, $n$ — параметри, які визначаються з формули (2); $u$, $v$ — змінні; $B_v(1/(m+1), 1/(n+ + 1))$ — неповна Beta-функція [2, 3].

Періодичні Ateb-функції $\mathrm{Sa}(n, m, q)$ і $\mathrm{Ca}(m, n, q)$ задовольняють рівність [3]:

$$\bigl(\mathrm{Ca}(m, n, q)\bigr)^{m+1} + \bigl(\mathrm{Sa}(n, m, q)^{n+1}\bigr) = 1.$$

Звідси випливає, що достатньо мати числові значення для однієї з функцій $\mathrm{Sa}(n, m, q)$ чи $\mathrm{Ca}(m, n, q)$, щоб одержати числові значення інших періодичних Ateb-функцій.

Зважаючи на те, що $\mathrm{Ca}(m, n, q)$ має властивість парності

$$\mathrm{Ca}(m, n, \Pi(m, n) - q) = -\,\mathrm{Ca}(m, n, q),$$

а $\mathrm{Sa}(n, m, q)$ — таку властивість [3],

$$\mathrm{Sa}(n, m, \Pi(m, n) - q) = \mathrm{Sa}(n, m, q), \qquad 0 \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}\Pi(m, n).$$

Для знаходження вказаної залежності пропонуємо шукати нулі функції

$$\Phi_1(u) = q + \frac{m+1}{2} \int\limits_{1}^{0 \leqslant u \leqslant 1} \frac{d\overline{u}}{(1-\overline{u}^{m+1})^{n/(n+1)}}. \tag{10}$$

Вважаючи $q$, $m$, $n$ параметрами, будемо для кожного з них знаходити таке значення $u = \overline{u}$, щоб $\Phi_1(\overline{u}) = 0$.

Розкладемо підінтегральний вираз (10) в ряд Тейлора навколо значення $u = 0$ за степенями $u^{m+1}$:

$$(1-u^{m+1})^{-n/(n+1)} = 1 + \frac{n}{n+1}\frac{u^{m+1}}{1!} + \frac{n}{n+1}\frac{2n+1}{n+1}\frac{u^{2(m+1)}}{2!} + \\ + \frac{n}{n+1}\frac{2n+1}{n+1}\frac{3n+2}{n+1}\frac{u^{3(m+1)}}{3!} + \cdots . \tag{11}$$

Згідно з [6], отриманий ряд сходиться рівномірно для всіх значень $|u^{m+1}| \leqslant 1$. Підставляючи (11) в (10) та інтегруючи, одержуємо

$$\Phi_1(u) = q - B(p,q) + \\ + \frac{m+1}{2}u\left[1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!}\right], \quad (12)$$

де введено позначення:

$$z = u^{m+1}, \quad a = \frac{1}{m+1}, \quad b = \frac{n}{n+1}, \quad c = \frac{m+2}{m+1}, \quad p = \frac{1}{n+1}, \quad q = \frac{1}{m+1} \qquad (13)$$

($B(p,q)$ — Beta-функція).

Вираз (12) можна записати через гіпергеометричний ряд

$$\Phi_1(u) = q - \frac{1}{2}\Pi(m,n) + \frac{m+1}{2}uF(a,b,c,z), \qquad (14)$$

де $\Pi(m,n)$ — півперіод Ateb-функції $u(m,n,q)$.

Будемо знаходити нулі функції $\Phi_1(u)$. Для цього використовуємо метод ділення відрізка навпіл. Обчислювальний процес продовжується доти, поки $s$-й відрізок не стає величиною порядку $\varepsilon$, або

$$|u_{s+1} - u_s| \leqslant \varepsilon, \qquad (15)$$

де $\varepsilon$ — досить малий додатний параметр. У нашому випадку $\varepsilon = 10^{-9}$. Тоді за наближений нуль функції приймалися величини

$$u^* = \frac{1}{2}(u_{s+1} + u_s). \qquad (16)$$

При підрахунку значень функції $\Phi_1(u)$ в гіпергеометричному ряді відкидувалися $s$ члени, модулі яких ставали менші за $\varepsilon$.

Запишемо оцінку між точним нулем $u = \overline{u}$ функції $\Phi_1(u)$ і наближеним, який визначався згідно з формулою (16). Якщо задовольняється нерівність (15) і $\Phi_1(u_s)\Phi_1(u_{s+1}) < 0$, то матиме місце і нерівність

$$|\overline{u} - u^*| < \varepsilon.$$

У процесі знаходження нулів функції (12) проводилася перевірка, наскільки є малими величини $\Phi_1(u^*)$. Таким чином, описано послідовність табулювання функції $u = \mathrm{Ca}(m,n,q)$ для різних значень параметрів $m$ і $n$.

**5. Алгоритм табулювання аперіодичної Ateb-функції $v = \mathrm{sha}(n,m,\omega)$.** На початку роботи алгоритму оголошуємо змінні та присвоюємо значення константам. Задаємо точність для обчислення повної Beta-функції. Оголошуємо змінні циклів. Наступним кроком в алгоритмі є модуль створення текстового файлу і запису числових даних, розрахованих у програмному пакеті. Визначаємо сталі значення для $v = \mathrm{sha}(n,m,\omega)$, до них відноситься інтеграл повної Beta-функції, величини $a$, $b$, $c$, $d$, згідно з формулою (9), та ряд $w$, який визначається з (8) для повної Beta-функції. Обчислення проводиться з точністю $\varepsilon = 10^{-15}$. Наступний етап — основний розрахунок. Його блок-схема показана на

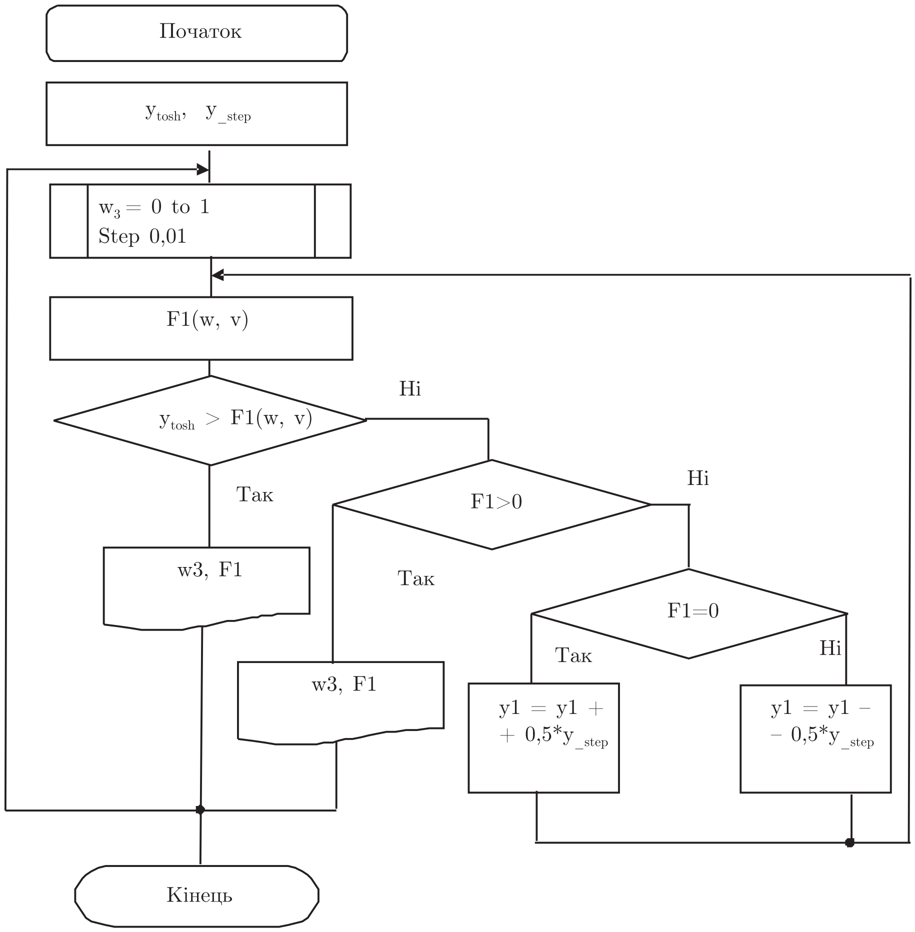


Рис. 1

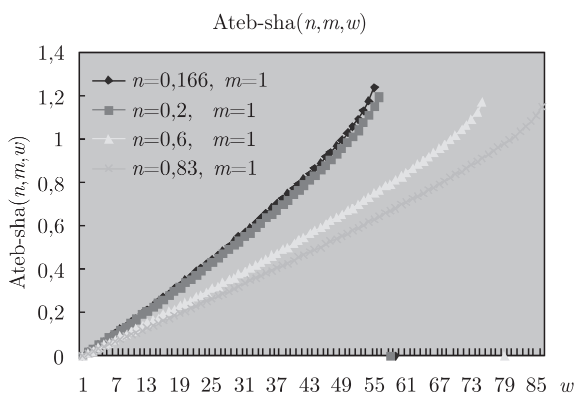


Рис. 2

рис. 1, де $F1(w, v)$ — обчислення ряду (9); $y_{\text{tosh}}$ — задання точності обчислень; $y\_{\text{step}}$ — задання кроку пошуку неявно заданої функції; $w3$, $F1$ — шукані корені.

**6. Результати моделювання.** Результати моделювання функції $v = \text{sha}(n, m, \omega)$ за допомогою розробленого алгоритму на ведено на рис. 2. Результати моделювання $v = \text{ca}(m, n, \omega)$ у вигляді графіків ілюструє рис. 3.

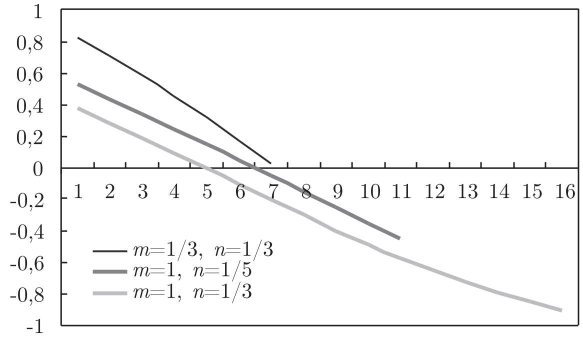


Рис. 3

Таким чином, періодичні Ateb-функції, їх математичні властивості і числові значення дають можливість розв'язувати нелінійні диференційні рівняння, які описують коливальні процеси для систем рівнянь.

Для моделювання складних коливних процесів з істотною нелінійністю пропонується використовувати математичний апарат Ateb-функцій, який дозволяє описати дані процеси з підвищеною точністю без апроксимацій або будь-яких наближень [2]. Крім того, математичний апарат Ateb-функцій є функціонально повним, зручним для опису і легко адаптованим до зміни параметрів і процесів. Такий математичний апарат дозволяє проводити моделювання періодичних і неперіодичних процесів та враховувати характеристики матеріалу у динамічних системах. Він забезпечує одержання точного розв'язку в автономних нелінійних системах диференційних рівнянь другого порядку. Апарат Ateb-функцій є ефектиним при дослідженні динаміки росту і затухання випадкових вібрацій у нелінійних системах.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1974. – 503 с.
2. *Возний А. М.* Застосування Ateb-функцій для побудови розв'язку одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 9. – С. 971–974.
3. *Сеник П. М.* Обращение неполной Beta-функции // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 3. – С. 325–333.
4. *Грицик В. В., Назаркевич М. А.* Дослідження періодичних Ateb-функцій у математичному моделюванні // Інтелектуальні системи прийняття рішень та прикладні аспекти інформаційних технологій: Матеріали наук. конф. 18–21 травня 2005 р. Євпаторія, 2005. – С. 142–145.
5. *Nazarkevich M.* Research of numeral transformations of Ateb-functions in the mathematical design // IV Sympozjum modelowanie i symulacja komputerowa w technice. Wyzsza szkola informatyki. – Lodz, 2005. – C. 161–163.
6. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. – Москва, 1978.

*Державний науково-дослідний інститут*
*інформаційної інфраструктури НАН України, Львів*
*Державний департамент зв'язку*
*та інформатизації України, Львів*

*Надійшло до редакції 18.04.2007*