УДК 621.396.218:531.37:538.31

В. В. Козоріз, О. В. Козоріз, член-кореспондент НАН України
С. І. Ляшко

Динамічна магнітна система сфероїд — вільний диполь та її Maple-моделювання

A solution of the Cauchy problem and phase portraits based on Maple-software procedures for a system of non-linear differential equations of the 12-th order describing the free magnetic dipole dynamics in the field of an immobile elongated spheroidal permanent magnet are derived.

За відсутності макроскопічних струмів рівняння магнітного поля еквівалентні рівнянню Пуассона в області намагніченого середовища та рівнянню Лапласа в області вакууму. На границі магніт — вакуум виконуються умови неперервності скалярного магнітного потенціалу f та нормальної компоненти вектора магнітної індукції $\overrightarrow{B}$.

Принципові труднощі знаходження f пов'язані з геометричною формою намагніченого тіла. Відомі аналітичні методи пристосовані для випадків, коли границя магніт — вакуум є координатною поверхнею системи координат, що допускають розділення змінних для рівняння Лапласа, записаного в цих координатах. Такі системи координат описані, зокрема, в [1]. До них належать координати витягнутого та сплюснутого еліпсоїдів обертання (сфероїдів) σ, τ, φ [2]. В цих координатах зовнішня поверхня магніту у формі сфероїда описується рівнянням $\sigma_0 = \mathrm{const}$. У випадку паралельності вектора намагніченості $\overrightarrow{J} = \mathrm{const}$ осі сфероїда розв'язок не залежить від φ. Параметром σ_0 варіюється форма магніту. Зокрема, значення σ_0, близьке до одиниці, відповідає довгому магніту, а значення σ_0, близьке до нуля, відповідає диску.

Скалярний потенціал f витягнутого магніту сфероїдальної форми, намагніченого однорідно в напрямку великої осі, в областях вакууму (індекс 1) і магніту (індекс 2) може бути представлений виразами [3, (6.21)–(6.22)]:

$$f_1 = \frac{aJ}{\mu_0}(\sigma_0^2 - 1)\sigma_0(\sigma \operatorname{Arccth} \sigma - 1)\tau, \tag{1}$$

$$f_2 = \frac{aJ}{\mu_0}(\sigma_0^2 - 1)\sigma(\sigma_0 \operatorname{Arccth} \sigma_0 - 1)\tau, \tag{2}$$

де a — лінійний параметр координат витягнутого еліпсоїда обертання; μ_0 — магнітна проникність вакууму. Вони задовольняють рівняння магнітостатики та умови неперервності потенціалу і нормальної компоненти градієнта потенціалу на границі магніт — вакуум.

З використанням зв'язків між безрозмірними декартовими координатами x_1, x_2, x_3 та координатами σ, τ, φ (див., наприклад, [2, табл. 6.5–3])

$$\begin{aligned} x_1^2 &= (\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)\cos^2\varphi, \\ x_2^2 &= (\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)\sin^2\varphi, \\ x_3^2 &= \sigma\tau \end{aligned} \tag{3}$$

можна отримати компоненти вектора $\overrightarrow{B}$ на нерухомі декартові осі (постійний додатний множник опущено):

$$
\begin{aligned}
&B_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{x_3}{\sigma^2(1-\sigma^2)}\frac{\partial \sigma}{\partial x_1}, \qquad B_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{x_3}{\sigma^2(1-\sigma^2)}\frac{\partial \sigma}{\partial x_2},\\
&B_3 = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \operatorname{Arccth}\sigma - \frac{1}{\sigma} + \frac{x_3}{\sigma^2(1-\sigma^2)}\frac{\partial \sigma}{\partial x_3},
\end{aligned} \tag{4}
$$

де для σ з (3) матимемо

$$
\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4x_3^2}}, f_1 = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{5}
$$

Якщо орієнтацію вільного магнітного диполя $\overrightarrow{m}$ описати кутами Ейлера–Крилова x_4, x_5, x_6 і використати відомі формули направляючих косинусів (див., наприклад, [4, (7.12.1)]), його компонентами відносно нерухомих декартових осей будуть (постійний множник опущено):

$$
\begin{aligned}
&m_1 = \sin x_5,\\
&m_2 = -\sin x_4 \cos x_5,\\
&m_3 = -\cos x_4 \cos x_5.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Потенціальною енергією U динамічної системи еліпсоїд — вільний диполь є скалярний добуток $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{m}$. Тому, опускаючи постійний множник, матимемо:

$$
\begin{aligned}
U = &\left\{\sin x_5 \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} - \sin x_4 \cos x_5 \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}\right\} \cdot \frac{x_3}{\sigma^2(1-\sigma^2)} + \\
&+ \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x_3}\frac{x_3}{\sigma^2(1-\sigma^2)} + \operatorname{Arccth}\sigma - \frac{1}{\sigma^2}\right]\cos x_4 \cos x_5.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Нехай динамічними змінними і характерною енергією будуть відповідно безрозмірні параметри x_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, і величина Ma^2w^2, де M — маса вільного диполя; w — характерна кругова частота. Тоді можна отримати такі вихідні рівняння динамічної системи вільний диполь — нерухомий ідеальний постійний магніт у формі витягнутого еліпсоїда обертання:

$$
\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1\frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_1\frac{\partial U}{\partial x_2}, \qquad \frac{d^2x_3}{dt^2} = -k_1\frac{\partial U}{\partial x_3}, \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&n_1 = \cos x_5 \cos x_6 \frac{dx_1}{dt} + \sin x_6 \frac{dx_5}{dt},\\
&n_2 = -\cos x_5 \sin x_6 \frac{dx_1}{dt} + \cos x_6 \frac{dx_5}{dt},\\
&n_3 = \sin x_5 \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_6}{dt},
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\frac{dn_1}{dt} = -k\frac{\partial u}{\partial x_4}, \qquad \frac{dn_2}{dt} = -k\frac{\partial u}{\partial x_5}, \qquad \frac{dn_3}{dt} = 0. \tag{10}
$$

Три рівняння (8) є другим законом Ньютона для координат поступального руху, а параметр k_1 є відношенням характерної магнітної енергії до енергії Ma^2w^2. Три рівняння (9) є кінематичними рівняннями Ейлера, записаними через кути Ейлера–Крилова, їх похідні за безрозмірним часом t та проекції безрозмірної кутової швидкості вільного диполя n_1, n_2, n_3 на зв'язані з ним декартові осі [4, (7.16.2)]. Три рівняння (10) — це динамічні рівняння Ейлера, що зв'язують похідні проекцій вектора кутової швидкості вільного диполя за t та проекції моментів магнітних сил на зв'язані з ним осі (див., наприклад, [5, (36.4)]). Останні записані в припущенні, що вільний диполь має три однакові центральні моменти інерції. Безрозмірний коефіцієнт k є відношенням центрального моменту інерції диполя і величини Ma^2.

Отримана система нелінійних диференційних рівнянь 12-го порядку (8)–(10) з врахуванням (5), (7) повністю визначає динамічну поведінку наданням числових значень двом безрозмірним параметрам k і k_1 та відповідними початковими умовами. Вона досить складна, і для її аналізу доцільно використати сучасні комп'ютерні методи, зокрема, систему комп'ютерної алгебри Maple [6], що дозволяє простим скриптом отримувати розв'язки складних нелінійних диференційних рівнянь, представляти їх та фазові портрети графічно. Нижче наведений такий скрипт і отримані деякі нові, на наш погляд, результати:

```
> restart:with(plots):
> f1:= 1 + x1^2 + x2^2+ x3^2:
> f2:= (1/2)^(1/2)*(f1 + (f1^2 − 4*x3^2)^(1/2))^(1/2):
> F1:= diff(f2, x1):
> F2:= diff(f2, x2):
> F3:= diff(f2, x3):
> u:= x3*sin(x5)*F1/(f2^2*(1 − f2^2)) − x3*sin(x4)*cos(x5)*F2/(f2^2*(1 − f2^2)) +
     + (arccoth(f2) − 1/f2 + x3*F3/(f2^2*(1 − f2^2)))*cos(x4)*cos(x5):
> u1:= − diff(u, x1):
> u2:= − diff(u, x2):
> u3:= − diff(u, x3):
> u4:= − diff(u, x4):
> u5:= − diff(u, x5):
> U1:= subs(x1 = X1(t), x2 = X2(t), x3 = X3(t), x4 = X4(t), x5 = X5(t), u1):
> U2:= subs(x1 = X1(t), x2 = X2(t), x3 = X3(t), x4 = X4(t), x5 = X5(t), u2):
> U3:= subs(x1 = X1(t), x2 = X2(t), x3 = X3(t), x4 = X4(t), x5 = X5(t), u3):
> U4:= subs(x1 = X1(t), x2 = X2(t), x3 = X3(t), x4 = X4(t), x5 = X5(t), u4):
> U5:= subs(x1 = X1(t), x2 = X2(t), x3 = X3(t), x4 = X4(t), x5 = X5(t), u5):
> e1:= diff(X1(t), t) = Y1(t):
> e2:= diff(Y1(t), t) = N*U1:
> e3:= diff(X2(t), t) = Y2(t):
> e4:= diff(Y2(t), t) = N*U2:
> e5:= diff(X3(t), t) = Y3(t):
> e6:= diff(Y3(t), t) = N*U3:
> e7:= cos(X5(t))*cos(X6(t))*diff(X4(t), t) + sin(X6(t))*diff(X5(t), t) = n1(t):
> e8:= − cos(X5(t))*sin(X6(t))*diff(X4(t), t) + cos(X6(t))*diff(X5(t), t) = n2(t):
> e9:= sin(X5(t))*diff(X4(t), t) + diff(X6(t), t) = n3(t):
> e10:= diff(n1(t), t) = N1*U4:
> e11:= diff(n2(t), t) = N1*U5:
> e12:= diff(n3(t), t) = 0:
> k:= 0: N:= − 1: N1:= − 1.5:
```

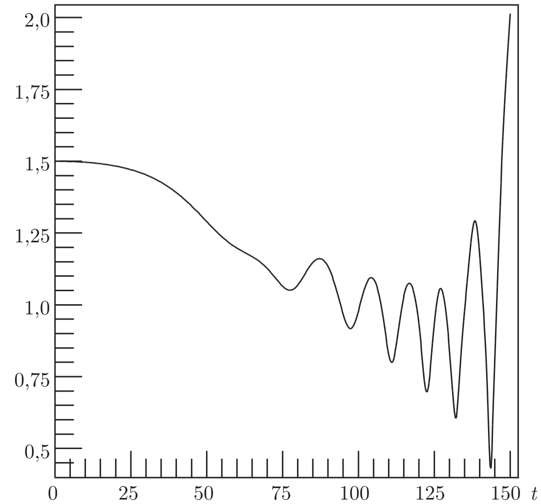

Рис. 1. Розвиток збурення радіуса орбіти вільного диполя

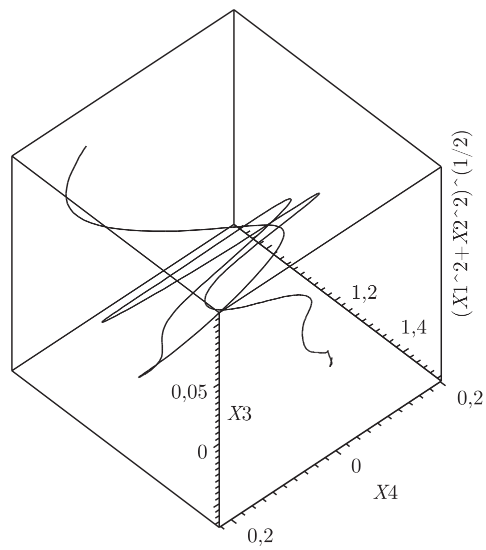

Рис. 2. Фазовий портрет кут крену — радіус орбіти

> s:= dsolve(e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12, X1(0) = 1.5, X2(0) = 0, X3(0) = 0.005, X4(0) = 0, X5(0) = 0, X6(0) = 0, Y1(0) = 0, Y2(0) = 0.413, Y3(0) = 0, n1(0) = 0, n2(0) = 0, n3(0) = 0, type = numeric):

Початкові умови спочатку обрані так, щоб мати планетарну систему (вільний диполь обертається в екваторіальній площині навколо нерухомого магніту), але з невеликим початковим збуренням перпендикулярно площині орбіти. Наведені нижче команди дозволяють отримати відповідно графіки розвитку збурення радіуса орбіти вільного диполя (рис. 1), фазовий портрет кут крену — радіус орбіти (рис. 2), розвитку збурення кута крену (рис. 3, *а*) та вертикального зміщення орбіти вільного диполя (рис. 3, *б*):

> odeplot(s, [t, (X1(t)ˆ2 + X2(t)ˆ2)ˆ(1/2)], 0..100, numpoints = 500, color = black);

> odeplot(s, [X4(t), (X1(t)ˆ2 + X2(t)ˆ2)ˆ(1/2), X3(t)], 0..100, numpoints = 500, axes = BOX, color = black);

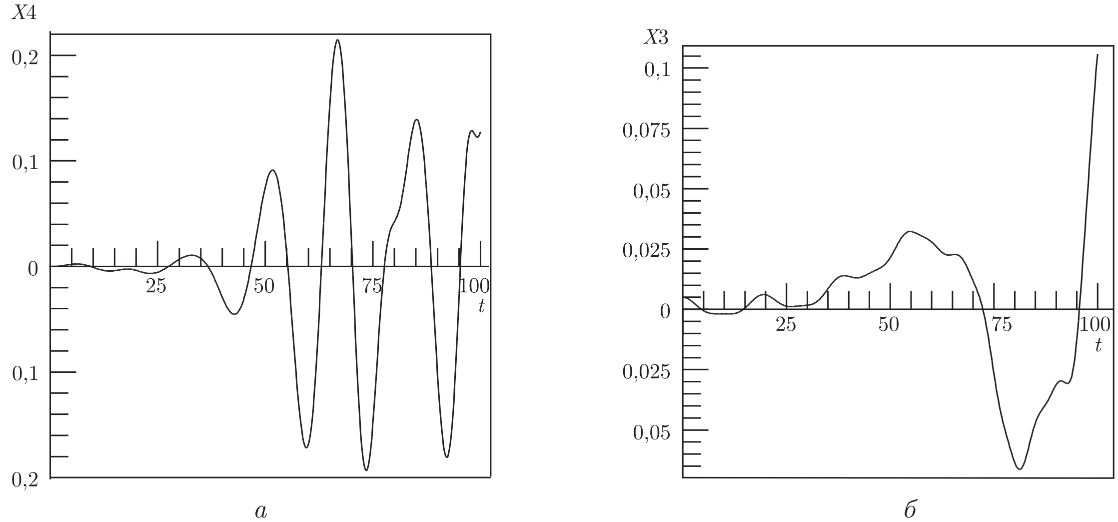

Рис. 3. Розвиток збурення: *а* — кута крену; *б* — аплікати вільного диполя

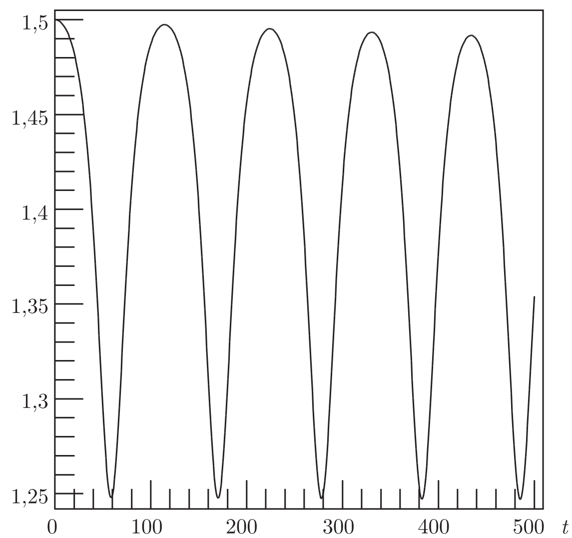

Рис. 4. Поведінка радіуса орбіти вільного диполя без вертикального збурення

> odeplot(s, [t, X4(t)], 0..100, numpoints = 500, color = black);

> odeplot(s, [t, X3(t)], 0..100, numpoints = 500, color = black);

Якщо ж вертикальне збурення відсутнє ($x_3(0) = 0$), характер динамічної поведінки суттєво змінюється. Зокрема, радіус орбіти періодично змінюється від свого початкового значення 1,5 до 1,25 (рис. 4):

> s:= dsolve(e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12, X1(0) = 1.5, X2(0) = 0, X3(0) = 0, X4(0) = 0, X5(0) = 0, X6(0) = 0, Y1(0) = 0, Y2(0) = 0.413, Y3(0) = 0, n1(0) = 0, n2(0) = 0, n3(0) = 0, type = numeric):

> odeplot(s, [t, (X1(t)ˆ2 + X2(t)ˆ2)ˆ(1/2)], 0..500, numpoints = 500, color= black);

Зауважимо, що динамічна поведінка вільного тіла з магнітною природою сил, що, на відміну від гравітаційних або електричних, не є центральними, набагато складніша, оскільки навіть у такому простому випадку, який розглянуто, досить складна і мало вивчена.

До відомих результатів можна віднести роботу [7], де методом функцій Ляпунова отримані достатні умови стійкості планетарної системи вільний диполь — еліпсоїд, що уможливлює існування стійких планетарних конфігурацій з магнітною природою сил, що до цього виключалася (див., наприклад, [8]).

1. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. – Т. 2. – 886 с.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – Москва: Наука, 1977. – 832 с.
3. *Козорез В. В.* Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. – Киев: Наук. думка, 1981. – 140 с.
4. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. – Москва: Наука, 1971. – 636 с.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. – Изд. 3-е. – Москва: Наука, 1973. – 208 с.
6. *www*.maplesoft.com.
7. *Козорез В. В.* Об устойчивости орбитального движения свободного магнитного диполя в поле эллипсоида // Докл. АН СССР. – 1977. – **232**, № 5. – С. 1055–1057.
8. *Гинзбург В. Л.* Теория мезона и ядерные силы // Пробл. теор. физики (Памяти И. Е. Тамма). – Москва: Наука, 1972. – С. 192–198.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 07.03.2007